



PROGRAMME DE RECHERCHE & APPLICATIONS

Rapport final scientifique / bilan

OPTIBEACH

janvier 2023



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Rapport scientifique sur l'approche de la morphodynamique par calcul optimal

Contents

1	Articles de 2021 à 2023	3
1.1	2023: En cours: Hydromorphodynamic modelling based on Hadamard Sensitive Analysis [1]	3
1.2	2022: Pre-submit: Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization [2]	23
1.3	2022: Journées Nationales Génie Côtier - Génie Civil: OptiMorph : un modèle de morphodynamique du littoral par principe de minimisation. Analyse de sensibilité en 1D et application multi-1D [3]	47
1.4	2022: 37th International Conference on Coastal Engineering: A Multi-1D Sandy Beach Dynamics Model By Minimization [4] . .	57
1.5	2021: Chinese Ocean Engineering: Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis [5]	62
1.6	2021: Pre-submit: Application of Opti-Morph: Optimized beach protection by submerged geotextile tubes [6]	75
1.7	2021: Non-submit: Opti-Morph User Guides [7]	101
2	Notes scientifiques	151
2.1	2022: État de l'art de l'optimisation de structures de protection du littoral à la morphodynamique des plages par calcul optimal .	151
2.2	2022: Théorie de Hadamard	166
2.3	2022: Lien entre le Lagrangien et l'Optimisation	176
2.4	2021-2023: Carnet de recherche	190
3	Posters	386
3.1	2022: Journée des doctorants 2022 - Geosciences Montpellier . .	386
3.2	2021: Salon International du Littoral 2021	388
3.3	2021: Journée des doctorants 2021 - Geosciences Montpellier . .	390
3.4	2020: Salon International du Littoral 2020	392
3.5	2019: Journée des doctorants 2019 - Geosciences Montpellier . .	394
3.6	2019: RCEM	396

4	Présentations	398
4.1	2022: Journée des doctorants 2022 - Geosciences Montpellier . . .	398
4.2	2021: Gladys Workshop	408
4.3	2021: Journée des doctorants - Geosciences Montpellier	427
4.4	2021: LA Turballe	457
4.5	2020: Journée des doctorants - IMAG	476
4.6	2019: Journée des doctorants - Geosciences Montpellier	530



1 Articles de 2021 à 2023

1.1 2023: En cours: Hydromorphodynamic modelling based on Hadamard Sensitive Analysis [1]

Hydromorphodynamic modelling based on Hadamard Sensitive Analysis

Ronan Dupont^{1,2,3*}, Frédéric Bouchette^{1,3†} and Bijan Mohammadi^{2,3†}

^{1*}GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France.

²IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France.

³GLADYS, Univ Montpellier, Montpellier, France.

*Corresponding author(s). E-mail(s):

ronan.dupont@umontpellier.fr;

Contributing authors: frederic.bouchette@umontpellier.fr;

bijan.mohammadi@umontpellier.fr;

†These authors contributed equally to this work.

Abstract

This paper focuses on the Hadamard approach applied to coastal hydromorphodynamics by minimization principle. The purpose of this paper is to develop a general approach to hydro-morphodynamics by minimization using mathematical developments allowing to neglect some assumptions. The described approach allows to couple morphodynamics with any hydrodynamic model. One can for example use robust models such as Saint-Venant or codes like SWAN, SWASH, XBeach,

Keywords: Hydro-morphodynamics, Optimization, Model validation, Coastal, Variational approach, Energy minimization, Optimal transport, Waves.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



1 Introduction

Morphodynamic calculation codes are generally very complex. They are specific models that solve the physical equations of hydrodynamic and morphodynamic at a very precise scale. In this paper, we propose a more global approach based on the optimization which aims to creating a generic morphodynamics module that can be used with any hydrodynamic model.

The optimization theory is the study of the evolution of a system while searching systematically for the minimum of a function derived from physical properties of the system. Using mathematical optimization theory [1–9], we have designed a model that describes the evolution of the seabed while taking into account the coupling between morphodynamic and hydrodynamic processes. This study is based on the assumption that the seabed adapts to minimize a certain wave-related function. The choice of this function determines the driving force behind the morphological evolution of the seabed. This optimization problem is subjected to a certain number of constraints, allowing for a more accurate description of the morphodynamic evolution.

This study is accompanied by the development of a numerical morphodynamic model, which has the advantages of being fast, robust, and of low complexity. The model was given the name *Opti-Morph*.

The paper starts with a description of the last version of the model *Opti-Morph 2021* [10] which integrated very important constraints on the differentiation of \mathcal{H} . Then we present Hadamard's approach which will allow to lift this constraint. Then we will present results from our generic morphodynamic model coupled with hydrodynamic models like XBeach [11–14] or SWAN [15].

1.1 State of the Art

Numerical models of morphodynamic processes are seen as a valuable tool for understanding and predicting the evolution of the sediment and morphology over time in coastal areas. Different morphodynamic models exist in the literature, ranging from empirical models [16–19] to process-based models. The latter can be sorted into several categories, such as i) profile evolution models [20–22], which use only cross-shore transport, ii) 2D morphological models [11, 23–31], which use depth-averaged wave and current equations to model the sediment transport while neglecting the vertical variations of wave-derived parameters, as well as iii) 3D and quasi-3D models [32–38], which determine the sediment evolution using both horizontal and vertical variations of the wave-derived parameters.

The Opti-Morph model described in this paper is based on optimal control. In the past, the use of optimization theory has primarily been used in the design of coastal defense structures, whether in the design of ports and offshore breakwaters [2, 3].

Optimal control has already been considered for the modeling of shallow water morphodynamics, based on the assumption that the seabed acts as a

flexible structure and adapts to a certain hydrodynamic quantity [4, 8]. These studies were based on somewhat theoretical developments with no direct relationship with real case studies. Our objectives in this work is to produce a physically robust numerical morphodynamic model based on optimal control and to validate it using numerical hydrodynamics models and also canal experiments.

1.2 Hypotheses

The main hypothesis of this model is that nature seeks to minimize the energy it spends. To illustrate this, we can do a simple experiment. We run a simulation on XBeach of an unrealistic profile and a realistic profile: close to a Dean profile. Taking a realistic forcing: the offshore water height $H_0 = 2\text{ m}$, the beach slope at 0.1‰ and the wave period $T_0 = 8\text{ s}$. We plot the water heights H and the wave energy $\mathcal{E}_H = \frac{1}{16}\rho_w g H^2$. The following results are obtained:

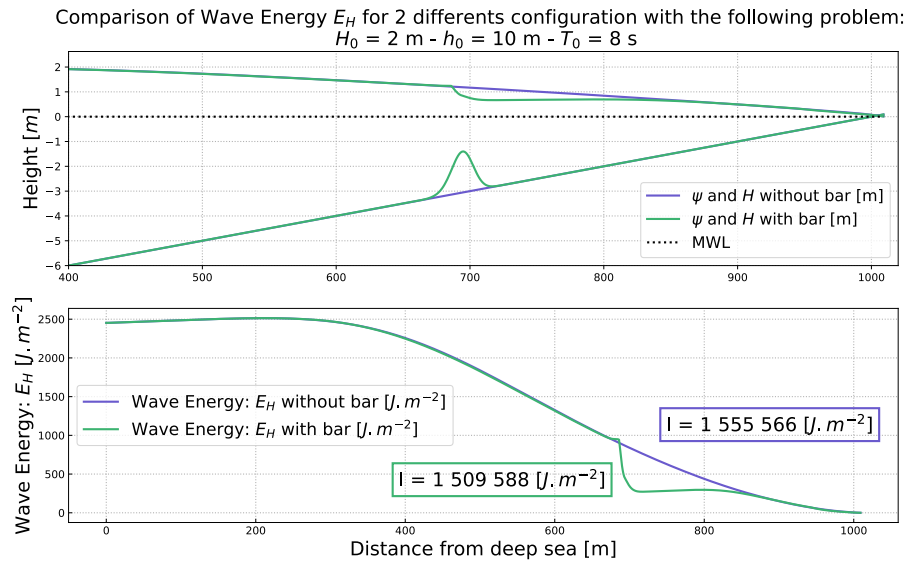


Fig. 1 Comparison of Wave Energy \mathcal{E}_H for 2 different configuration

Not surprisingly, the energy of the realistic profile is lower than the energy of the unrealistic profile (3%). This hypothesis is therefore not surprising. Other assumptions assess the behavior of seabed and originate from general observations. Sediment transport is influenced by the orbital velocity of water particles [39], which leads to greater sediment mobility in shallower waters. Another natural observation concerns the slope of the seabed, which cannot be overly steep without an avalanching process occurring [40]. Last, in an experimental flume configuration, the quantity of sand must remain constant over time, with no inflow or outflow of sand to alter the sand stock.

2 Presentation of OptiMorph model 2021

The model developed by COOK. M & AL [10] is based on the principle that nature seeks to minimize the energy it expends. This time, the \mathcal{J} cost function that governs the evolution of the seafloor has been developed according to the $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ energy of the waves. This one is based on the following workflow:

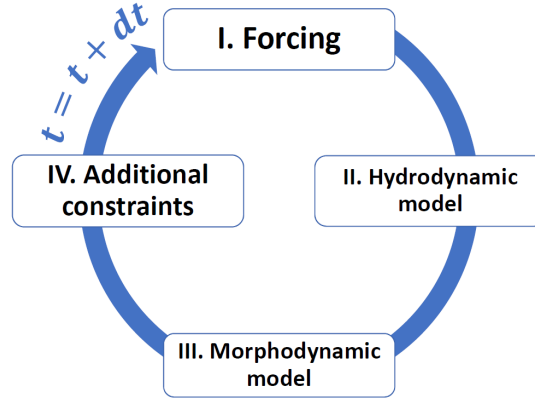


Fig. 2 OptiMorph 2021 Workflow

with phase I. of forcing 2.1, phase II. of the hydrodynamic model 2.2, phase III. of the morphodynamic model 2.3 and the last phase IV. of constraints 2.4.

2.1 Model forcing

This hydro-morphodynamic model needs a number of forcing parameters. These very classical parameters are divided in 4 parts: numerical, geometric, hydrodynamic and morphodynamic parameters. They are presented in the table below.

Physics	Parameters	Definition
Numerical parameters	Δx	Spatial step [m]
	Δy	Time step [s]
Domain	T_f	Simulation time [s]
	L	Domain size [m]
	h	Offshore water depth [m]
Hydrodynamic	α	Slope for a linear bathymetry
	$H(t)$	Offshore water height [m]
	H_{max}	Maximum water depth offshore [m]
Morphodynamic	T_0	Wave period [s]
	ψ_0	Bathymetry
	Υ	Sediment mobility [m.s.kg-1]
	β	Maximum slope

Table 1 Table of different forcing parameters

these parameters are very classical: many are very similar to other models. The parameter that is very different here is the sediment mobility parameter Υ . This one will be used in the calculation of the morphodynamics.

2.2 Hydrodynamic model

The time evolution of the bathymetric profile is based on the assumption that the bottom evolves to minimize a certain hydrodynamic quantity. Thus, a hydrodynamic model providing a description of the surface wave state is essential. The literature on hydrodynamic models is vast [41]. However, our main focus in this work is a) on the morphodynamic part of the approach and b) on providing evidence of the ability of optimization to perform robust morphodynamic prediction even under weakly constrained hydrodynamics. The model presented below is based on the linear wave theory [42]. It determines the significant wave height, noted \mathcal{H} along the cross-shore profile. Let $\Omega = [0, x_{\max}]$ be the domain of the cross-shore profile, where $x = 0$ is an arbitrary point in deep water, and x_{\max} is an arbitrary point beyond the coastline. The Ω domain is divided into two disjoint subsets: the Ω_S shoaling zone and the Ω_B breaking zone. The wave height \mathcal{H} on Ω_S is based on the shoaling equation (1), where H_0 is the deep water wave height and K_S is a shoaling coefficient. The simplest model is described as follows:

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(t)K_S(x, h) & \text{pour } x \in \Omega_S \\ \gamma h(x, t) & \text{pour } x \in \Omega_B \end{cases} \quad (1)$$

For the surge in the Ω_B area, the model is essentially based on Munk's breaking criterion [43] γ . This model is very simple and its justification lies in the ease of analytically differentiating the terms necessary for the differentiation of the \mathcal{J} functional. It has been improved in Megan's work [10] but we will not present it as they are not of interest in this paper.

2.3 Morphodynamic model based on Wave Energy Optimization

For the morphodynamic model, it is assumed that the bottom varies with time in order to minimize a cost function \mathcal{J} . This cost function is defined as the wave potential energy in the shoaling zone, defined for any $t \in [0, T]$ by the following equation (2):

$$\mathcal{J}(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}] \quad (2)$$

where \mathcal{H} denotes the wave height computed by the above hydrodynamic model, ρ_w is the water density ($kg.m^{-3}$), and g denotes the gravitational acceleration ($m.s^{-2}$). In order to describe the evolution of the bathymetric profile ψ , whose initial state is given by ψ_0 , the dynamics of ψ minimizing \mathcal{J} is governed by the following gradient descent system:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad (3)$$

where ψ_t is the time evolution of the sandy bottom ($m \cdot s^{-1}$), Υ is the sediment mobility ($m.s.kg^{-1}$), Λ is the wave excitation of the sandy bottom, and d is the downwelling direction indicating how the sandy bottom varies. In unconstrained configurations, there would be $d = -\nabla_{\psi} \mathcal{J}$, which by its definition indicates the direction of a local minimum of \mathcal{J} with respect to ψ as illustrated opposite figure 3.

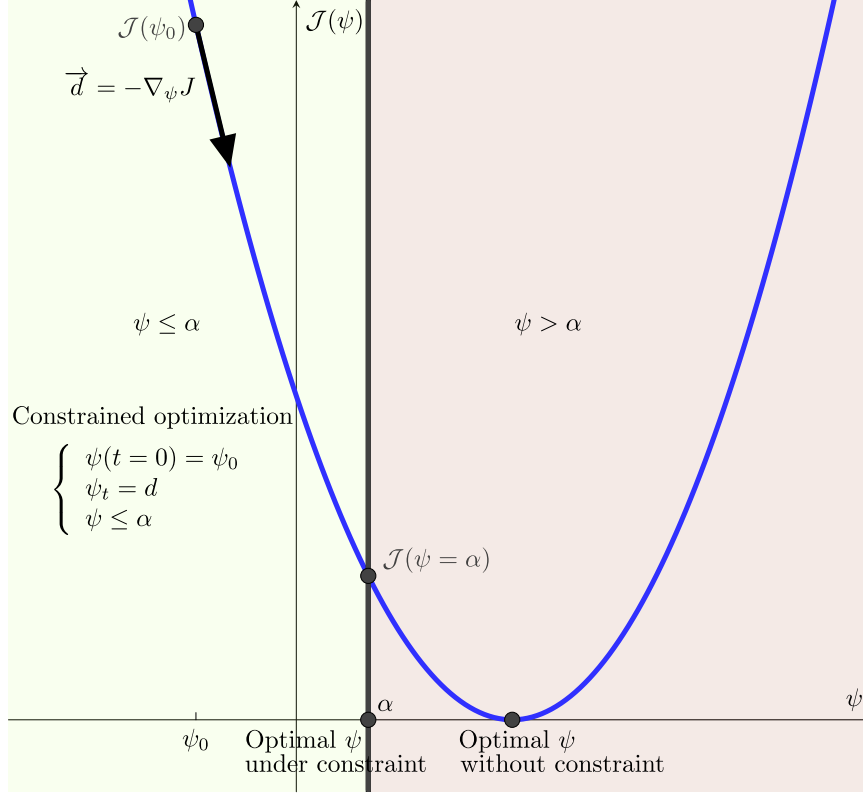


Fig. 3 Illustration of sandy conservation and slope constraints with $\psi \leq \alpha$. The optimum does not necessarily correspond to the critical point $\nabla_{\psi} \mathcal{J} = 0$

The approach involves two parameters with clear physical interpretation. The first Υ takes into account the physical characteristics of the sand and represents the mobility of the sediment. At the present time, we consider Υ to be a measure of sand mobility expressed in $m.s.kg^{-1}$. The second parameter Λ is a local function which represents the influence of the water depth on the seabed and is defined using the term describing the vertical variation of the classic velocity potential of the linear wave theory [39]:

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))} \end{aligned} \quad (4)$$

2.4 Model constraints

Constraints are added to the model to incorporate more physics and provide more realistic results. The driving forces of the morphological evolution of the bathymetric profile are described by minimizing the cost function \mathcal{J} while the secondary processes are expressed by constraints. Two physical constraints were adopted in the following: (i) a sand slope constraint, which prevents the sand from exhibiting unrealistic slopes and (ii) the sand stock constraint, forcing the amount of sand in an experimental basin to remain constant over time. The latter is necessary to verify and validate the numerical model in wave channel simulations. The first constraint results in:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}} \quad (5)$$

where the parameter M_{slope} represents the critical slope angle of the sand and varies between 0.2 and 0.6 [44]. This can be illustrated on figure 4 with thus an example of acceptable and not acceptable slope. The second, sand conservation constraint concerns mainly the cases of an experimental flume. This constraint states that the quantity of sand in a flume must be constant over time, as given by (6), contrarily to an open-sea simulation where sand can be transported between the onshore and the offshore zones [45, 46].

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T] \quad (6)$$

which ensures that the sand stock remains constant over time. This can be illustrated in figure 5 with an example of acceptable and unacceptable sand stock.

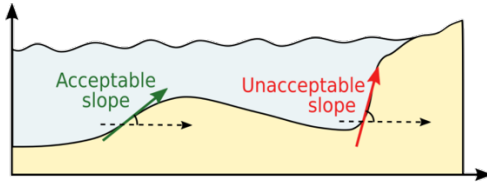


Fig. 4 Slope constraint (5)

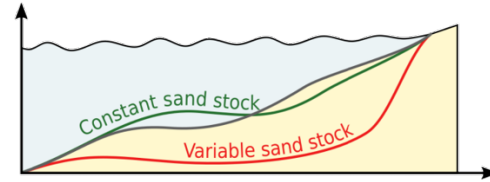


Fig. 5 Sand conservation (6)

2.5 Gradient calculation $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$

The tricky step of this model is the necessity of computing $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$. This one is not easy to compute since we do not differentiate on an axis like x but on a shape. \mathcal{J} depends on \mathcal{H} , it is thus advisable to have a very simple hydrodynamic model in order to differentiate it. We assume at first that \mathcal{J} is of the form $\mathcal{J}(\psi(x), H(\psi(x)))$. With the chain rule, we obtain the following development:

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi} \mathcal{J} &= \partial_{\psi} \mathcal{J} + \partial_H \mathcal{J} \partial_{\psi} H \\ &= \partial_{\psi} \left(\frac{1}{16} \rho g H^2 \right) + \partial_H \left(\frac{1}{16} \rho g H^2 \right) \partial_{\psi} H \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \rho g H \partial_{\psi} H$$

where $\partial_{\psi} = \frac{\partial}{\partial \psi}$. It only remains to calculate $\partial_{\psi} H$. To calculate this term, it can be done analytically using the (1) model. One can also use a heavy formalism like automatic differentiation [6, 47]. The following section 3 allows us to easily obtain H_{ψ} whatever our function \mathcal{H} is.

3 Hadamard Approach

The morphodynamic model presented above is mainly based on the variation of the water height with respect to the shape H_{ψ} . Its calculation was initially performed analytically using simple hydrodynamic models. However, Hadamard's approach allows to obtain a calculation of H_{ψ} in a numerical way. The interest of such an approach is to obtain a general morphodynamic model which can be used with the majority of hydrodynamic models or even hydrodynamic calculation codes.

3.1 Theory

For this approach, we will use the approach described in [48, 49]. We consider $\nabla_{\psi} H$ in the sense of Hadamard following the definition:

$$\nabla_{\psi} H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \vec{n}) - H(\psi)] \right) \quad (7)$$

where \vec{n} is the normal to the shape ψ .

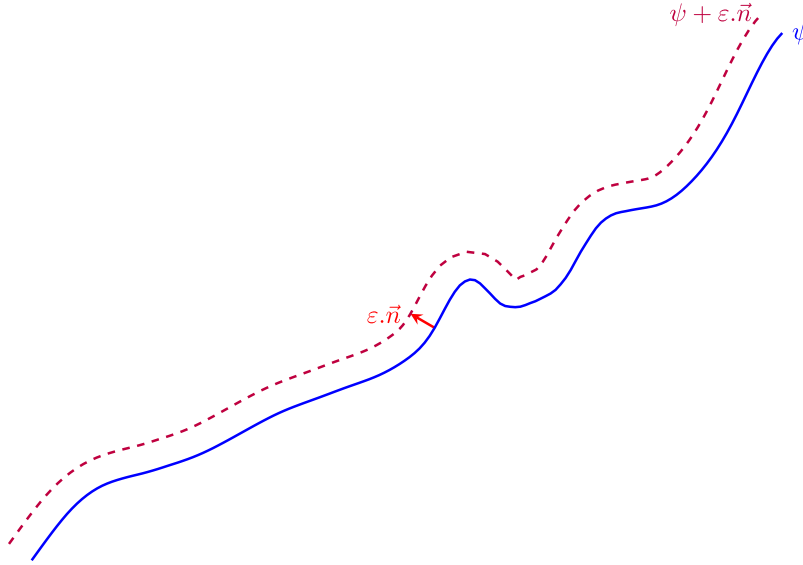


Fig. 6 Illustration of a realistic bathymetry ψ and $\psi + \varepsilon \vec{n}$

At order 1 we will consider the following approximation:

$$\nabla_{\psi} H \approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [H(\psi) + \varepsilon \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} - H(\psi)] \right) \quad (8)$$

with $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Then, we will check the relevance of the following relationship:

$$\boxed{\nabla_{\psi} H \approx \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}}. \quad (9)$$

Let us illustrate this development with simple examples.

We consider the relation $H = \psi^2$ describing the water height of the swell. We pose in a general way $\psi = \{(x, y) \in R^2 \mid y - f_{\psi}(x) = 0\}$ the space of ψ with f_{ψ} the function describing the bottom.

3.2 Analytical examples

3.2.1 Flat form

The flat form $\psi = \{(x, y) \in R^2 \mid y - c = 0\}$ deformed from $\varepsilon \vec{n}$ is given by $\psi + \varepsilon \vec{n} = \{(x, y) \in R^2 \mid y - c - \varepsilon = 0\}$

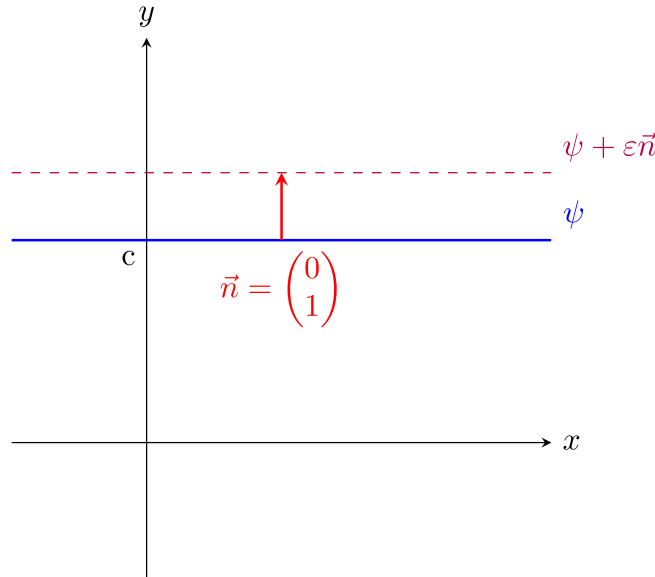


Fig. 7 Illustration de ψ et $\psi + \varepsilon \vec{n}$ avec la fonction $\psi : x \rightarrow c$

Here we have:

$$\psi = \{(x, y) \in R^2 \mid y - c = 0\}$$

$$H = \psi^2 = \{(x, y) \in R^2 \mid y - c^2 = 0\}$$

then, we have, thank to the definition, on the one hand:

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi} H &\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \vec{n}) - H(\psi)] \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [\cancel{\psi^2} + 2\psi\varepsilon + \underbrace{\varepsilon^2}_{\rightarrow 0} - \cancel{\psi^2}] \right) \quad \text{because} \quad H(\psi + \varepsilon \vec{n}) = (\psi + \varepsilon)^2 \end{aligned}$$

$$= 2\psi$$

on the other hand:

$$\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} = 2\psi \overrightarrow{\nabla_X(\psi)} \cdot \vec{n} = 2\psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\psi \quad (10)$$

and therefore

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} = \nabla_\psi H = 2\psi} \quad (11)$$

3.2.2 Linear form with $H = \cos(\psi)$

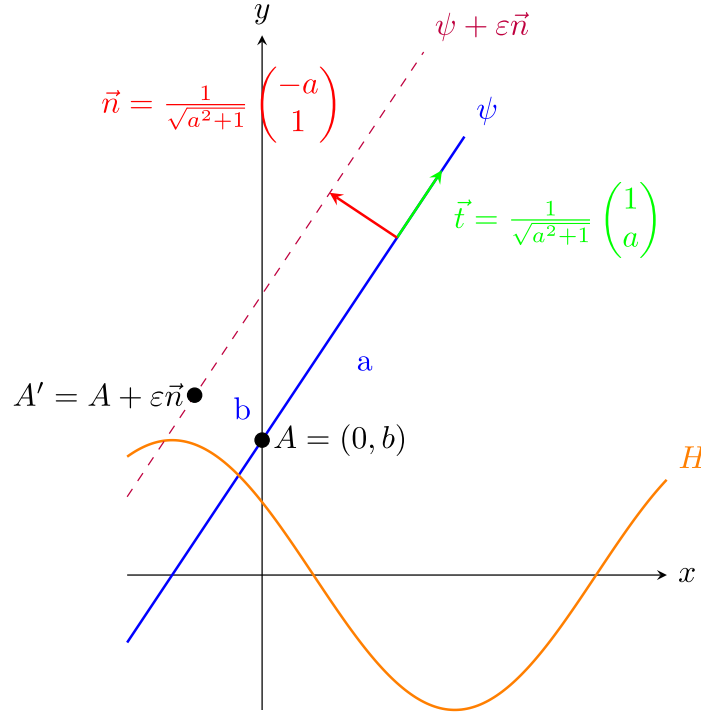


Fig. 8 Illustration de ψ , $\psi + \varepsilon \vec{n}$ et \mathcal{H} avec la fonction $\psi : x \rightarrow ax + b$ et $H = \cos(\psi)$

The linear form $\{\psi = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - ax - b = 0\}$ deformed by $\varepsilon \vec{n}$ is given by $\psi + \varepsilon \vec{n}$. We know that the point $A(0, b)$ is contained on the line. The point $A' = A + \varepsilon \vec{n}$ is therefore contained on the new translated line. We deduce rapidly the equation:

$$\psi + \varepsilon \vec{n} = ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b \quad (12)$$

Let us check the equality (8) for $H = \cos(\psi)$. On the one hand, we have:

$$\begin{aligned} \nabla_\psi H &\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \vec{n}) - H(\psi)] \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [\cos(ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b) - \cos(ax + b)] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [\cos(ax+b) \underbrace{[\cos(\varepsilon\sqrt{a^2+1}) - 1]}_{\rightarrow 1 - \varepsilon^2(a^2+1)} - \sin(ax+b) \underbrace{\sin(\varepsilon\sqrt{a^2+1})}_{\rightarrow \varepsilon\sqrt{a^2+1}}] \right) \\
&\approx \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\underbrace{-\cos(ax+b)\varepsilon(a^2+1)}_{\rightarrow 0} - \sin(ax+b)\sqrt{a^2+1} \right) \\
&= -\sin(\psi)\sqrt{a^2+1}
\end{aligned}$$

On the other hand, we have:

$$\overrightarrow{\nabla_X H} = -\sin(\psi)\nabla_X \psi = -\sin(\psi) \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

and therefore:

$$\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} = -\frac{\sin(\psi)}{\sqrt{a^2+1}} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = -\sin(\psi) \frac{(a^2+1)}{\sqrt{a^2+1}} = -\sin(\psi)\sqrt{a^2+1} \quad (14)$$

The equality: $\boxed{\nabla_\psi H = \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}}$ is thus verified.

3.2.3 Numerical verification

The approximation (9) can be verified by calculating numerically the solution of the problem 3.2.2. We calculate the error for points corresponding to a spatial step $\Delta x = [10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1]$ and we obtain the following curve:

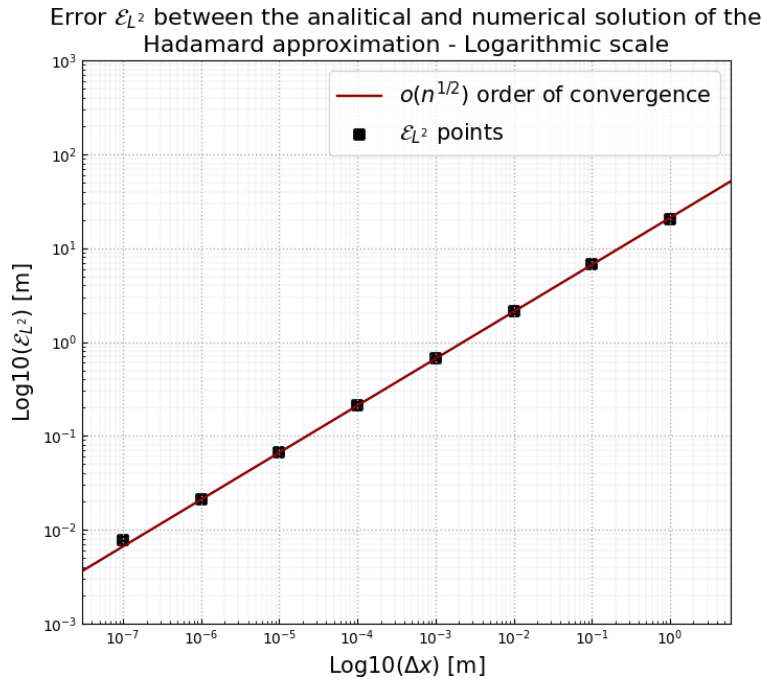


Fig. 9 L2 error and order of convergence for a comparison between the analytical solution of the simple problem 3.2.2 with $H = \cos(\psi)$

The sources of error for this calculation could be: the approximation in the calculation of the vector \vec{n} (in this case, it is null in our case because ψ is linear); the computation of the gradient by finite differences.

3.2.4 Verification of the numerical solution on OptiMorph

To implement it on our code, we simply need to use the equation (9) with:

$$\vec{\nabla}_X H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial \psi} \right) \text{ and } \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{d\psi^2 + dx^2}} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix} \text{ and we obtain:}$$

$$\boxed{\nabla_\psi H \approx \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left[-\frac{dH}{dx} d\psi + \frac{dH}{d\psi} dx \right]} \quad (15)$$

By implementing this equation in OptiMorph, we can compare the different values of $\nabla_\psi H$ using the simple shoaling model presented in (1) and get for example the following curve:

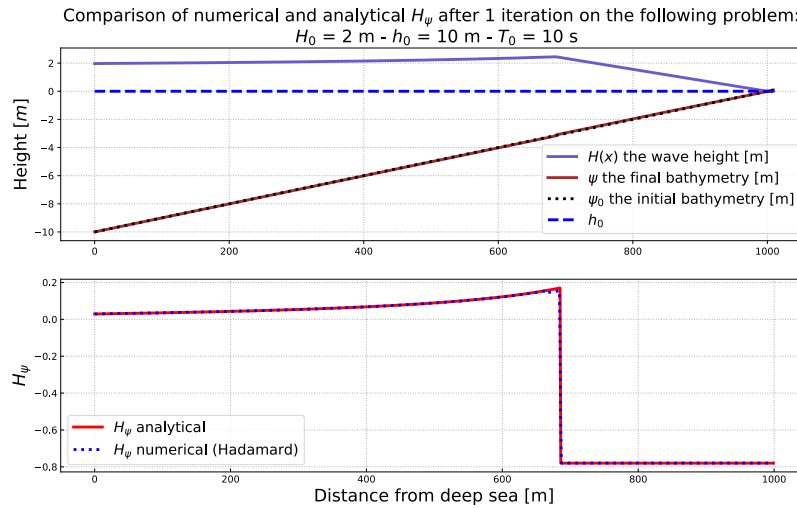


Fig. 10 Comparison of H_ψ with my method of OptiMorph and that of Hadamard

In this case, we notice that the approximation is very good. There is still one point that has a defect in the non-linearity at $x = 670\text{ m}$. However, this will not affect the morphodynamic results.

4 Application with the Hadamard Approach

Contrary to the *OptiMorph 2021* model from section 2 which was dependent on the hydrodynamic model (figure 2). Hadamard's approach allowed us to couple any hydrodynamic model to our morphodynamic model: as we can see on the figure 11.

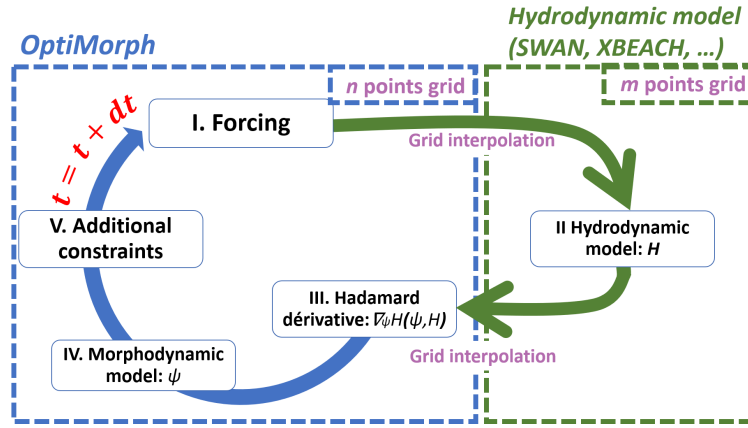


Fig. 11 OptiMorph workflow coupled with hydrodynamic model

4.1 Application in open Sea

Trying the program, we can quickly present a morphological result obtained by coupling OptiMorph with SWAN.

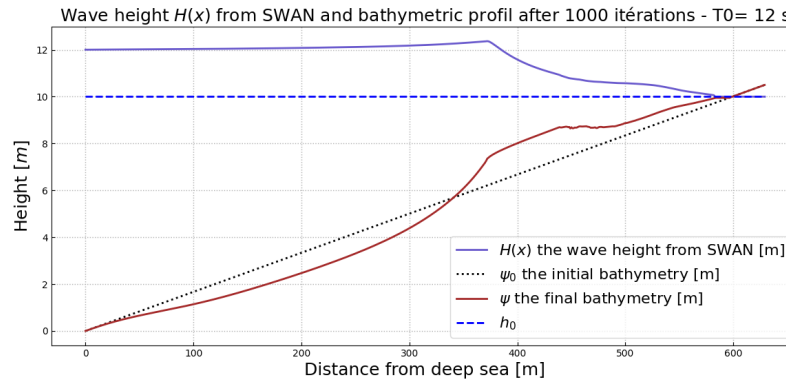


Fig. 12 Linear Bathymetry with $T_0 = 12$ s wave period

Here, we have a result which seems quite coherent insofar as the bar is formed at the level of the wave breaking: where the energy of this one dissipates on the bottom.

5 Discussion

Ut interdum nisi porttitor, consequat nunc imperdiet, sagittis nisi. Curabitur a auctor mauris. Sed non mi eget purus tincidunt dignissim. Pellentesque ultrices ante sed urna convallis varius. Vivamus non tempus lectus, nec hendrerit tortor. Nullam ultricies, nunc id ultrices pretium, sapien arcu dignissim augue, a pellentesque turpis sem et lacus. Pellentesque interdum lorem orci, vel elementum tortor consectetur vitae. Sed tristique sed justo vel dictum. Vestibulum placerat dolor augue, in ornare diam porta at. In blandit interdum velit et maximus. Praesent felis enim, iaculis sit amet lectus sed, consectetur commodo

ante. Mauris eu sem eu justo maximus efficitur. Suspendisse vel velit vel odio commodo pharetra.

6 Conclusions

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nullam elit orci, condimentum nec mi tristique, pulvinar dictum est. Phasellus eleifend blandit enim, eu pretium eros iaculis ut. Sed nisi augue, semper quis rutrum id, ultricies a erat. Phasellus convallis blandit orci, sit amet euismod velit ornare ac. Donec mi risus, volutpat interdum dui vitae, dictum volutpat diam. Mauris lacinia turpis lacus, at fringilla turpis consectetur eu. Proin fringilla felis sed risus sodales scelerisque. In felis odio, accumsan vitae ultrices ut, porttitor non lorem.

7 Declarations

7.1 Availability of data and material

All data, models, and code generated or used during the study appear in the submitted article.

7.2 Conflict of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

7.3 Acknowledgements

This work was conducted as part as M. Dupont's PhD studies which is funded by the CNRS. We also thank to GLADYS (www.gladys-littoral.org) for their continuous logistical and financial support of academic research and applications on coastal hydrodynamics in the South of France.

References

- [1] Isèbe, D., Azérad, P., Bouchette, F., Mohammadi, B.: Design of Passive Defense Structures in Coastal Engineering. *International Review of Civil Engineering (IRECE)* **5**(2), 75 (2014). <https://doi.org/10.15866/irece.v5i2.2029>. Accessed 2022-04-01
- [2] Isebe, D., Azerad, P., Mohammadi, B., Bouchette, F.: Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact. *Coastal Engineering* **55**(1), 35–46 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2007.06.006>
- [3] Isèbe, D., Azerad, P., Bouchette, F., Ivorra, B., Mohammadi, B.: Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection. *International*



- Journal for Numerical Methods in Engineering **74**(8), 1262–1277 (2008). <https://doi.org/10.1002/nme.2209>
- [4] Bouharguane, A., Azerad, P., Bouchette, F., Marche, F., Mohammadi, B., Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université Montpellier II, 34 095 Montpellier: Low complexity shape optimization & a posteriori high fidelity validation. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B* **13**(4), 759–772 (2010). <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2010.13.759>. Accessed 2022-04-01
 - [5] Bouharguane, A., Mohammadi, B.: Minimization principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* **26**, 163–172 (2012). <https://doi.org/10.1080/10618562.2012.669831>
 - [6] Mohammadi, B., Bouharguane, A.: Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters. *Computers & Fluids* **40**(1), 291–298 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.031>. Accessed 2022-03-11
 - [7] Mohammadi, B., Bouchette, F.: Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics. *Computers and Fluids* **89**, 78–87 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.10.021>
 - [8] Mohammadi, B., Bouharguane, A.: Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters. *Computers and Fluids* **40**, 291–298 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.031>
 - [9] Cook, M., Bouchette, F., Mohammadi, B., Sprunck, L., Fraysse, N.: Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis. *China Ocean Engineering* **35**(6), 802–813 (2021). <https://doi.org/10.1007/s13344-021-0071-7>. Accessed 2022-07-20
 - [10] Cook, M.: Calcul optimal pour la modélisation de la dynamique naturelle des plages sableuses et la conception d’ouvrages de défense du littoral à faible impact anthropique. Theses, Université Montpellier (December 2021). Issue: 2021MONTG082. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03615087>
 - [11] Roelvink, D.J.A., Reniers, A., van Dongeren, A., Thiel de Vries, J., McCall, R., Lescinski, J.: Modelling storm impacts on beaches, dunes and barrier islands. *Coastal Engineering* **56**, 1133–1152 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2009.08.006>
 - [12] Zimmermann, N., Trouw, K., Wang, L., Mathys, M., Delgado, R., Verwaest, T.: Longshore transport and sedimentation in a navigation channel

- at blankenberge (belgium). Coastal Engineering Proceedings **1** (2012). <https://doi.org/10.9753/icce.v33.sediment.111>
- [13] Bugajny, N., Furmanczyk, K., Dudzinska-Nowak, J., Paplińska-Swerpel, B.: Modelling morphological changes of beach and dune induced by storm on the southern baltic coast using xbeach (case study: Dziwnow spit). Journal of Coastal Research **I**, 672–677 (2013). <https://doi.org/10.2112/SI65-114.1>
- [14] Williams, J., Esteves, L., Rochford, L.: Modelling storm responses on a high-energy coastline with xbeach. Modeling Earth Systems and Environment **1** (2015). <https://doi.org/10.1007/s40808-015-0003-8>
- [15] Booij, N., Holthuijsen, L., Ris, R.: The” swan” wave model for shallow water. In: Coastal Engineering 1996, pp. 668–676 (1996)
- [16] de Vriend, H., Bakker, W.T., Bilsse, D.P.: A morphological behaviour model for the outer delta of mixed-energy tidal inlets. Coastal Engineering **23**, 305–327 (1994). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(94\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0378-3839(94)90008-6)
- [17] Gravens, M.: An approach to modeling inlet and beach evolution, pp. 4477–4490 (1997). <https://doi.org/10.1061/9780784402429.348>
- [18] Kana, T., Hayter, E.J., Work, P.: Mesoscale sediment transport at south-eastern u.s. tidal inlets: conceptual model applicable to mixed energy settings. Journal of Coastal Research **15**, 303–313 (1999)
- [19] Ruessink, G., Terwindt, J.H.J.: The behaviour of nearshore bars on the time scale of years: A conceptual model. Marine Geology **163**, 289–302 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0025-3227\(99\)00094-8](https://doi.org/10.1016/S0025-3227(99)00094-8)
- [20] Larson, M., Kraus, N.: Sbeach: Numerical model for simulating storm-induced beach change. report 1. empirical foundation and model development. Technical report, DEPARTMENT OF THE ARMY US Army Corps of Engineers, Washington, DC, USA (July 1989)
- [21] Larson, M., Kraus, N., Byrnes, M.: Sbeach: Numerical model for simulating storm-induced beach change. report 2. numerical formulation and model tests. Technical report, DEPARTMENT OF THE ARMY US Army Corps of Engineers, Washington, DC, USA (May 1990)
- [22] Nairn, R., Southgate, H.: Deterministic profile modelling of nearshore processes. part 2. sediment transport and beach profile development. Coastal Engineering **19**, 57–96 (1993). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(93\)90019-5](https://doi.org/10.1016/0378-3839(93)90019-5)

- [23] Fleming, C., Hunt, J.: Application of sediment transport model, pp. 1184–1202 (1977). <https://doi.org/10.1061/9780872620834.070>
- [24] Latteux, B.: Harbour design including sedimentological problems using mainly numerical technics, pp. 2213–2229 (1980). <https://doi.org/10.1061/9780872622647.133>
- [25] Coeffe, Y., Pechon, P.: Modelling of sea-bed evolution under waves action. Proc. 18th ICCE **1** (1982). <https://doi.org/10.9753/icce.v18.71>
- [26] Yamaguchi, M., Nishioka, Y.: Numerical simulation on the change of bottom topography by the presence of coastal structures, pp. 1732–1748 (1985). <https://doi.org/10.1061/9780872624382.118>
- [27] Watanabe, A., Maruyama, K., Shimizu, T., Sakakiyama, T.: Numerical prediction model of three-dimensional beach deformation around a structure. Coastal Engineering Journal **29**, 179–194 (1986). <https://doi.org/10.1080/05785634.1986.11924437>
- [28] Maruyama, K., Takagi, T.: A simulation system of near-shore sediment transport for the coupling of the sea-bottom topography, waves and currents. Proc. IAHR Symp. Math. Mod. Sed. Transp. Coastal Zone, 300–309 (1988)
- [29] Wang, H., Miao, G., Lin, L.-H.: A time—dependent nearshore morphological response model, pp. 2513–2527 (1993). <https://doi.org/10.1061/9780872629332.192>
- [30] Johnson, H., Brøker, I., Zyserman, J.: Identification of some relevant processes in coastal morphological modelling, pp. 2871–2885 (1995). <https://doi.org/10.1061/9780784400890.208>
- [31] Nicholson, J., Brøker, I., Roelvink, D.J.A., Price, D., Tanguy, J.-M., Moreno, L.: Intercomparison of coastal area morphodynamic models. Coastal Engineering - COAST ENG **31**, 97–123 (1997). [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(96\)00054-3](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(96)00054-3)
- [32] Roelvink, J.A., Van Banning, G.K.F.M., Verwey, A.: Design and development of delft3d and application to coastal morphodynamics, 1st international conference, hydroinformatics 94. In: Hydroinformatics 94, HYDROINFORMATICS -PROCEEDINGS-, 1st International Conference, Hydroinformatics 94, vol. 1, pp. 451–456. Balkema, Rotterdam (1994)
- [33] Lesser, G.R., Roelvink, D.J.A., Kester, J.A.T.M., Stelling, G.: Development and validation of a three-dimensional morphological model. Coastal Engineering **51**, 883–915 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng>

2004.07.014

- [34] Roelvink, D.J.A., Walstra, D.-J., Chen, Z.: Morphological modelling of keta lagoon case, pp. 3223–3236 (1995). <https://doi.org/10.1061/9780784400890.233>
- [35] Briand, M.-H., Kamphuis, J.W.: Sediment transport in the surf zone: A quasi 3-d numerical model. *Coastal Engineering* **20**, 135–156 (1993). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(93\)90058-G](https://doi.org/10.1016/0378-3839(93)90058-G)
- [36] Zyserman, J., Johnson, H.: Modelling morphological processes in the vicinity of shore-parallel breakwaters. *Coastal Engineering* **45**, 261–284 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(02\)00037-6](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(02)00037-6)
- [37] Ding, Y., Wang, S., Jia, Y.: Development and validation of a quasi-three-dimensional coastal area morphological model. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering* **132**, 462–476 (2006). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(2006\)132:6\(462\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(2006)132:6(462))
- [38] Droenen, N., Deigaard, R.: Quasi-three-dimensional modelling of the morphology of longshore bars. *Coastal Engineering* **54**, 197–215 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2006.08.011>
- [39] Soulsby, R.L.: Calculating bottom orbital velocity beneath waves. *Coastal Engineering - COAST ENG* **11**, 371–380 (1987). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(87\)90034-2](https://doi.org/10.1016/0378-3839(87)90034-2)
- [40] Reineck, H.-E., Singh, I.B.: *Depositional Sedimentary Environments; with Reference to Terrigenous Clastics* [by] H.-E. Reineck [and] I. B. Singh, p. 439. Springer, (1973)
- [41] Murray, A.B.: Reducing model complexity for explanation and prediction. *Geomorphology* **90**(3), 178–191 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2006.10.020>. Reduced-Complexity Geomorphological Modelling for River and Catchment Management
- [42] Dean, R., Dalrymple, R.: *Coastal processes with engineering applications*. *Coastal Processes with Engineering Applications*, by Robert G. Dean and Robert A. Dalrymple, pp. 487. ISBN 0521602750. Cambridge, UK: Cambridge University Press, March 2004. (2004)
- [43] Munk, W.: The solitary wave theory and its application to surf problems. *Annals of the New York Academy of Sciences* **51**, 376–424 (1949). <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1949.tb27281.x>
- [44] Beakawi Al-Hashemi, H.M., Baghabra Al-Amoudi, O.S.: A review on the angle of repose of granular materials. *Powder Technology* **330**, 397–417



- (2018). <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.02.003>
- [45] Hattori, M., Kawamata, R.: Onshore-Offshore Transport and Beach Profile Change, pp. 1175–1193 (1980). <https://doi.org/10.1061/9780872622647.072>
- [46] Quick, M.: Onshore-offshore sediment transport on beaches. *Coastal Engineering* **15**, 313–332 (1991)
- [47] Hascoet, L., Pascual, V.: Tapenade user’s guide. In: INRIA Technical Report, pp. 1–31. INRIA, (2004)
- [48] Mohammadi, B.: Global optimization, level set dynamics, incomplete sensitivity and regularity control. *International Journal of Computational Fluid Dynamics* **21**(2), 61–68 (2007). <https://doi.org/10.1080/10618560701455855>. Accessed 2022-09-09
- [49] Mohammadi, B.: Hadamard incomplete sensitivity and shape optimization. *Control and Cybernetics* **39**(3), 615–626 (2010)



1.2 2022: Pre-submit: Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization [2]

Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization

Ronan Dupont^{1,2,3*}, Megan Cook^{1,2,3†}, Frédéric Bouchette^{1,3†}, Bijan Mohammadi^{2,3†} and Sammuel Meule^{1,3†}

¹*GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France.

²IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France.

³GLADYS, Univ Montpellier, Le Grau-du-Roi, France.

*Corresponding author(s). E-mail(s):

ronan.dupont@umontpellier.fr;

Contributing authors: megan.cook@umontpellier.fr;

frederic.bouchette@umontpellier.fr;

bijan.mohammadi@umontpellier.fr; meule@cerege.fr;

[†]These authors contributed equally to this work.

Abstract

This paper focuses on a new approach to describe coastal morphodynamics, based on optimization theory, and more specifically on the assumption that a sandy seabed evolves in order to minimize a wave-related function, the choice of which depends on what is considered the driving force behind the coastal morphodynamic processes considered. The numerical model derived from this theory uses a gradient descent method and allows us to account for physical constraints such as sand conservation in basin experiments. Hence, the model automatically adapts to either basin or open sea settings and only involves two hyper-parameters: sand abrasion and the critical angle of repose. The Opti-Morph model is illustrated on a flume configuration. Comparison of the resulting seabed with experimental data as well as the results of the widely distributed coastal morphodynamic software XBeach demonstrates the potential of a model by wave energy minimization.

Keywords: Hydro-morphodynamics, Optimization, Model validation, Coastal, Variational approach, Energy minimization, Optimal transport, Waves.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



1 Introduction

Optimization theory is the study of the evolution of a system while searching systematically for the minimum of a function derived from physical properties of the system. In this paper, we have applied this approach to coastal dynamics, with our primary objective to simulate the interactions between the waves and seabed. Continuing the work of [1–9] and using mathematical optimization theory, we have designed a model that describes the evolution of the seabed while taking into account the coupling between morphodynamic and hydrodynamic processes. This study focuses on a theoretical and numerical approach to the modeling of this coupling, based on the assumption that the seabed adapts to minimize a certain wave-related function. The choice of this function determines the driving force behind the morphological evolution of the seabed. This optimization problem is subjected to a certain number of constraints, allowing for a more accurate description of the morphodynamic evolution.

This study is accompanied by the development of a numerical hydro-morphodynamic model, which has the advantages of being fast, robust, and of low complexity. The model was given the name *Opti-Morph*.

The paper starts with a description of the simple hydrodynamic model used to calculate the driving forces behind the morphodynamic processes. Then, we provide a description of the morphodynamic model (Opti-Morph) based on wave-energy minimization. With the purpose of validating Opti-Morph, we compare the results of the numerical simulation with that of experimental data acquired in a flume experiment. We also compared the model to another nearshore hydro-morphodynamic model, XBeach [10], to see how it fares against existing hydro-morphodynamic models, XBeach being considered to be quite a reputable model in the coastal dynamic community [11–13].

1.1 State of the Art

Numerical models of morphodynamic processes are seen as a valuable tool for understanding and predicting the evolution of the sediment and morphology over time in coastal areas. Different morphodynamic models exist in the literature, ranging from empirical models [14–17] to process-based models. The latter can be sorted into several categories, such as i) profile evolution models [18–20], which use only cross-shore transport, ii) 2D morphological models [10, 21–29], which use depth-averaged wave and current equations to model the sediment transport while neglecting the vertical variations of wave-derived parameters, as well as iii) 3D and quasi-3D models [30–36], which determine the sediment evolution using both horizontal and vertical variations of the wave-derived parameters.

The Opti-Morph model described in this paper is based on optimal control. In the past, the use of optimization theory has primarily been used in the design of coastal defense structures, whether in the design of ports and offshore breakwaters [2, 3].



Optimal control has already been envisaged for the modeling of shallow water morphodynamics, based on the assumption that the seabed acts as a flexible structure and adapts to a certain hydrodynamic quantity [4, 8]. These pioneering studies were based on somewhat theoretical developments with no direct relationship with real case studies. In this work, we continue along with the objective of producing a physically robust numerical morphodynamic model based on optimal control and validating it using experimental and numerical data.

1.2 Hypotheses

Opti-Morph is based on a certain number of assumptions. Since the model is based on the minimization of a cost function, certain hypotheses must be made regarding the choice of this function. This function, which originates from a physical quantity, must be directly linked to the elevation of the seabed. At present, we set the quantity to be minimized as the energy of shoaling waves. This implies that the seabed reacts to the state of the waves by minimizing the energy of shoaling waves. Other assumptions assess the behavior of seabed and originate from general observations. Sediment transport is influenced by the orbital velocity of water particles [37], which leads to greater sediment mobility in shallower waters. Another natural observation concerns the slope of the seabed, which cannot be overly steep without an avalanching process occurring [38]. Last, in an experimental flume configuration, the quantity of sand must remain constant over time, with no inflow or outflow of sand to alter the sand stock.

2 Theoretical Developments

2.1 Modeling Framework

For the sake of simplicity, we present the principle of morphodynamics by optimization in a one-dimensional setting. This enables us to compare the numerical results based on this theory with experimental flume data. However, no assumptions were made regarding the dimension of the problem, and as a result, it is straightforward to extend this theory to a two-dimensional configuration.

We consider a coordinate system composed of a horizontal axis x and a vertical axis z . We denote $\Omega := [0, x_{\max}]$ the domain of the cross-shore profile of the active coastal zone, where $x = 0$ is a fixed point in deep water where no significant change in bottom elevation can occur, and x_{\max} is an arbitrary point at the shore beyond the shoreline, as shown by Figure 1. The elevation of the seabed is a one-dimensional positive function, defined by: $\psi : \Omega \times [0, T] \times \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$ where $[0, T]$ is the duration of the simulation (s) and Ψ is the set of physical parameters describing the characteristics of the seabed. In order to model the evolution over time of ψ and given the assumption that the seabed ψ changes

over time in response to the energy of shoaling waves, a description of the surface waves is needed.

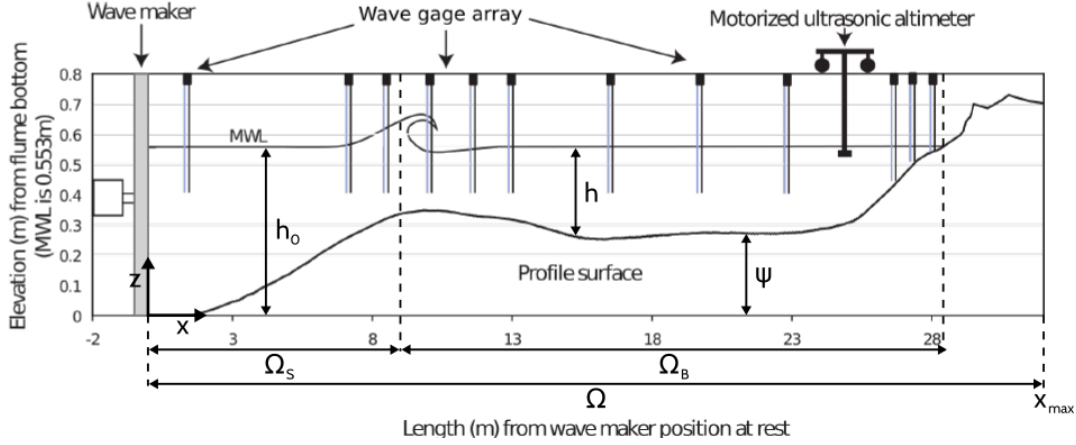


Fig. 1 Diagram of a cross-shore profile in the case of an experimental flume.

2.2 Hydrodynamic Model

The literature on hydrodynamic models is vast [39]. However, our main focus in this work is a) on the morphodynamic part of the approach and b) on providing evidence of the ability of optimization to perform robust morphodynamic prediction even under weakly constrained hydrodynamics. So we present the procedures with a hydrodynamic model as simple as possible, that is based on the linear wave theory [40], a very basic shoaling equation and some geometrical breaking parameter. It has the advantage of being easy to differentiate compared to more sophisticated models that would need automatic differentiation [6, 41] or huge additional numerical developments. This numerical implementation has a significantly short run-time as shown by the convergence results of the section 4.1. This model has the advantage of expressing wave height as an explicit function of the seabed, which leads to rapid calculations of the morphodynamic model.

Let h be the depth of the water from a mean water level h_0 (cf. Figure 1). Ocean waves, here assumed monochromatic, are characterized by phase velocity C , group velocity C_g , and wave number k , determined by the linear dispersion relation (1), where σ is the pulsation of the waves and g is the gravitational acceleration.

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (1)$$

We define Ω_S as the time-dependent subset of Ω over which the waves shoal and Ω_B the subset of Ω over which the waves break, cf. Figure 1. Munk's breaking criterion [42] enables us to define $\Omega_S(t) = \left\{ x \in \Omega, \frac{H(x,t)}{h(x,t)} < \gamma \right\}$ and $\Omega_B(t) = \left\{ x \in \Omega, \frac{H(x,t)}{h(x,t)} \geq \gamma \right\}$, where γ is a wave breaking index.

Then we have

$$H(x, t) = H_0(t)K_S(x, t) \quad (2)$$

The height of the waves H over the cross-shore profile is inspired by the shoaling equation (2), where $H_0(t)$ is the deep water wave height and K_S is a shoaling coefficient, given by

$$K_S = \left(\frac{1}{2} \frac{C_0}{C_g} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

where C_0 is the deep water wave velocity, and:

$$n = \frac{C}{C_g}, \quad C = C_0 \tanh(kh), \quad C_g = \frac{1}{2} C \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right). \quad (4)$$

Instead of considering that waves depend solely on offshore wave height H_0 , this model suggests that shoaling waves are decreasingly influenced by seawards waves. The greater the distance, the less effect it has on the present wave height. As such, we introduce a weighting function w . Assuming that the maximal distance of local spatial dependency of a wave is denoted d_w , the weighting function over the maximal distance d_w is given by $w : [0, d_w] \rightarrow \mathbb{R}^+$ such that $w(0) = 1$, $w(d_w) = 0$ and decreases exponentially.

Equation (2) for shoaling wave height becomes equation (5), where H_0^w is defined by (6).

$$H(x, t) = H_0^w(x, t)K_S(x, t) \quad (5)$$

$$H_0^w(x, t) = \frac{1}{\int_{x-X}^x w(x-y)dy} \int_{x-X}^x w(x-y)H(y)K(y)dy \quad (6)$$

Equation (5) applies only to the shoaling, nearshore-dependent waves of Ω_S , significant wave height over the cross-shore profile $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ is defined by (7), where $\alpha(x) = \frac{x}{d_w}$ over $[0, d_w]$ to allow a smooth transition between offshore and nearshore-dependent waves.

$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha(x))H_0(t) + \alpha(x)H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases} \quad (7)$$

2.3 Morphodynamic Model by Wave Energy Minimization

The evolution of the seabed is assumed to be driven by the minimization of a cost function J . Recalling the hypotheses made in Section 1.2, the shape

of the seabed is determined by the minimization of the potential energy of shoaling waves, for all $t \in [0, T]$:

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}] \quad (8)$$

where H denotes the height of the waves over the cross-shore profile, ρ_w is water density ($kg.m^{-3}$), and g is the gravitational acceleration ($m.s^{-2}$). In order to describe the evolution of the seabed, whose initial state is given by ψ_0 , we assume that the seabed ψ , in its effort to minimize J , verifies the following dynamics:

$$\begin{cases} \psi_t = \Upsilon \Lambda d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad (9)$$

where ψ_t is the evolution of the seabed over time [$m.s^{-1}$], Υ is the abrasion of sand ($m.s.kg^{-1}$), Λ is the excitation of the seabed by the water waves, and d is the direction of the descent, which indicates the manner in which the seabed changes. The approach involves two parameters with clear physical interpretation. The first Υ takes into account the physical characteristics of the sand and represents the mobility of the sediment. At the present time, we consider Υ to be a measure of sand mobility expressed in $m.s.kg^{-1}$. Further explanation of the nature of this parameter will be given at a later stage of the model's development. The second parameter Λ is a local function which represents the influence of the water depth on the seabed and is defined using the term describing the vertical variation of the classic velocity potential of the linear wave theory [37]:

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))} \end{aligned} \quad (10)$$

In unconstrained circumstances, for instance, if a total sand volume constraint does not need to be enforced, we set $d = -\nabla_\psi J$, which indicates a direction for local minimization of J with regards to ψ . The calculation of $\nabla_\psi J$ is described in Appendix A.1. However, constraints are added to the model to incorporate more physics and deliver more realistic results. Driving forces behind the morphological evolution of the seabed are described by the minimization of the cost function J . Secondary processes are expressed by constraints. In the interest of simplicity, we have adopted two physical constraints though more can be introduced if necessary. The first concerns the slope of the seabed. Depending on the composition of the sediment, the slope of the seabed is bounded by a grain-dependent threshold M_{slope} [40]. This is conveyed by the following constraint on the local bathymetric slope:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}} \quad (11)$$

The dimensionless parameter M_{slope} represents the critical angle of repose of the sediment, and varies between 0.2 and 0.6 [43].

A second example concerns the sandstock in the case of an experimental flume. This constraint states that the quantity of sand in a flume must be constant over time, as given by (12), contrarily to an open-sea simulation where sand can be transported between the onshore and the offshore zones [44, 45].

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T] \quad (12)$$

This constraint is necessary for verifying and validating the numerical model with physical simulations.

3 Numerical Application

In this section, we present the numerical results produced by the Opti-Morph model. For validation purposes, the resulting seabed is compared to experimental data acquired during a flume tank experiment. We also conduct a comparative analysis between the physical seabed, the seabed produced by Opti-Morph and the seabed produced by XBeach, with the aim of assessing how Opti-Morph holds up against existing hydro-morphodynamic models. A brief description of the experiment is provided, as well the XBeach model.

3.1 Description of the Experiment

The experimental observations presented here were collected as part of the COPTER project and a series of laboratory wave-flume experiments were performed in order to investigate the morphodynamic impact of introducing solid geotextile tubes to the Hatzuk (Israel) seafloor [46]. We use the data collected without tubes to describe the natural evolution of the seabed over time.

A glass flume measuring 36 m long, 0.55 m wide and 1.3 m deep is equipped with a wave-maker and gauges measuring the height of the water. Artificial particles are placed inside the flume representing the mobile sea bottom and an ultrasonic gauge is used to measure the sedimentary topography.

The experimental seabed, described in Figure 1 is subjected to a series of 30-minute storm climates, among which a typical moderate storm event (at the scale of the flume) with a significant wave height and period of $H_s = 135 \text{ mm}$ and $T_s = 2.5 \text{ s}$. Time and length scale ratio are set to 1/3 and 1/10 respectively to that of the field.

3.2 XBeach Model

XBeach is an open-source process-based model developed by Deltares, UNESCO-IHE, and Delft University of Technology to simulate the hydro-morphodynamic processes in coastal areas [10–13].

In brief, XBeach uses four interconnected modules to model near-shore processes [47]. The two hydrodynamic modules consist of the short wave module



and the flow module. The first is based on wave action equations [48], and incorporates breaking, dissipation [49], and wave current interactions, while the latter is governed by shallow water equations [50, 51]. One of the two morphodynamic modules is the sediment transport module based on the equilibrium sediment concentration equation [52] and a depth-averaged advection-diffusion equation [53]. The other is the morphology module which concerns seabed transformations such as the evolution of the seabed and avalanching.

In order to configure the XBeach model for the experimental flume setting, we refer to the XBeach user manual [54]. The domain Ω is defined over 32 m with a uniform subdivision of 320 cells. The incoming wave boundary condition is provided using a JONSWAP wave spectrum [55], with a significant wave height of $H_{m0} = 0.015\text{ m}$ and a peak frequency at $f_p = 0.4\text{ s}^{-1}$. The breaker model uses the Roelvink formulation [49], with a breaker coefficient of $\gamma = 0.4$, a power $n = 15$, and a wave dissipation coefficient of 0.5. These parameters were calibrated using the hydrodynamic data produced during the physical flume experiment. Concerning sediment parameters, the $D50$ coefficient is set as 0.0006, and the porosity is 2650 kg.m^{-3} . No other parameters such as bed friction or vegetation were applied. The model is set to run for a period of 1800 s, as a short-term simulation.

3.3 Hydrodynamic Validation

This section is devoted to the comparison of the two numerical hydrodynamic models to the experimental wave data obtained in the experimental flume of Section 3.1. Mean wave height profiles were calculated over the short-term storm simulation, for both Opti-Morph and XBeach, and compared to the mean wave height of the experimental model. The latter was calculated using the measures taken by the gauges of the flume.

Figure 2 shows that the hydrodynamic module of both Opti-Morph (red) and XBeach (blue) are both comparable with respect to the experimental measurements (green) excluding, as is often the case, the second point at $x = 6\text{ m}$. XBeach demonstrates a close qualitative fit over the 10-22 m section of the flume, whereas Opti-Morph excels at the coast (21-27 m), with a near-perfect fit with the experimental data. Despite the simplicity of the hydrodynamic model used by Opti-Morph, the resulting wave height is of the same order of magnitude over the cross-shore profile than that measured during the flume experiment, which indicates that the resulting seabeds are comparable with regard to the forcing energy driving the morphodynamic response.

3.4 Numerical Results of the Morphodynamic Simulations

The Opti-Morph model was applied to the configuration of the COPTER experiment of Section 3.1, and the resulting beach profile is shown by the red profile, in Figure 3.A. The main observation is the decrease of 2.5 cm in height of the sandbar, at $x = 9\text{ m}$. We observe a slight decrease of the seabed adjacent

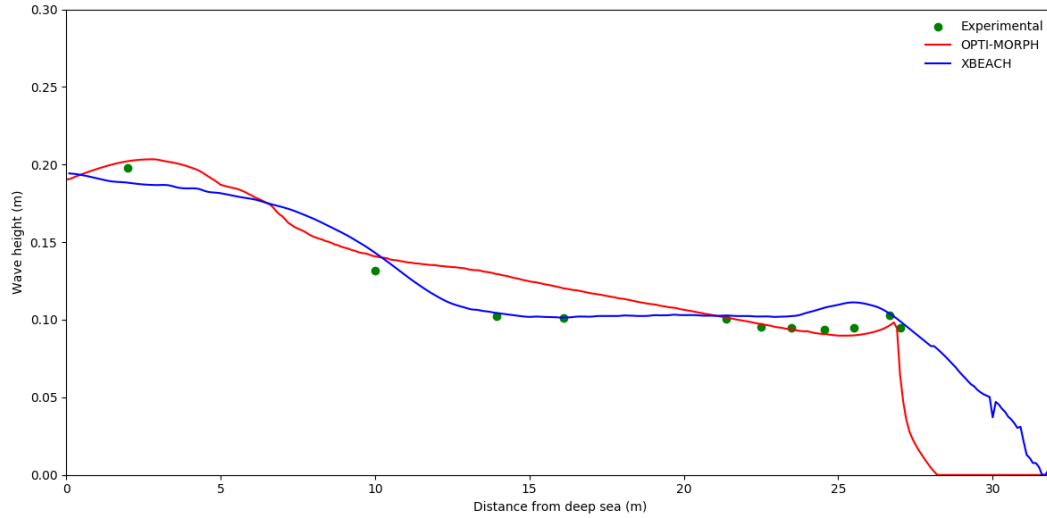


Fig. 2 Comparison of mean wave height over a storm simulation. The green points correspond to the mean wave height provided by the gauges of the flume experiment. The mean wave height determined by Opti-Morph (red) and XBeach (blue) also appears. The non-zero wave height beyond the shoreline as presented by XBeach is due to wave set-up, which Opti-Morph does not handle.

to the wave-maker, and a slight increase at the plateau, situated at 15–25 *m*. No mobility is observed at the coast.

When comparing the results provided by Opti-Morph (red), with that of XBeach (blue) and the experimental data (green), as shown on Figure 3.A, we observe that the red seabed profile provided by the Opti-Morph model shows a general quantitative agreement when compared to the experimental data, as does the XBeach morphological module. In fact, both models produce profiles close to the experimental data over the plateau located at 15–25 *m* from the wave-maker (Fig. 3.C). At the shore, Opti-Morph matches the experimental data whereas XBeach shows a vertically difference of up to 3 *cm* at $x = 27$ *m* (Fig. 3.D). Discrepancies on the part of both models occur in the area surrounding the tip of the sandbar, as both Opti-Morph and XBeach fail to predict the shoreward shift of the sandbar (Fig. 3.B); the experimental data show that the height of the sandbar remains unchanged with regards to the initial profile. Both sandbars have a height of 0.375 *m*; however, the sandbar resulting from the experimental simulation has moved towards the coast, an occurrence that neither numerical model was able to predict.

As such, this new model based on wave-energy minimization shows potential when compared to XBeach, in the case of short-term simulations.

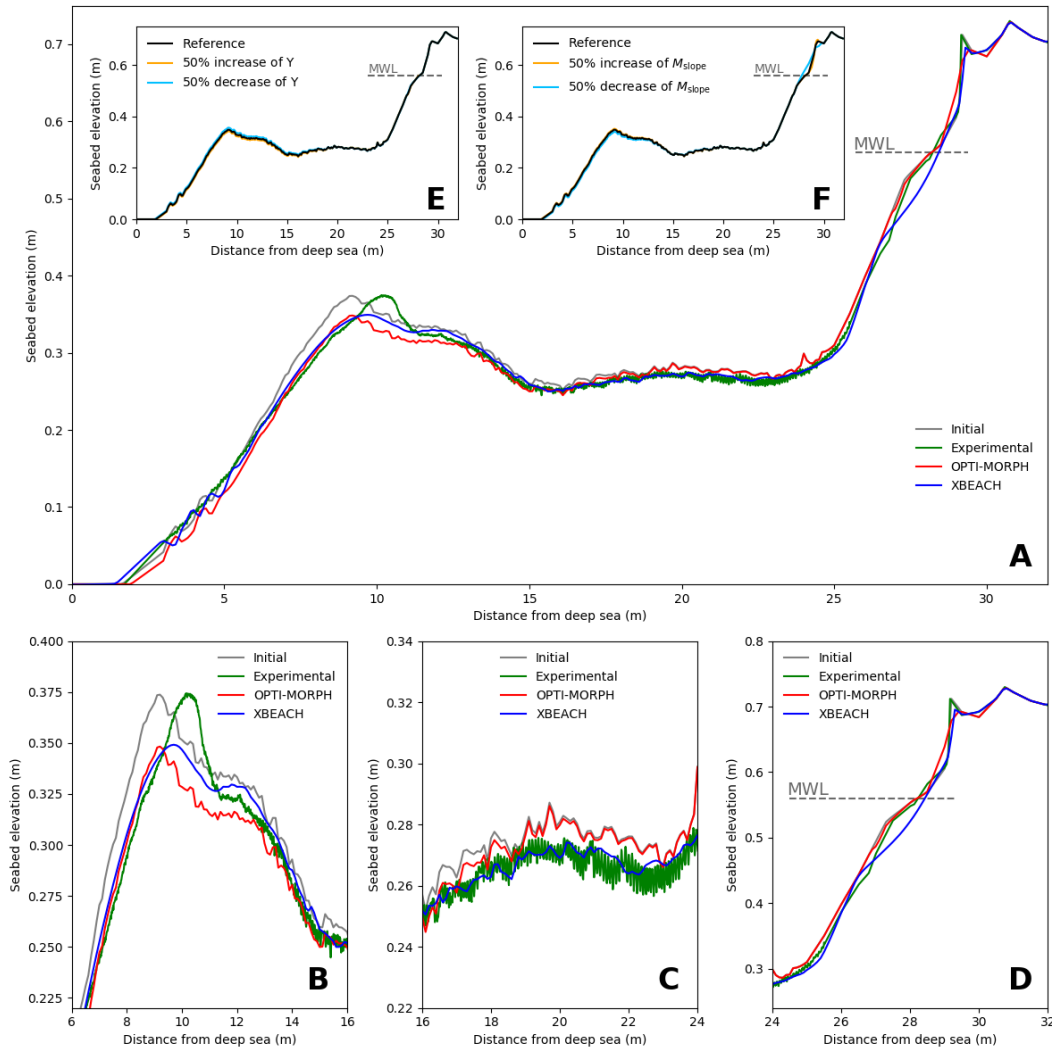


Fig. 3 **A.** Results of the numerical simulation calculated over the initial seabed (gray) using the XBeach morphodynamic module (blue) and the Opti-Morph model (red). These are compared with the experimental data acquired during the COPTER project (green). The mean water level is denoted MWL and is set at 0.56 m. **B.** Zoomed in view of the sandbar, located between 6 m and 16 m. **C.** Zoomed in view of the plateau, located between 16 m and 24 m. **D.** Zoomed in view at the shoreline, located between 24 m and 32 m. **E.** Robustness analysis of the mobility parameter Υ . The reference profile is depicted in black. The orange (resp. light blue) profile is the result of a 50% increase (resp. decrease) in mobility, with all other parameters remaining the same. **F.** Robustness analysis of the maximal sand slope parameter M_{slope} . The reference profile is depicted in black. The orange (resp. light blue) profile is the result of a 50% increase (resp. decrease) of M_{slope} , with all other parameters remaining the same.

4 Discussion

4.1 Robustness analysis of the convergence in time and space of the hydrodynamic model

We computed a reference OPTIMORPH simulation using a very small time step of 0.05 s which is much smaller than what is usually used in hydro-morphodynamic simulations. The simulation was performed with the original bathymetric profile of the COPTER experiment and the forcings of the wave maker.

This simulation provides a reference computed sea bed $\psi_{ref}(t_f, x)$ at some given time t_f . We would like to see the convergence toward this reference solution of various other OPTIMORPH simulations with different decreasing time steps. From this series of simulations, we quantify a residual error with L^2 norm as $\mathcal{E}_{L^2} = \|\psi_{ref} - \psi\|_{L^2}$ in [m]. We performed 10 simulations with time steps ranging in $[0.05; 160]\text{ s}$ and we get the results described in figure 4.a).

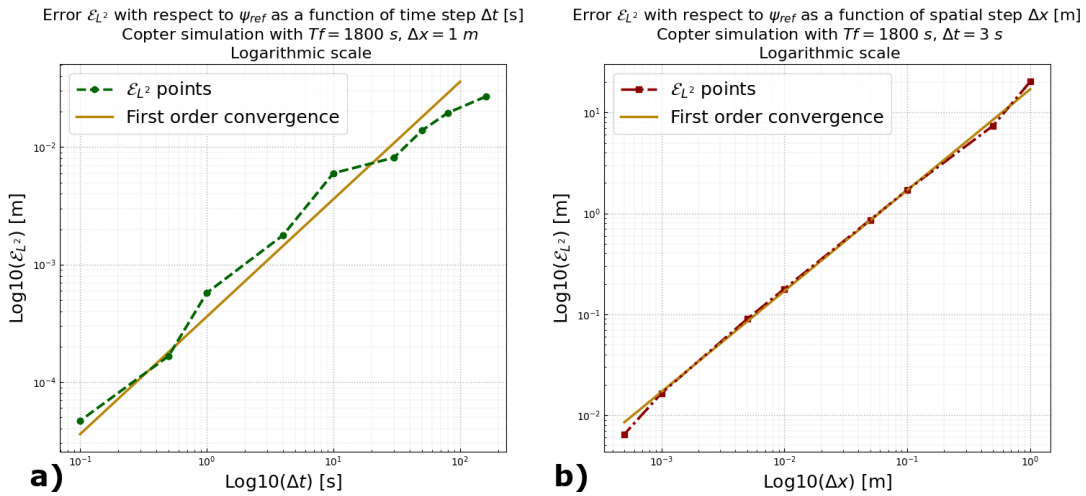


Fig. 4 a) Errors \mathcal{E}_{L^2} (green) obtained by simulations of 10 different time steps compared to the reference simulation corresponding to a time step of 0.05 s . First order convergence (yellow). b) Errors \mathcal{E}_{L^2} (red) obtained by simulations of 10 different spatial steps compared to the reference simulation corresponding to a spatial step of 0.0002 m . First order convergence (yellow).

In order to analyze the convergences in space and time, we choose, respectively, a reference time step of $\Delta t = 3\text{ s}$ and a spatial step size $\Delta x = 1\text{ m}$. $\Delta t = 3\text{ s}$ corresponds to the kind of time steps we would like to use in simulations. But, we will use larger spatial resolution in practice. The results in figure 4 show first order (illustrated by the continuous line) convergence rates in both time and space.

To understand why a time step of 3 seconds is interesting for computing efficiency, it is useful to look at the CFL stability condition analysis for the shallow-water Saint-Venant model. The analysis provides a typical upper

bound for the time step of the form:

$$\Delta t = \min_i \left(\frac{\Delta x}{2 \max_i (|u_i \pm \sqrt{gh_i}|)} \right) = \frac{\Delta x}{2 \max_i (|u_0 \pm \sqrt{gh_0}|)},$$

where subscript i indicates the mesh node which means that the minimum is taken over all the nodes of the mesh. In our situation, it correspond to the off-shore position (subscript $i = 0$). Typical values in our simulation are: $u_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$, $\Delta x = 1 \text{ m}$, $h = 0.55 \text{ m}$ and $g = 9.81 \text{ m.s}^{-2}$. This gives us $\Delta t = 0.04 \text{ s}$, which is about two orders of magnitude smaller than our reference time step of $\Delta t = 3 \text{ s}$. In addition, the costs of one iteration of the Saint-Venant and Optimorph models are comparable.

4.2 Parameter Robustness Analysis

One of the advantages of the Opti-Morph model is the low number of morphodynamic hyper-parameters required. At the present time, Opti-Morph requires two hyper-parameters: the mobility parameter Υ and the maximal slope parameter M_{slope} . Here, an assessment on these parameters is conducted. In Figure 3.E, three simulations were performed in identical settings with changes made solely to the mobility parameter. Initially, this parameter Υ has a value of $5 \times 10^{-6} \text{ m.s.kg}^{-1}$. Figure 3.E shows no significant difference despite a 50% increase ($\Upsilon = 7.5 \times 10^{-6} \text{ m.s.kg}^{-1}$) (orange) or decrease ($\Upsilon = 2.5 \times 10^{-6} \text{ m.s.kg}^{-1}$) (light blue) of Υ with regard to the baseline seabed profile (black). Similar conclusion can be deduced for the maximal slope parameter M_{slope} , whose reference value here is 0.2. The corresponding parameter of XBeach is *wetssl*, described in the XBeach manual as the critical avalanching slope under water, and is also set to 0.2. In Figure 3.F, we observe little difference between the reference seabed (black), the seabed resulting from a 50% increase ($M_{\text{slope}} = 0.3$) (orange) and the seabed resulting from a 50% decrease ($M_{\text{slope}} = 0.1$) (light blue). The only apparent discrepancy can be found at $x = 28 \text{ m}$, where the seabed is at its steepest, and therefore the sand slope constraint is more prone to be active. The reduction of the critical angle of repose results naturally in a less steep slope. The robustness of Opti-Morph in relation to both the mobility parameter and the slope parameter, despite a significant increase or decrease of their value, is apparent. Further simulations show that the robustness of these parameters is not specific to this particular flume configuration, but can be observed regardless of the initial configuration.

4.3 Long-term Simulations

This section is devoted to the long-term behavior of Opti-Morph, the main question being, is this numerical model capable of creating an equilibrium state after being subjected to a great number of repeated events. Five forcing scenarios, lasting either 2 or 6 days, were applied to the same initial seabed in the same parametric configuration. The current Opti-Morph code is in Python.

Typically, using time-steps of 1 s simulating a day of forcing requires about 1.5 hours on a 2GHz PC computer. Each time iteration gathering the steps presented in this paper requires therefore about 63 ms. Regarding the section 4.1, we could use 3 s time-step and divide the simulation time by 3. An analysis of the resulting seabeds is performed as well as their behavior throughout the simulation. The latter is achieved through a comparative study of four time-series, focusing on: (1), the vertical evolution of seabed elevation at the tip of the sandbar; (2), the vertical evolution of seabed elevation at a point of the plateau; (3), the distance between the wave-maker and the onset of the seabed; and (4), the location of the shoreline position.



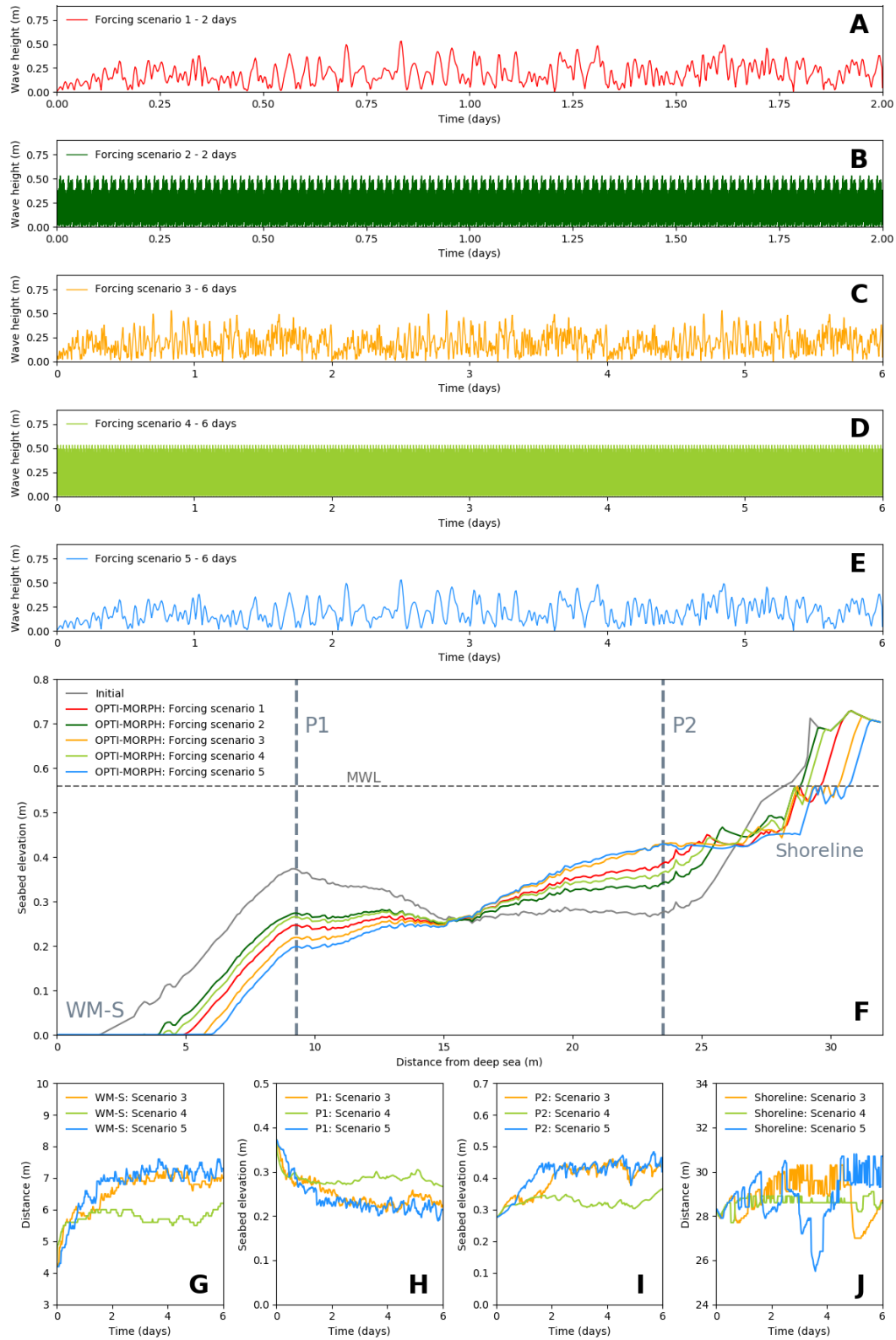
14 *Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization*

Fig. 5 Long-term simulation of Opti-Morph. **A.** Forcing wave height for scenario 1, composed of several long-term events over a 2-day period. **B.** Forcing wave height for scenario 2, composed of numerous short-term events over a 2-day period. **C.** Forcing wave height for scenario 3, composed of several long-term events over a 6-day period. **D.** Forcing wave height for scenario 4, composed of numerous short-term events over a 6-day period. **E.** Forcing wave height for scenario 5, composed of few long-term events over a 6-day period. **F.** Seabeds resulting from the different forcing scenarios produced by Opti-Morph. Two points of interest have been identified: P1 located at $x = 9.3\text{ m}$ and P2 located at $x = 20.1\text{ m}$. **G.** Evolution of the distance, devoid of sediment, between the wave-maker (located at $x = 0\text{ m}$) and the seabed (WM-S), regarding forcing scenarios 3, 4, and 5. **H.** Vertical evolution of seabed elevation at P1, driven by the 6-day forcing scenarios 3, 4, and 5. **I.** Vertical evolution of seabed elevation at P2, driven by the 6-day forcing scenarios 3, 4, and 5. **J.** Evolution of shoreline position, driven by the 6-day forcing scenarios 3, 4, and 5.

Applying Opti-Morph over a longer time-series leads to the results of Figure 5. The two 2-day forcing scenarios are shown in Figures 5.A and 5.B. In both cases, we observe that the resulting seabeds of Figure 5.F are subjected to the destruction of the sandbar and have a tendency to evolve progressively towards an equilibrium beach profile [56]. Simulations over a 6-day period were conducted to confirm this tendency. These scenarios are depicted in Figures 5.C, 5.D, and 5.E, and the resulting seabeds given in Figure 5.F show once again the destruction of the sandbars, the elevation of the plateau, and erosion at the shoreline. Furthermore, all three tend towards an equilibrium state. This is confirmed by the four time-series analysis presented in Figures 5.G, 5.H, 5.I, and 5.J. The vertical elevation of the seabed at both points P1 and P2 show initial variations over the first 2 days: a decrease in the case of P1 (cf. Figure 5.H) and an increase in the case of P2 (cf. Figure 5.I). However, both studies show a stabilization of the seabed elevation over the last 4 days of the 6-day period. Similar conclusions can be drawn regarding the length of the zone containing no sediment adjacent to the wave-maker (cf. Figure 5.G). An initial increase between 2 and 3 meters can be observed, with stability achieved in the later stages of the simulations. Finally, Figure 5.J shows the evolution of the shoreline position. Initially found at $x = 28.3\text{ m}$, all scenarios provoke a retreat of the shoreline: 0.4 m in scenario 3, 0.3 m in scenario 4, and 2 m in scenario 5. The shorelines of the latter two converge, whereas scenario 3 shows an abrupt advance of the shoreline at day 5, with an attempt to return back to its stable state of $x = 30\text{ m}$. The seabed has been flattened, the sandbar has been destroyed and erosion can be observed at the coast [57]. This tendency to evolve towards an equilibrium state [40] is consistent with the choice of morphogenic and constant storm-like forcing conditions.

The comparisons made between the two 2-day simulations and the three 6-day simulations, in this given configuration, also reveal the little influence heritage has on the morphodynamic response. Both scenarios 1 and 2 have a comparable cumulative incoming wave energy density $E = \frac{1}{16} \int_0^T \rho g H_0^2 dt$ of 0.0591 J.m^{-2} . The resulting seabeds evolve towards similar profiles (reduction of the sandbar, increase of elevation of the plateau, and erosion at the coast), despite two different forcing conditions. Similar conclusions can be

drawn regarding the 6-day simulations, where the cumulative energy density of all three is equal to 0.177 J.m^{-2} .

5 Conclusions

Opti-Morph shows potential as a fast, robust, and low complexity morphodynamic model involving only two hyper-parameters. Despite using a basic hydrodynamic model for the description of the complex coupling of hydrodynamic and morphodynamic processes, we can nevertheless observe that a numerical model based on an optimization theory works effectively, with comparable results to a state of the art hydro-morphodynamic model requiring the tuning of dozens of hyper-parameters. Long-term simulations also show typical morphodynamic behavior, with the tendency of the seabed to evolve towards an equilibrium state. These results demonstrate the tremendous potential of Opti-Morph, a constrained energy minimization morphodynamic model.

6 Declarations

6.1 Availability of data and material

All data, models, and code generated or used during the study appear in the submitted article.

6.2 Conflict of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

6.3 Acknowledgements

This work was conducted as part as M. Cook's PhD studies which is funded by BRLi and M. Dupont's PhD studies which is funded by the CNRS. We are also grateful to BRLi for their assistance throughout the study of La Turballe port. We also thank to GLADYS (www.gladys-littoral.org) for their continuous logistical and financial support of academic research and applications on coastal hydrodynamics in the South of France.

Appendix A Mathematical Developments

In this section, we detail some of the mathematical results needed in the implementation of the Opti-Morph model, specifically the calculation of the gradient of the cost function J (Eq. (8)) with regard to the bathymetry ψ , which in turn requires the gradient of the wave height function (Eq. (7)) with regard to ψ . With the current choice of hydrodynamic model, this can be achieved analytically. With more sophisticated hydrodynamic models this is not always possible. In these cases, if the source code of the model is available, the calculation of the gradient can be performed using automatic differentiation of programs [41, 58] directly providing a computer program for the gradient.



A.1 Gradient of the Cost Function with respect to the Bathymetry

Opti-Morph requires the evaluation of gradient of the functional J with respect to the bathymetry ψ , denoted $\nabla_\psi J$. For a general functional of the form $J(\psi(x), H(\psi(x)))$ involving dependencies with respect to the bathymetry and hydrodynamic quantities H , this sensitivity can be expressed using the chain rule:

$$\nabla_\psi J = \partial_\psi J + \partial_H J \partial_\psi H \quad (\text{A1})$$

where $\partial_\psi J = \frac{\partial J}{\partial \psi}$. $\partial_\psi H$ requires the linearization of the hydrodynamic model, and ψ is a parametric representation of the bathymetry.

A.2 Gradient of the Wave Height with respect to the Bathymetry

This section is devoted to the calculation of the gradient of the wave height H , given by (7), with regards to the seabed elevation ψ and denoted $\partial_\psi H$. Being as $h = h_0 - \psi$, the derivation of the third line of (7) with regards to ψ is immediate. The calculation of the gradient of the first line of (7) is analogous to that of the second. It remains to differentiate the second line of (7) with regards to ψ . Observing that the chain rule yields for all $x, t \in \Omega_S \times [0, T]$ with $x \geq d_w$,

$$\partial_\psi H(x, t) = H_0^w(x, t) \partial_\psi K_S(x, t) + \partial_\psi H_0^w(x, t) K_S(x, t), \quad (\text{A2})$$

and that the term $\partial_\psi H_0^w(x, t)$ can be determined iteratively, using $\partial_\psi H_0 = 0$, it remains to determine $\partial_\psi K_S(x, t)$. Injecting the definitions of n , C and C_g , given in (4), yields

$$K_S = \left[\tanh(kh) \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right) \right]^{1/2}. \quad (\text{A3})$$

For the sake of simplicity, let $U = \tanh(kh) \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right)$ and $X = kh$. Equation (A3) becomes

$$\partial_\psi K_S = -\frac{1}{2} U^{-3/2} \partial_\psi U, \quad (\text{A4})$$

and we have

$$\partial_\psi U = \partial_\psi X \frac{2 \cosh^2(X) - X \sinh(2X)}{\cosh^4(X)}, \quad (\text{A5})$$

with $\partial_\psi X = h \partial_\psi k + k \partial_\psi h = h \partial_\psi k - k$. Moreover, differentiating both sides of the dispersion equation (1) by ψ gives

$$\partial_\psi k = \frac{k^2}{\cosh(kh) \sinh(kh) + kh}. \quad (\text{A6})$$

Combining (A4),(A5), and (A6), we obtain $\partial_\psi K_S$, and therefore $\partial_\psi H$.

References

- [1] Isèbe, D., Azérad, P., Bouchette, F., Mohammadi, B.: Design of passive defense structures in coastal engineering **5**(2), 75. <https://doi.org/10.15866/irece.v5i2.2029>. Accessed 2022-04-01
- [2] Isebe, D., Azerad, P., Mohammadi, B., Bouchette, F.: Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact. Coastal Engineering **55**(1), 35–46 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2007.06.006>
- [3] Isèbe, D., Azerad, P., Bouchette, F., Ivorra, B., Mohammadi, B.: Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection. International Journal for Numerical Methods in Engineering **74**(8), 1262–1277 (2008). <https://doi.org/10.1002/nme.2209>
- [4] Bouharguane, A., Azerad, P., Bouchette, F., Marche, F., Mohammadi, B., Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université Montpellier II, 34 095 Montpellier: Low complexity shape optimization & a posteriori high fidelity validation. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B **13**(4), 759–772 (2010). <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2010.13.759>. Accessed 2022-04-01
- [5] Bouharguane, A., Mohammadi, B.: Minimization principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow. International Journal of Computational Fluid Dynamics **26**, 163–172 (2012). <https://doi.org/10.1080/10618562.2012.669831>
- [6] Mohammadi, B., Bouharguane, A.: Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters **40**(1), 291–298. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.031>. Accessed 2022-03-11
- [7] Mohammadi, B., Bouchette, F.: Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics. Computers and Fluids **89**, 78–87 (2014). <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.10.021>
- [8] Mohammadi, B., Bouharguane, A.: Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters. Computers and Fluids **40**, 291–298 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.031>
- [9] Cook, M., Bouchette, F., Mohammadi, B., Sprunck, L., Fraysse, N.: Optimal port design minimizing standing waves with a posteriori long term shoreline sustainability analysis **35**(6), 802–813. <https://doi.org/10.1007/s13344-021-0071-7>. Accessed 2022-04-01

- [10] Roelvink, D.J.A., Reniers, A., van Dongeren, A., Thiel de Vries, J., McCall, R., Lescinski, J.: Modelling storm impacts on beaches, dunes and barrier islands. *Coastal Engineering* **56**, 1133–1152 (2009). <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2009.08.006>
- [11] Zimmermann, N., Trouw, K., Wang, L., Mathys, M., Delgado, R., Verwaest, T.: Longshore transport and sedimentation in a navigation channel at blankenberge (belgium). *Coastal Engineering Proceedings* **1** (2012). <https://doi.org/10.9753/icce.v33.sediment.111>
- [12] Bugajny, N., Furmanczyk, K., Dudzinska-Nowak, J., Paplińska-Swempel, B.: Modelling morphological changes of beach and dune induced by storm on the southern baltic coast using xbeach (case study: Dziwnow spit). *Journal of Coastal Research* **I**, 672–677 (2013). <https://doi.org/10.2112/SI65-114.1>
- [13] Williams, J., Esteves, L., Rochford, L.: Modelling storm responses on a high-energy coastline with xbeach. *Modeling Earth Systems and Environment* **1** (2015). <https://doi.org/10.1007/s40808-015-0003-8>
- [14] de Vriend, H., Bakker, W.T., Bilsse, D.P.: A morphological behaviour model for the outer delta of mixed-energy tidal inlets. *Coastal Engineering* **23**, 305–327 (1994). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(94\)90008-6](https://doi.org/10.1016/0378-3839(94)90008-6)
- [15] Gravens, M.: An approach to modeling inlet and beach evolution, pp. 4477–4490 (1997). <https://doi.org/10.1061/9780784402429.348>
- [16] Kana, T., Hayter, E.J., Work, P.: Mesoscale sediment transport at southeastern u.s. tidal inlets: conceptual model applicable to mixed energy settings. *Journal of Coastal Research* **15**, 303–313 (1999)
- [17] Ruessink, G., Terwindt, J.H.J.: The behaviour of nearshore bars on the time scale of years: A conceptual model. *Marine Geology* **163**, 289–302 (2000). [https://doi.org/10.1016/S0025-3227\(99\)00094-8](https://doi.org/10.1016/S0025-3227(99)00094-8)
- [18] Larson, M., Kraus, N.: Sbeach: Numerical model for simulating storm-induced beach change. report 1. empirical foundation and model development. Technical report, DEPARTMENT OF THE ARMY US Army Corps of Engineers, Washington, DC, USA (July 1989)
- [19] Larson, M., Kraus, N., Byrnes, M.: Sbeach: Numerical model for simulating storm-induced beach change. report 2. numerical formulation and model tests. Technical report, DEPARTMENT OF THE ARMY US Army Corps of Engineers, Washington, DC, USA (May 1990)
- [20] Nairn, R., Southgate, H.: Deterministic profile modelling of nearshore processes. part 2. sediment transport and beach profile development. *Coastal*

- Engineering **19**, 57–96 (1993). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(93\)90019-5](https://doi.org/10.1016/0378-3839(93)90019-5)
- [21] Fleming, C., Hunt, J.: Application of sediment transport model, pp. 1184–1202 (1977). <https://doi.org/10.1061/9780872620834.070>
- [22] Latteux, B.: Harbour design including sedimentological problems using mainly numerical technics, pp. 2213–2229 (1980). <https://doi.org/10.1061/9780872622647.133>
- [23] Coeffe, Y., Pechon, P.: Modelling of sea-bed evolution under waves action. Proc. 18th ICCE **1** (1982). <https://doi.org/10.9753/icce.v18.71>
- [24] Yamaguchi, M., Nishioka, Y.: Numerical simulation on the change of bottom topography by the presence of coastal structures, pp. 1732–1748 (1985). <https://doi.org/10.1061/9780872624382.118>
- [25] Watanabe, A., Maruyama, K., Shimizu, T., Sakakiyama, T.: Numerical prediction model of three-dimensional beach deformation around a structure. Coastal Engineering Journal **29**, 179–194 (1986). <https://doi.org/10.1080/05785634.1986.11924437>
- [26] Maruyama, K., Takagi, T.: A simulation system of near-shore sediment transport for the coupling of the sea-bottom topography, waves and currents. Proc. IAHR Symp. Math. Mod. Sed. Transp. Coastal Zone, 300–309 (1988)
- [27] Wang, H., Miao, G., Lin, L.-H.: A time—dependent nearshore morphological response model, pp. 2513–2527 (1993). <https://doi.org/10.1061/9780872629332.192>
- [28] Johnson, H., Brøker, I., Zyserman, J.: Identification of some relevant processes in coastal morphological modelling, pp. 2871–2885 (1995). <https://doi.org/10.1061/9780784400890.208>
- [29] Nicholson, J., Brøker, I., Roelvink, D.J.A., Price, D., Tanguy, J.-M., Moreno, L.: Intercomparison of coastal area morphodynamic models. Coastal Engineering - COAST ENG **31**, 97–123 (1997). [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(96\)00054-3](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(96)00054-3)
- [30] Roelvink, J.A., Van Banning, G.K.F.M., Verwey, A.: Design and development of delft3d and application to coastal morphodynamics, 1st international conference, hydroinformatics 94. In: Hydroinformatics 94, HYDROINFORMATICS -PROCEEDINGS-, 1st International Conference, Hydroinformatics 94, vol. 1, pp. 451–456. Balkema, Rotterdam (1994)

- [31] Lesser, G.R., Roelvink, D.J.A., Kester, J.A.T.M., Stelling, G.: Development and validation of a three-dimensional morphological model. *Coastal Engineering* **51**, 883–915 (2004). <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2004.07.014>
- [32] Roelvink, D.J.A., Walstra, D.-J., Chen, Z.: Morphological modelling of keta lagoon case, pp. 3223–3236 (1995). <https://doi.org/10.1061/9780784400890.233>
- [33] Briand, M.-H., Kamphuis, J.W.: Sediment transport in the surf zone: A quasi 3-d numerical model. *Coastal Engineering* **20**, 135–156 (1993). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(93\)90058-G](https://doi.org/10.1016/0378-3839(93)90058-G)
- [34] Zyserman, J., Johnson, H.: Modelling morphological processes in the vicinity of shore-parallel breakwaters. *Coastal Engineering* **45**, 261–284 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0378-3839\(02\)00037-6](https://doi.org/10.1016/S0378-3839(02)00037-6)
- [35] Ding, Y., Wang, S., Jia, Y.: Development and validation of a quasi-three-dimensional coastal area morphological model. *Journal of Waterway Port Coastal and Ocean Engineering* **132**, 462–476 (2006). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-950X\(2006\)132:6\(462\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(2006)132:6(462))
- [36] Droenen, N., Deigaard, R.: Quasi-three-dimensional modelling of the morphology of longshore bars. *Coastal Engineering* **54**, 197–215 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2006.08.011>
- [37] Soulsby, R.L.: Calculating bottom orbital velocity beneath waves. *Coastal Engineering - COAST ENG* **11**, 371–380 (1987). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(87\)90034-2](https://doi.org/10.1016/0378-3839(87)90034-2)
- [38] Reineck, H.-E., Singh, I.B.: *Depositional Sedimentary Environments; with Reference to Terrigenous Clastics* [by] H.-E. Reineck [and] I. B. Singh, p. 439. Springer, (1973)
- [39] Murray, A.B.: Reducing model complexity for explanation and prediction. *Geomorphology* **90**(3), 178–191 (2007). <https://doi.org/10.1016/j.geomorph.2006.10.020>. Reduced-Complexity Geomorphological Modelling for River and Catchment Management
- [40] Dean, R., Dalrymple, R.: *Coastal processes with engineering applications. Coastal Processes with Engineering Applications*, by Robert G. Dean and Robert A. Dalrymple, pp. 487. ISBN 0521602750. Cambridge, UK: Cambridge University Press, March 2004. (2004)
- [41] Hascoet, L., Pascual, V.: Tapenade user's guide. In: INRIA Technical Report, pp. 1–31. INRIA, (2004)

- [42] Munk, W.: The solitary wave theory and its application to surf problems. *Annals of the New York Academy of Sciences* **51**, 376–424 (1949). <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1949.tb27281.x>
- [43] Beakawi Al-Hashemi, H.M., Baghabra Al-Amoudi, O.S.: A review on the angle of repose of granular materials. *Powder Technology* **330**, 397–417 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.02.003>
- [44] Hattori, M., Kawamata, R.: Onshore-Offshore Transport and Beach Profile Change, pp. 1175–1193 (1980). <https://doi.org/10.1061/9780872622647.072>
- [45] Quick, M.: Onshore-offshore sediment transport on beaches. *Coastal Engineering* **15**, 313–332 (1991)
- [46] Bouchette, F.: Coastal defense strategy along hatzuk beach (northern tel aviv, israel). insights from the copter physical experimentation with moveable bed. Technical Report 17-1, BRL Ingénierie, Nîmes (March 2017)
- [47] Daly, C.: Low frequency waves in the shoaling and nearshore zone a validation of xbeach. Erasmus Mundus Master in Coastal and Marine Engineering and Management (CoMEM), Delft University of Technology (2009)
- [48] Holthuijsen, L., Booij, N., Herbers, T.H.C.: “a prediction model for stationary, short crested waves in shallow water with ambient current”. *Coastal Engineering* **13**, 23–54 (1989). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(89\)90031-8](https://doi.org/10.1016/0378-3839(89)90031-8)
- [49] Roelvink, D.J.A.: Dissipation in random wave groups incident on a beach. *Coastal Engineering - COAST ENG* **19**, 127–150 (1993). [https://doi.org/10.1016/0378-3839\(93\)90021-Y](https://doi.org/10.1016/0378-3839(93)90021-Y)
- [50] Andrews, D.G., McIntyre, M.E.: An exact theory of nonlinear waves on a lagrangian-mean flow. *Journal of Fluid Mechanics* **89**(4), 609–646 (1978). <https://doi.org/10.1017/S0022112078002773>
- [51] Walstra, D.-J., Roelvink, D.J.A., Groeneweg, J.: Calculation of wave-driven currents in a 3d mean flow model, vol. 276 (2000). [https://doi.org/10.1061/40549\(276\)81](https://doi.org/10.1061/40549(276)81)
- [52] Soulsby, R.: *Dynamics of Marine Sands*. Thomas Telford Publishing, (1997). <https://doi.org/10.1680/doms.25844>
- [53] Galappatti, G., Vreugdenhil, C.: A depth-integrated model for suspended sediment transport. *Journal of Hydraulic Research* **23**(4), 359–377 (1985)

- [54] Roelvink, D.J.A., Reniers, A., van Dongeren, A., Thiel de Vries, J., Lescinski, J., McCall, R.: Xbeach model – description and manual. Technical report, Unesco-IHE Institute for Water Education, Deltares and Delft University of Technology, Delft, Netherlands (January 2010)
- [55] Hasselmann, K., Barnett, T.P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D., Enke, K., Ewing, J.A., Gienapp, H., Hasselmann, D., Kruseman, P., Meerburg, A., Muller, P., Olbers, D., Richren, K., Sell, W., Walden, H.: Measurements of wind-wave growth and swell decay during the joint north sea wave project (jonswap). Technical report, Deutsches Hydrographisches Institut, Hamburg, Germany (January 1973)
- [56] of Engineers, U.A.C.: Coastal Engineering Manual, Engineer Manual 1110-2-1100. US Army Corps of Engineers, Washington, D.C. (2002)
- [57] Grasso, F., Michallet, H., Barthélemy, E.: Experimental simulation of shoreface nourishments under storm events: A morphological, hydrodynamic, and sediment grain size analysis. *Coastal Engineering* **58**(2), 184–193 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2010.09.007>
- [58] Griewank, A., Walther, A.: Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation, 2nd edn. Society for Industrial and Applied Mathematics, (2008). <https://doi.org/10.1137/1.9780898717761>



**1.3 2022: Journées Nationales Génie Côtier - Génie Civil:
OptiMorph : un modèle de morphodynamique du littoral par principe de minimisation. Analyse de sensibilité en 1D et application multi-1D [3]**

DYNAMIQUE SÉDIMENTAIRE

Validation d'un modèle morphodynamique du littoral issu de l'optimisation

R. Dupont^(1,3), F. Bouchette^(1,3), B. Mohammadi^(2,3), D. Sous^(3,4)

(1) Géosciences Montpellier, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France,
ronan.dupont@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr

(2) IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr

(3) GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

(4) SIAME, Univ. Pau & Pays Adour, E2S UPPA, Anglet, France, damien.sous@mio.osupytheas.fr

Abstract : De nos jours, dans un contexte de changement global accéléré, modéliser numériquement le transport et la morphologie en zone littorale est une problématique majeure pour caractériser et quantifier : a) les flux sédimentaires, b) l'évolution des formes de fond et sur la plage émergée, c) la réaction de la plage à certains aménagements ou évolutions du contexte (niveau marin, apports de sable, destruction du biotope, ...). La modélisation morphodynamique littorale est également cruciale pour accompagner le dimensionnement et l'implantation de nombreux systèmes de protection du littoral (e.g. D ISEBE & AL, 2018).

Les modèles actuels de transport sédimentaire sont basés sur le critère de Shields, qui décrit les conditions de déclenchement du transport à l'échelle granulaire, et permet la paramétrisation de ce transport aux plus grandes échelles. Ces approches utilisent toutes la notion de flux local de sédiment. Toutefois, ces dernières années, ISEBE, BOUHARGUANE et finalement COOK M & al (2021) ont développé un outil numérique s'appuyant sur un principe de transport optimal. Cette approche considère que la forme du fond marin doit être une forme optimale minimisant une certaine fonctionnelle représentative de l'énergie des vagues. Plusieurs définitions de cette fonctionnelle ont déjà été proposées (Cook et al., 2021) et dans ce travail, cette définition est précisée, et reformulée à partir de travaux fondateurs comme ceux de NEWTON (*Minimal Resistance Problem*).

L'outil de calcul du transport par optimisation s'affranchi d'un grand nombre de paramètres de contrôle. Par ailleurs, c'est un outil qui peut calculer des temps longs en quelques minutes. La version qui est proposée dans ce travail réalise la modélisation de l'évolution du profil 2DV perpendiculairement à la côte dans différents contextes de forçages, de fond marin et de choix de la fonctionnelle au coeur du modèle. Dans un tel contexte, l'objectif est de réaliser un travail de validation de ce modèle en le déployant sur plusieurs situations types. Une partie de la validation est réalisée par comparaison des résultats numériques avec des données expérimentales de canal issue d'un projet antérieur (COPTER 2D) ; une autre partie consiste à réaliser des simulations comparatives avec d'autres modèles morphodynamiques de la communauté scientifique comme Xbeach par exemple. Techniquement parlant, une large base de données de résultat est obtenue en réalisant une grille de calcul sur cluster HPC avec ce modèle, et les résultats sont analysés par fouille de données. On montre dans quel contexte cette version de modèle par optimisation permet une bonne caractérisation de la morphodynamique de plage.

Mots-clés : Hydro-morphodynamisme, Optimisation, Validation de modèle, Littoral, Approche variationnelle, Minimisation d'énergie, Transport Optimal, Ondes.

OptiMorph : un modèle de morphodynamique du littoral par principe de minimisation. Analyse de sensibilité en 1D et application multi-1D

Ronan DUPONT ^{1,3}, Frédéric BOUCHETTE ^{1,3}, Bijan MOHAMMADI ^{2,3}, Damien SOUS ^{3,4}

1. Géosciences Montpellier, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France.
ronan.dupont@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr
2. IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France.
bijan.mohammadi@umontpellier.fr
3. GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France.
4. SIAME, Univ. Pau & Pays Adour, E2S UPPA, Anglet, France.
damien.sous@mio.osupytheas.fr

Résumé :

Le modèle numérique OptiMorph résout des problèmes morphodynamiques par une approche de transport optimal. Dans un premier temps, nous nous intéressons au comportement du modèle pour différents forçages et discrétisations spatiales et temporelles. Cette analyse permet de s'assurer de la consistance et de la stabilité du modèle. Ensuite, nous appliquons le modèle dans une configuration 'multi-1D' sur des données réelles. Il s'agit de positionner un tube en géotextile dans le Golfe d'Aigues-Mortes. L'analyse des résultats montre l'efficacité de ce tube lors d'une tempête de quelques jours, réduisant la hauteur d'une barre sédimentaire.

Mots-clés :

Hydro-morphodynamisme, Optimisation, Validation de modèle, Littoral, Approche variationnelle, Minimisation d'énergie, Transport optimal, Ondes.

1. Introduction

La morphodynamique littorale fait référence à l'évolution de la morphologie d'une plage au cours du temps, à savoir l'évolution de sa bathymétrie. Il existe de nombreuses méthodes pour calculer la morphodynamique, des approches empiriques aux modèles basés sur des processus physiques élémentaires. Les modèles peuvent être classés en plusieurs catégories, telles que i) les modèles d'évolution du profil de plage (1D), qui considèrent uniquement le transport transversal, ii) les modèles morphodynamiques 2D, qui requièrent le calcul des vagues et des courants éventuellement moyennés en profondeur pour modéliser le transport des sédiments ou iii) les modèles 3D et quasi-3D, qui déterminent l'évolution des sédiments en utilisant les variations horizontales et verticales des paramètres dérivés des vagues. Dans tous les cas, le transport sédimentaire,



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



et donc la morphodynamique sont abordés de manière locale, c'est-à-dire à partir de la paramétrisation du transport en chaque point de la grille de calcul à partir d'une loi plus ou moins complexe de remobilisation et remise en suspension/charriage du sédiment. À l'opposé de ces approches, le modèle Opti-Morph est basé sur le contrôle optimal, qui est une stratégie dite globale, dans la mesure où le lieu exact du transport n'est jamais décrit a priori par la méthode de calcul. Cette stratégie de résolution, héritée des sciences de l'optimisation, est née à Montpellier sur la base des idées de BOUCHETTE, MOHAMMADI et AZERAD (ISEBE et al., 2008 ; BOUHARGUANE et al., 2010 ; MOHAMMADI et BOUHARGUANE., 2011); elle était initialement orientée vers l'optimisation de structures de protection du littoral.

En 2011, ces applications d'optimisation sur le littoral ont pris une dimension différente. La question qui s'est posée est celle de la résolution numérique du problème suivant : « Et si on ne cherchait pas la forme ou l'emplacement optimal d'une structure mais la forme optimale du fond, faisant l'hypothèse que le système naturel tend à prendre la meilleure forme possible par rapport à une grandeur caractéristique à minimiser » qui est une manière de formuler le problème de la morphodynamique des plages par calcul optimal. Cette question soulève de nombreux défis physiques et numériques. En particulier, il est nécessaire de définir un critère bien particulier à minimiser que l'on appellera fonction de coût J . Une hypothèse a été aussi d'admettre que « le système naturel cherche à minimiser un certain état énergétique qui évolue selon la forme du fond ». Les développements de COOK *et al* ont été effectués sur cette base pour donner naissance à Optimorph (COOK *et al.*, 2021), qui est un code de calcul morpho-dynamique 1D reposant sur la théorie du transport optimal et nécessitant un nombre très réduit de paramètres physiques. Des premiers travaux de validation ont été effectués notamment en confrontant ce modèle à d'autres modèles très classiques comme XBeach (COOK *et al.*, 2021). La suite de cette validation sera présentée dans ce manuscrit à travers des analyses de sensibilité.

2. Modèle hydro-morphodynamique 1D basés sur la minimisation d'énergie

Le nouveau modèle élaboré par (COOK *et al.*, 2021) est basé sur le principe que la nature cherche à minimiser l'énergie qu'elle dépense. La fonction de coût qui régit l'évolution du fond marin a été élaborée sur la base de l'expression de l'énergie totale \mathcal{E}_H des vagues. Cette énergie est calculée à partir du modèle hydrodynamique qui, lui-même, est initialisé via les constantes usuelles : la période de vague T_0 , le forçage H_0 , la hauteur d'eau initiale h_0 ,... Le modèle fonctionne selon le diagramme suivant :



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



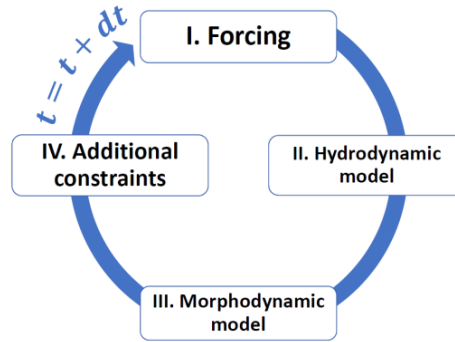


Figure 1. Diagramme de fonctionnement d'OptiMorph.

2.1 Modèle hydrodynamique

L'évolution en temps du profil bathymétrique est basée sur l'hypothèse que le fond évolue afin de minimiser l'énergie totale des vagues. Ainsi, un modèle hydrodynamique fournissant une description de l'état des vagues de surface est indispensable. Le modèle présenté ci-dessous détermine la hauteur significative des vagues, notée H le long du profil transversal à la plage, c'est-à-dire le domaine $\Omega = [0, x_{max}]$, où $x = 0$ est un point arbitraire en eaux profondes, et x_{max} est un point arbitraire au-delà du trait de côte. Le domaine Ω est divisé en deux sous-ensembles disjoints : la zone de shoaling Ω_S et la zone de déferlement Ω_B . La hauteur des vagues H sur Ω_S est basée sur l'équation de shoaling (1), où H_0 est la hauteur des vagues en eau profonde et K_S est un coefficient de shoaling calculé à partir de la théorie linéaire.

$$\begin{cases} H(x, t) = H_0(t)K_S(x, h) & x \in \Omega_S \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} H(x, t) = \gamma h(x, t) & x \in \Omega_B \end{cases} \quad (2)$$

Pour le déferlement dans la zone de Ω_B , le modèle se base essentiellement sur le critère de Munk γ (2) se basant sur la cambrure critique de la vague. Cependant, il a été régulièrement amélioré dans le modèle (muti-déferlement, mémoire vagues,...).

Ce modèle hydrodynamique est volontairement très simple et son choix repose sur 2 idées principales : a) il faut un modèle relativement facile à différencier analytiquement pour calculer le gradient $\nabla_\psi [J(\psi, H)]$, nécessaire dans la résolution numérique du problème ; b) il doit fondamentalement être un outil de calcul ultra-rapide. À ce stade du projet, nous privilégions la rapidité sur la finesse de la restitution de l'hydrodynamique et vu les résultats déjà obtenus, nous montrons que le raffinement incessant de l'hydrodynamique n'a de sens que si l'approche de la morphodynamique est locale.

2.2 Modèle morphodynamique

Pour le modèle morphodynamique, il est supposé que le fond varie au cours du temps dans le but de minimiser une fonction de coût J . Cette fonction de coût est définie comme l'énergie potentielle des vagues en zone de shoaling, définie pour tout $t \in [0, T]$ par l'équation (3) suivante :

$$\mathcal{J}(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}] \quad (3)$$

où H désigne la hauteur des vagues calculée par le modèle hydrodynamique, ρ_w est la densité de l'eau ($kg.m^{-3}$), et g l'accélération gravitationnelle ($m.s^{-2}$). Dans le but de décrire l'évolution du profil bathymétrique ψ , dont l'état initial est donné par ψ_0 , la dynamique de ψ minimisant \mathcal{J} est régie par le système de descente de gradient suivant :

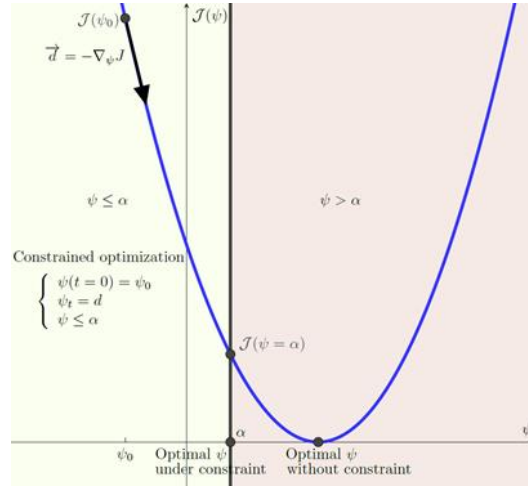


Figure 2. Illustration des contraintes de conservation sableuse et de pente avec $\psi \leq \alpha$. L'optimum ne correspond pas nécessairement au point critique $\nabla_{\psi} \mathcal{J} = 0$.

où ψ est l'évolution en temps du fond sableux $m.s^{-1}$, Y est la mobilité sédimentaire $m.s.kg^{-1}$, Λ est l'excitation du fond sableux par les vagues, d est la direction de descente indiquant la manière dont le fond sableux varie, α les contraintes. Dans une configuration sans contrainte, il y aurait simplement $\psi_t = -\nabla_{\psi} \mathcal{J}$, qui par sa définition, indique la direction d'un minimum local de \mathcal{J} par rapport à ψ comme illustré figure 2.

Des contraintes ci-dessous sont ajoutées au modèle pour incorporer les processus physiques nécessaires à l'obtention de résultats réalistes. Les forces motrices de l'évolution morphologique du profil bathymétrique sont décrites par la minimisation de la fonction de coût \mathcal{J} . Les processus secondaires sont exprimés par deux contraintes physiques.

- une contrainte de pente sableuse, qui empêche le sable de présenter des pentes irréalistes

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{slope} \quad (4)$$

où le paramètre M_{slope} représente l'angle de talus critique du sable.

- la contrainte de stock sableux, obligeant la quantité de sable dans un bassin expérimental à rester constante au cours du temps (cette contrainte pouvant être relaxée ou transformée dans un système ouvert comme une plage naturelle).

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

3. Stabilité et sensibilité

Une série de tests mathématiques et numériques sont réalisés pour analyser la sensibilité et la stabilité du modèle numérique. Nous montrons qu'OptiMorph est un code temporellement et spatialement stable et est réactif à différents types de forçages.

3.1 Convergence temporelle et spatiale du modèle

Nous avons calculé une simulation OptiMorph dite *de référence* caractérisée par un pas de temps très fin de 0.18 s ; cette simulation a été réalisée avec un profil bathymétrique linéaire de pente 1e-2 et les forçages d'une gaussienne de hauteur d'eau maximale $H_{max} = 2$ m. Cette simulation de référence peut être considérée comme une simulation idéale car le pas de temps choisi est plus fin que tout pas de temps qui serait choisi dans un modèle hydro-morphodynamique classique. En d'autres termes, nous supposons que, d'un point de vue numérique, ces simulations de référence décrivent la réalité aussi bien que possible (dans le cadre de validité des hypothèses physiques retenues). Évidemment, cela pourrait être faux car ces simulations ne sont pas entièrement validées par des données expérimentales. Mais, en ce qui concerne la dimension numérique, toutes les autres simulations avec un pas de temps plus dégradé devrait fournir des résultats moins précis. Nous avons ensuite effectué un ensemble de simulations OptiMorph avec différents pas de temps dont les résultats ont été comparés avec ceux de leur simulation de référence respective. Nous calculons la différence entre la simulation de référence et chaque simulation avec des pas de temps modifiés. Nous quantifions une erreur résiduelle avec la norme L^2 : $\mathcal{E}_{L^2} = ||\psi_{ref} - \psi||_{L^2}$ en mètres. ψ_{ref} est la référence numérique correspondant à la simulation exécutée à $\Delta t = 0,18$ s, ψ le fond marin correspondant à la simulation exécutée au pas de temps actuel. Nous avons réalisé 10 simulations avec des pas de temps compris entre [0.18 ; 90] s et nous obtenons les résultats décrits dans la figure 3.a).

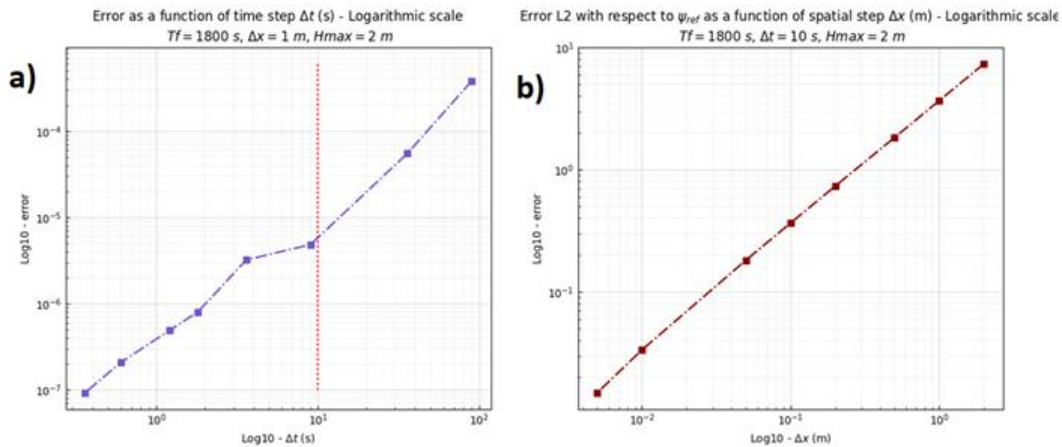


Figure 3. a) Convergence temporelle du modèle avec des Δt dans [0.18, 90] s
b) Convergence spatiale du modèle avec des Δx dans [0.001, 2] m.

Ces résultats montrent que le modèle converge dans le temps. On peut supposer que la solution semble acceptable à partir d'un pas de temps de $\Delta t \leq 10$ s correspondant à une erreur $\leq 1e-5$ m. Ce pas de temps critique correspond à une erreur raisonnable et nous le considérons comme nouvelle référence pour la résolution temporelle dans le reste de l'étude. On effectue ensuite avec ce nouveau pas de temps de référence une convergence spatiale avec des valeurs de Δx évoluant dans l'intervalle $[0.001 ; 2]$ m. Les résultats sont présentés sur la figure 3.b). Ces résultats montrent que le modèle converge aussi spatialement.

3.3 Convergence sur les forçages du modèle

Une étape importante de l'analyse du comportement numérique du modèle est la validation de son comportement vis à vis des caractéristiques du domaine et par rapport aux forçages. Dans cette partie, on s'intéresse en particulier à la comparaison de simulations de l'évolution morphodynamique pour des forçages identiques mais des domaines différents. On étudie une tempête de plusieurs jours en faisant varier la longueur du domaine tout en gardant la même plage linéaire de pente $1e-2$. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.a) et montrent la formation d'une barre réaliste stable pour des longueurs de domaine dans l'intervalle $[600, 1200, 1800, 3000]$ m.

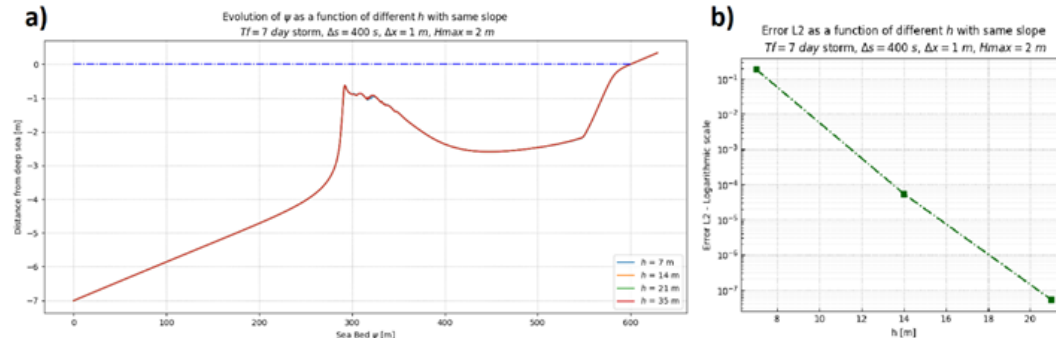


Figure 4. a) Affichage des différents profils de fond finaux pour des domaines de tailles $[600, 1200, 1800, 3000]$ m correspondant à des hauteurs d'eau au large de $h = [7, 14, 21, 35]$ m. La représentation est tronquée à 7 m de profondeur. b) Erreur L2 en comparant chaque simulation à la solution de référence correspondant au domaine de 3000 m (le plus long, représente les conditions en eau profonde).

La figure 4.b) expose la convergence de la solution en fonction du changement de longueur du domaine. Comme pour la convergence sur la résolution spatiale, on considère une simulation de référence qui est celle d'un domaine de longueur 3000 m. La convergence observée assure donc que quelle que soit la taille du domaine, le passage en houle en eau peu profonde se fait toujours au même point et que la réponse morphodynamique se fait de la même manière.

4. Applications à un cas Multi-1D sur le Golfe d'Aigues-Mortes

Les travaux de (ISEBE *et al.*, 2008 ; COOK *et al.*, 2021) se sont également intéressés à la recherche de la position optimale de géotubes (solutions de protection) sur un profil transversal pour maximiser leur effet en tant qu'atténuateur de houles. Ayant ce type de démarche en tête, on souhaite réaliser un ensemble de simulations multi-1D en plaçant un géotube sur un ensemble de profils morphologiques transversaux réels (Golfe d'Aigues-Mortes ; Figure 5). On veut calculer la réponse morphologique de ce domaine multi-1D en présence de ce type d'ouvrage semi-immergé.

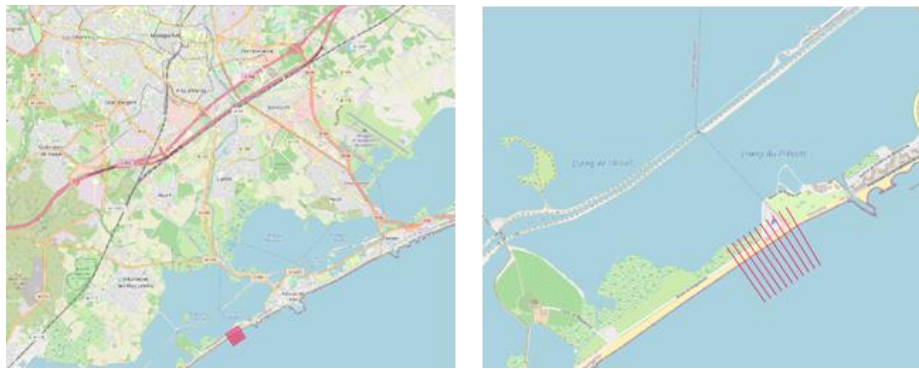


Figure 5. Géographie de la simulation sur le Golfe d'Aigues-Mortes.

On réalise la simulation d'un cas extrême multi-1D (sur l'ensemble des profils); cette simulation correspond à une tempête de quelques jours avec des vagues d'une hauteur maximale de 2 m. On ajoute sur le domaine un géotube sous la forme d'une gaussienne (dont les caractéristiques varient d'un profil à l'autre ; figure 6.a). Des simulations parallélisées (calculateur HPC) sont lancées et s'achèvent en moins de 5 minutes quel que soit le nombre de transects (modulo la limite de cœurs sur le cluster). Les résultats sont présentés sur la figure 6.b).

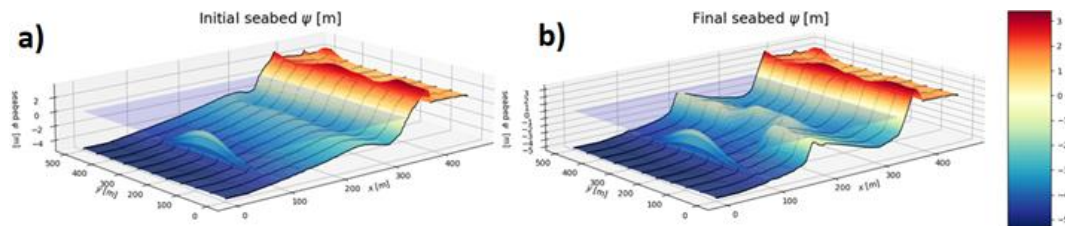


Figure 6. a) Bathymétrie initiale sur le Golfe d'Aigues-Mortes en ajoutant un géotube en forme de gaussienne avec une hauteur maximale de 3m. b) Bathymétrie finale après simulation d'une tempête de plusieurs jours.

Les résultats montrent la formation d'une fosse à l'arrière de la partie la plus haute et épaisse du géotube. Ces résultats sont encourageants car ils sont très similaires à ceux

relevés dans la campagne expérimentale COPTER menée en 2018 en bassin à houle 3D (fond mobile).

5. Conclusion

OptiMorph est un modèle numérique permettant des simulations morphodynamiques rapides donc offrant la possibilité de s'intéresser au temps long et à des domaines de grande taille. Sa faible complexité permet des temps de réponses environ 100 fois plus courts que les modèles classiques basés sur le transport local de sédiments. Il a été démontré que ce code est robuste, aussi bien par rapport aux perturbations numériques (convergence spatiale et temporelle) que physique (forçages).

OptiMorph peut être exécuté en parallèle sur des ensembles de profils 1D sur un cluster HPC et est donc compatible avec une approche Multi-1D. Dans la configuration présentée, on observe des résultats très proches de ceux obtenus lors d'essais en bassin.

6. Remerciements

Nous remercions le CNRS et son financement MITI pour la thèse de DUPONT R. Nous remercions le réseau GLADYS (www.gladys-littoral.org) pour les équipements, les workshops, le financement de la mobilité, les conditions de travail offertes par ce réseau.

7. Références bibliographiques

- ISEBE D., AZERAD P., BOUCHETTE F., IVORRA B., & MOHAMMADI B. (2008). *Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 74(8) :1262-1277. <https://doi.org/10.1002/nme.2209>
- ISEBE D., AZERAD P., MOHAMMADI B., & BOUCHETTE F. (2008). *Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact*. Coastal Engineering, 55(1) :35-46. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2007.06.006>
- BOUHARGUANE A., AZERAD P., BOUCHETTE F., MARCHE F., MOHAMMADI B. (2010). *Low complexity shape optimization & a posteriori high fidelity validation*. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B, 13(4) :759-772. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2010.13.759>
- MOHAMMADI B., BOUHARGUANE A. (2011). *Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters*. Computers & Fluids, 40(1) :291-298. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2010.09.031>
- ISEBE D., AZERAD P., BOUCHETTE F., & MOHAMMADI B. (2014). *Design of Passive Defense Structures in Coastal Engineering*. International Review of Civil Engineering (IRECE), 5(2) :75. <https://doi.org/10.15866/irece.v5i2.2029>
- MOHAMMADI B., BOUCHETTE F. (2014). *Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the Value at Risk of the bed characteristics*. Computers & Fluids, 89 :78-87. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.10.021>
- COOK M. (2021). *Calcul optimal pour la modélisation de la dynamique naturelle des plages sableuses et la conception d'ouvrages de défense du littoral à faible impact anthropique*. Thèse Université de Montpellier. Disponible en ligne sur URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03615087>



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



1.4 2022: 37th International Conference on Coastal Engineering: A Multi-1D Sandy Beach Dynamics Model By Minimization [4]

A MULTI-1D SANDY BEACH DYNAMICS MODEL BY MINIMIZATION

Ronan Dupont, Univ Montpellier, GM, CNRS, Montpellier, France / IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France / GLADYS beach Institute, Univ Montpellier, Le Grau-du-Roi, France, ronan.dupont@umontpellier.fr
Frédéric Bouchette, Univ Montpellier, GM, CNRS, Montpellier, France / GLADYS beach Institute, Univ Montpellier, Le Grau-du-Roi, France, frederic.bouchette@umontpellier.fr
Bijan Mohammadi, Univ Montpellier, IMAG, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr
Damien Sous, Univ Toulon, AMU, MIO, CNRS, IRD / UPPA, E2S UPPA, France, damien.sous@mio.osupytheas.fr

INTRODUCTION

Current sediment transport models are based on the Shields criterion, which describes the conditions for triggering transport at the granular scale, and allows the parameterization of this transport at larger scales. These approaches all use the notion of local sediment flux. In the existing literature, the local-flux strategy does not succeed well in nucleating nearshore sand bars from a flat or non-perturbed seabottom although it allows the description of an existing bar during a typical storm. In recent years, Cook (2021) has developed the OptiMorph numerical tool relying on an optimal transport principle. This approach considers that at any time the shape of the seabed must be an optimal shape minimizing a certain functional representative of the wave energy. Several definitions of this functional have already been proposed (Cook 2021) in this work, this definition is clarified, and reformulated from seminal works such as those of Newton Minimal Resistance Problem). Part of the 1D validation has been done by comparing numerical results with experimental channel data from a previous project (COPTER); another part consists in validating the multi-1D model by comparing experimental and numerical data.

NUMERICAL MODEL

In order to describe the evolution of a bathymetric profile ψ , whose initial state is given by ψ_0 , the dynamics of ψ is governed by the descent method given on figure 1.b.

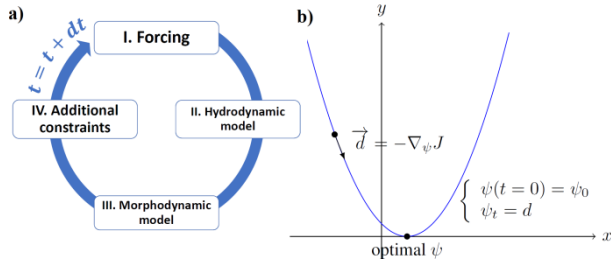


Figure 1 - a) Workflow of OptiMorph code. b) Descent scheme at iteration t .

with J represent a cost-function of some representative wave energy. In our approach, $d = -\nabla_{\psi} J$ also accounts for different physical constraints. By its definition, d indicates the direction of a local minimum of J with respect to ψ . This tool is free of a large amount of control parameters.

PRELIMINARY RESULTS

The version presented in this work performs the modeling of the evolution of the 2D vertical profile

perpendicular to the coast under different forcing conditions, seabed, structures and choice of the functional at the heart of the model. On the figure 2, several adjacent profiles perpendicular to the coast of the Golfe d'Aigues-Mortes (France) have been extracted. Computations were made on each of these 11 profiles (shown in black in Figure 2) in order to observe the evolution of the beach following a few days long storm.

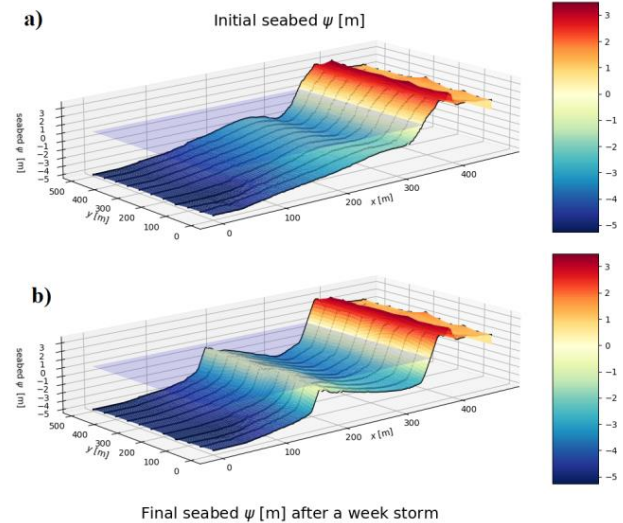


Figure 2 - a) Initial seabottom elevation of a part of the Golfe d'Aigues-Mortes recreated from 11 profiles (black). b) Final seabottom elevation after a few days long storm.

These results show that after the storm, a large amount of sand was moved: a bar was created at $x = 180$ m.

CONCLUSION

This very promising code has the advantage of being of low complexity and faster than other models (Cook 2021). It can be run in parallel by running a profile grid on an HPC cluster. Moreover, this code can easily solve coastal engineering problems such as the optimal placement of shoreline protection structures.

REFERENCES

Isebe, Azerad, Bouchette, Ivorra, Mohammadi (2008): Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 74, pp. 1262-1277.
Cook (2021): Calcul optimal pour la modélisation de la dynamique naturelle des plages sableuses et la conception d'ouvrages de défense du littoral à faible impact anthropique, Université Montpellier, TEL archives ouvertes, tel-03615087.

A MULTI-1D SANDY BEACH DYNAMICS MODEL BY MINIMIZATION

Ronan Dupont, Univ Montpellier, GM, CNRS, Montpellier, France / IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France / GLADYS beach Institute, Univ Montpellier, Le Grau-du-Roi, France, ronan.dupont@umontpellier.fr
 Frédéric Bouchette, Univ Montpellier, GM, CNRS, Montpellier, France / GLADYS beach Institute, Univ Montpellier, Le Grau-du-Roi, France, frederic.bouchette@umontpellier.fr
 Bijan Mohammadi, Univ Montpellier, IMAG, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr
 Damien Sous, Univ Toulon, AMU, MIO, CNRS, IRD / UPPA, E2S UPPA, France, damien.sous@mio.osupytheas.fr

INTRODUCTION

Coastal morphodynamics refers to the evolution of the morphology of a beach over time. There are many methods to calculate morphodynamics, from empirical approaches to models based on elementary physical processes. Models can be classified into several categories, such as i) beach profile evolution (1D) models, which consider only cross shore, ii) 2D morphodynamic models, which require usually the computation of waves and currents possibly averaged over depth to model sediment transport, or iii) 3D and quasi-3D models, which determine sediment bed evolution using horizontal and vertical variations of wave-derived parameters. In all cases, sediment transport, and thus morphodynamics, are approached in a local manner, i.e. from the parameterization of transport at each point of the computational grid based on a more or less complex law of remobilization and resuspension/loading of sediment. In contrast to these approaches, the OptiMorph model is based on optimal control, which is a so-called global strategy, in that the exact location of the transport is never described a priori by the calculation method. This resolution strategy, inherited from the optimization sciences, was born in Montpellier on the basis of the ideas of Bouchette, Mohammadi and Azerad (Isebe & al 2008a, 2008b, 2014; Bouharguane & al 2010; Mohammadi & al 2011, 2014); it was initially oriented towards the optimization of coastal protection structures.

In 2011, these shoreline-optimization applications took on a different dimension. The question that arose was how to numerically solve the following problem: "What if we were not looking for the optimal shape or location of a structure but for the optimal shape of the bottom, making the assumption that the natural system tends to take the best possible shape with respect to a characteristic quantity to be minimized?" which is a way of formulating the problem of beach morphodynamics by optimal computation. This question raises many physical and numerical challenges. In particular, it is necessary to define a very specific criterion to be minimized that we call cost function J . An assumption was also to admit that "the natural system seeks to minimize a certain energy state which evolves according to the shape of the bottom". Developments (by Cook 2021) have been carried out on this basis to give rise to Optimorph, which is a 1D morpho-dynamic computational code based on the optimal transport theory, requiring a very small number of physical parameters. An initial validation work has been carried out, notably by comparing this model with other very classical models such as XBeach (Cook 2021). The continuation of these developments and validation works are extended in the PhD of Dupont who

focuses its efforts on the numerical validation of the code under realistic conditions as well as the extension to multi-1D.

1D HYDRO-MORPHODYNAMIC MODEL BASED ON ENERGY MINIMIZATION

The new model developed by (Cook 2021) is based on the principle that nature seeks to minimize the energy it expends. The cost function that governs the evolution of the seafloor was developed based on the expression of total wave energy \mathcal{E}_H . The model works according to the following diagram:

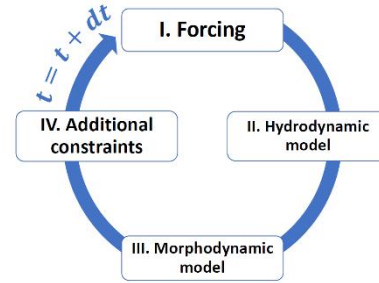


Figure 1 - Workflow of OptiMorph code on each time step. In I. Initialization of the hydrodynamic and morphodynamic forcings; II. the hydrodynamic model is run; III. the morphodynamic model is run; 4. the constraints are added. Then the new parameters enter in the new loop.

HYDRODYNAMIC MODEL

The time evolution of the bathymetric profile is based on the assumption that the bottom evolves to minimize the total wave energy. Thus, a hydrodynamic model providing a description of the surface wave state is essential. The model presented below determines the significant wave height, denoted H along the cross-shore profile, i.e. the domain $\Omega = [0, x_{max}]$, where $x = 0$ is an arbitrary point in deep water, and x_{max} is an arbitrary point beyond the coastline. The domain Ω is divided into two disjoint subsets: the shoaling zone Ω_S and the breaking zone Ω_B . The wave height H on Ω_S is based on the shoaling equation (1), where H_0 is the wave height in deep water and K_S is a shoaling coefficient calculated from the linear theory.

$$\begin{cases} H(x, t) = H_0(t) K_S(x, h) & x \in \Omega_S \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} H(x, t) = \gamma h(x, t) & x \in \Omega_B \end{cases} \quad (2)$$

For the break-up in the area of Ω_B , the model is essentially based on the Munk criterion γ (2). However, it has been regularly improved in the model (muti-deformation, wave breaking inheritance,...).

This hydrodynamic model is voluntarily very simple and its choice is based on 2 main ideas: a) it is necessary to have a model that is relatively easy to differentiate analytically in order to compute the gradient of the functional $\nabla_{\psi} \mathcal{J}(\psi, H)$, which is necessary in the numerical solution of the problem; b) it must basically be an ultra-fast computational tool. At this stage of the project, we privilege the speed over the finesse of the hydrodynamic restitution and given the results already obtained, we show that the incessant refinement of the hydrodynamics only makes sense if the morphodynamic approach is local.

MORPHODYNAMIC MODEL

For the morphodynamic model, it is assumed that the bottom varies with time in order to minimize a cost function \mathcal{J} . This cost function \mathcal{J} is defined as the potential energy of the waves in the shoaling zone, defined for all $t \in [0, T]$ by the following equation (3):

$$\mathcal{J}(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_s} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}] \quad (3)$$

where H is the wave height calculated by the hydrodynamic model, ρ_w is the density of water (kg.m⁻³), and g the gravitational acceleration (m.s⁻²). In order to describe the evolution of the bathymetric profile ψ , whose initial state is given by ψ_0 , the minimizing \mathcal{J} dynamics ψ is governed by the following gradient descent system:

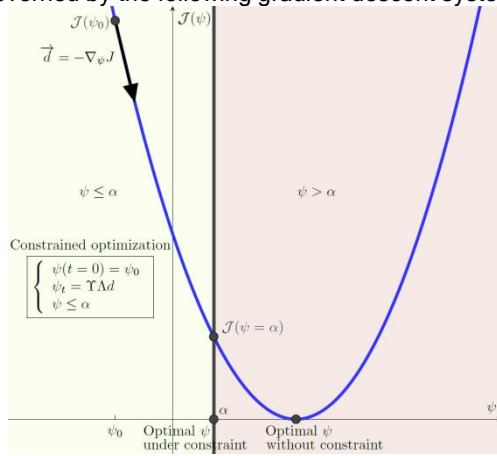


Figure 2 - Illustration of sand conservation and slope constraints with $\psi \leq \alpha$. The optimum does not necessarily correspond to the critical point $\nabla_{\psi} \mathcal{J} = 0$.

Where ψ is the time evolution of the sandy bottom m.s⁻¹, γ is the sediment mobility m.s.kg⁻¹, Δ is the excitation of the sandy bottom by waves, d is the downwelling direction indicating how the sandy bottom varies, α the constraints. In an unconstrained configuration, there would simply be $\psi_t = -\nabla_{\psi}$, which by its definition indicates the direction of a local minimum of \mathcal{J} with respect to ψ as shown in Figure 2.

The following constraints are added to the model to incorporate the minimum set of physical processes necessary to obtain realistic results. The driving forces for the morphological evolution of the bathymetric profile

are described by minimizing the cost function \mathcal{J} . The secondary processes are expressed by two physical constraints.

1) a sand slope constraint, which prevents the sand from presenting unrealistic slopes:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}} \quad (4)$$

where the parameter M_{slope} represents the critical slope angle of the sand.

2) the sand stock constraint, forcing the amount of sand in an experimental basin to remain constant over time (this constraint can be relaxed or transformed in an open system like a natural beach).

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T] \quad (5)$$

TEMPORAL AND SPATIAL CONVERGENCE OF THE 1D MODEL

We computed a so-called reference OptiMorph simulation characterized by a very fine time step of 0.18 s; this simulation was performed with a linear bathymetric profile of slope 0.01, size 600 m and the forcing of a Gaussian of maximum water height $H_{\text{max}} = 2$ m. This reference simulation can be considered as an ideal simulation because the time step chosen is finer than any time step that would be chosen in a conventional hydro-morphodynamic model. In other words, we assume that, from a numerical standpoint, these reference simulations describe reality as well as possible (within the validity of the chosen physical assumptions). Obviously, this could be wrong because these simulations are not fully validated by experimental data. But, as far as the numerical dimension is concerned, all other simulations with a more degraded time step should provide less accurate results. We then ran a set of OptiMorph simulations with different time steps whose results were compared with those of their respective reference simulation. We calculate the difference between the reference simulation and each simulation with modified time steps. We quantify a residual error with the standard norm L^2 : $\mathcal{E}_{L^2} = \|\psi_{\text{ref}} - \psi\|_{L^2}$ in meters. ψ_{ref} is the bottom corresponding to the simulation run at $\Delta t = 0.18$ s, ψ the seabed corresponding to the simulation run at the current time step. We have performed 10 simulations with time steps in the range [0.18 ; 90] s and we obtained the results described in figure 3.a).

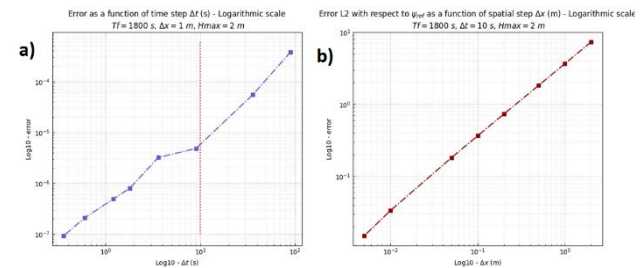


Figure 3 - a) Temporal convergence of the model with values in [0.18, 90] s. b) Spatial convergence of the model with values in [0.001, 2] m.

These results show that the model converges in time. We can assume that the solution appears acceptable starting from a time step of $\Delta t \leq 10$ s corresponding to an error $\leq 1e-5$ m. This critical time step corresponds to a reasonable error and we consider it as a new reference for the time resolution in the rest of the study. We then perform with this new reference time step a spatial convergence with values of Δx evolving in the interval $[0.001; 2]$ m. The results are presented in Figure 3.b) These results show that the model also converges spatially.

APPLICATIONS TO A MULTI-1D CASE ON THE GULF OF AIGUES-MORTES

The work of Isebe & al (2008a) and Cook (2021) was also interested in finding the optimal position of geotubes (protection solutions) on a transverse profile to maximize their effect as a swell attenuator. With this type of approach in mind, we wish to perform a set of multi-1D simulations by placing a geotube on a set of real transverse morphological profiles (Gulf of Aigues-Mortes; Figure 4). We want to calculate the morphological response of this multi-1D domain in the presence of this type of semi-submerged structure.

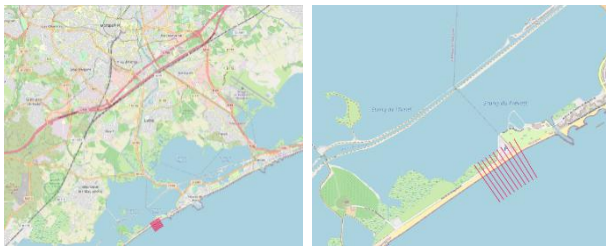


Figure 4 - Geography of the simulation on the Gulf of Aigues-Mortes.

A simulation of an extreme multi-1D case (on all the profiles) is carried out; this simulation matches a storm of a few days with waves of a maximum height of 2 m. A geotube is added to the domain in the form of a Gaussian (whose characteristics vary from one profile to another; Figure 5.a). Parallelized HPC simulations are started and completed in less than 5 minutes regardless of the number of transects. The results are presented in figure 5.b).

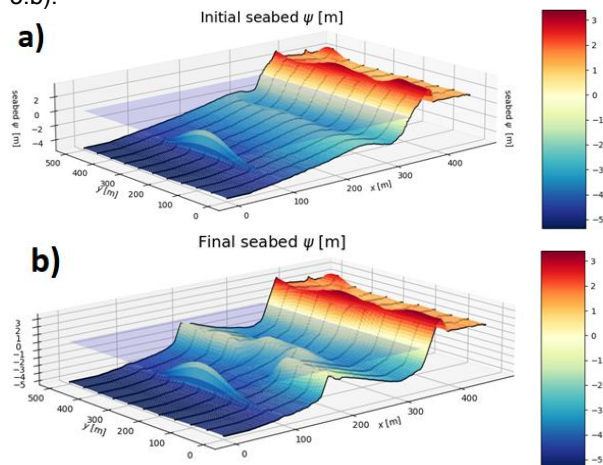


Figure 5 - a) Initial bathymetry over the Gulf of Aigues-

Mortes by adding a Gaussian-shaped geotube with a maximum height of 3m. b) Final bathymetry after a simulation of a multi-day storm.

The results show the formation of a pit at the back of the highest and thickest part of the geotube.

CONCLUSION

OptiMorph is a morphodynamic model allowing rapid simulations and capable of handling large temporal and spatial configurations.

Its response times are about 100 times faster than classical models based on local sediment transport.

The model behavior has been analyzed with respect to physical (forcing) perturbations, as well as its spatial and temporal convergences.

OptiMorph runs in parallel on sets of 1D profiles on an HPC cluster with global response times of a few seconds on multi-1D parameterization of 2D domains.

ACKNOWLEDGEMENTS

We thank the CNRS and MITI for the funding of the PhD of Dupont. Similarly, we thank the GLADYS network (www.gladys-littoral.org) for the equipment, workshops, funding of the PhD mobility, and the working conditions offered by this network.

REFERENCES

- Bouharguane, Azerad, Bouchette, Marche, Mohammadi (2010): Low Complexity Shape Optimization & a Posteriori High Fidelity Validation. Discrete & Continuous Dynamical Systems - B. vol. 13. pp. 759-72.
- Cook (2021): Calcul optimal pour la modélisation de la dynamique naturelle des plages sableuses et la conception d'ouvrages de défense du littoral à faible impact anthropique, Université Montpellier, TEL archives ouvertes, tel-03615087.
- Isebe, Azerad, Bouchette, Ivorra, Mohammadi (2008a): Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 74. pp. 1262-1277.
- Isebe, Azerad, Mohammadi, Bouchette (2008b): Optimal Shape Design of Defense Structures for Minimizing Short Wave Impact. Coastal Engineering. vol 55. pp. 35-46.
- Isébe, Azérad, Bouchette, Mohammadi (2014): Design of Passive Defense Structures in Coastal Engineering. International Review of Civil Engineering. Vol. 5, pp. 75.
- Mohammadi, Bouharguane (2011) Optimal Dynamics of Soft Shapes in Shallow Waters. Computers & Fluids. Vol. 40. pp. 291-98.
- Mohammadi, Bouchette (2014) Extreme Scenarios for the Evolution of a Soft Bed Interacting with a Fluid Using the Value at Risk of the Bed Characteristics. Computers & Fluids. vol.89. pp. 78-87.

1.5 2021: Chinese Ocean Engineering: Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis [5]

Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis

Megan COOK^{a, b, c, *}, Frédéric BOUCHETTE^{b, c}, Bijan MOHAMMADI^{c, d}, Léa SPRUNCK^{b, c},
Nicolas FRAYSSE^d

^aBRL Ingénierie, Nîmes 30000, France

^bGEOSCIENCES-M, University of Montpellier, CNRS, Montpellier 34090, France

^cGLADYS, University of Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi 30240, France

^dIMAG, University of Montpellier, CNRS, Montpellier 34090, France

Received April 20, 2021; revised August 11, 2021; accepted September 20, 2021

©2021 Chinese Ocean Engineering Society and Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature

Abstract

Optimization theory is applied to a coastal engineering problem that is the design of a port. This approach was applied to the redesign of La Turballe Port in order to increase the exploitable surface area and simultaneously reduce the occurrence of long waves within the port. Having defined the cost function as a weighted function of wave amplitude and with the chosen parameterization of the port, results show that an extended jetty and a widened mole yield a unique optimal solution. This work demonstrates that numerical optimization may be quick and efficient in the identification of port solutions consistent with classic engineering even in the context of complex problems.

Key words: optimization, coastal engineering, harbour design, hydrodynamics, shoreline analysis

Citation: Megan, C., Frédéric, B., Bijan, M., Léa, S., Nicolas, F., 2021. Optimal port design minimizing standing waves with a posteriori long term shoreline sustainability analysis. *China Ocean Eng.*, 35(6): 802–813, doi: <https://doi.org/10.1007/s13344-021-0071-7>

1 Introduction

When designing a port, an extensive study should be conducted to ensure a smooth functioning of services, improve the experience of its users, and provide sufficient protection of the port. This study on the port, its structural components and its users should combine different approaches such as risk identification methods and extensive surveys of the site (Joubert and Pretorius, 2020; Trbojevic and Carr, 2000; Alises et al., 2014; McCartney, 1985; Hewitt and Martin, 2001), the development of design criteria on the different components of the harbour (Sawicki et al., 1998; Jähren and Ishii, 1995; Smith, 1988; Allsop and Hettiarachchi, 1989) and numerical and physical simulations (Wang et al., 2015, 2017; Tian et al., 2018; Lillycrop and Briggs, 1992; Groenveld, 1983; Pachakis and Kiremidjian, 2003; Cornett and Baker, 2018; Harris et al., 2009). We present a method by optimization to supplement these standard procedures.

The term optimization in the field of coastal dynamics refers to the transformation of the natural seabed or the geometric and rheological properties of artificial structures present in ports or at the coast and leads to the minimization of a scalar quantity. This quantity, named cost function

and denoted \mathcal{J} , is representative of the state of the system and is generally associated with certain physical quantities, such as those related to waves or currents. Applications of optimization theory to coastal dynamics already exist in literature. The work by Isebe et al. (2008b) sought to minimize the L^2 norm of the water waves free surface elevation in the design of harbours or offshore breakwaters, and Isebe et al. (2008a) and Bouharguane et al. (2010) used this approach when designing coastal protection structures while minimizing the effect of beach erosion. Other examples of optimal design of coastal structures include Wu et al. (2018); Saghi et al. (2020); Li and Zhou (2015); Zhang et al. (2016); Castillo et al. (2004). Alternatively, Mohammadi and Bouharguane (Mohammadi and Bouharguane, 2011, 2014; Bouharguane and Mohammadi, 2012) used optimization theory as a tool in the modeling of the dynamics of seabeds in shallow waters. A general presentation of the methods used here can be found in Ivorra et al. (2005); Mohammadi and Pironneau (2009); Mohammadi and Saiac (2003), and we refer to these documents for the theoretical bases of optimization theory and its applications to coastal systems and coastal management.

It is indisputable that a model based on optimization the-

*Corresponding author. E-mail: megan.cook@umontpellier.fr



ory can be an invaluable tool for the development or updating of port configurations. Ports and harbour are generally extended to accommodate the increasing number of commercial and economic activities. Ports are enlarged to increase their exploitable surface area. This increase can be achieved with a second objective in mind. For instance, as well as increasing the surface area, one may also wish to reduce the agitation of the water within the port by introducing additional port protection, using jetties, breakwaters and groins. However, the increase in exploitable surface area may cause an increase in agitation or, conversely, the decrease of wave agitation may cause a decrease in surface area. Therefore, the design of a port has no trivial solution. Additional difficulties include the large number of geometric transformations considered in such a study; therefore, employing a classic engineering approach could be difficult and time-consuming, requiring a large number of exploratory numerical simulations forced by a large range of different weather and sea conditions.

The work presented here was prompted by the desire to further the investigation in the redesign of ports via the introduction of optimal theory. The introduction of optimal theory in a management port operation originates from a successful operation that consisted in the deployment on the coast of Sète (France) of a geotube (Isebe et al., 2008c).

With the intention of accompanying the engineers with their analysis on harbor protection, we devise a tool, based on the concept of port agitation minimization and capable of identifying pertinent port configurations. This work was conducted in the case of La Turballe Port (France), but is valid for any semi-enclosed harbour with relatively constant water depth. This tool should in no way substitute the classical approach to port design performed by the experts in the field but is intended to offer suggestions on possible configurations. Oftentimes, numerical modeling of port configurations is costly, both in time and resources, and consequently, the number of simulations is restricted. The tool presented here offers a rapid, cost-efficient, and user-friendly resource designed to assist traditional approaches. This optimization model is capable of indicating optimal harbor designs in very little time, with regards to a predetermined objective function. Modifying the objective function, forcing conditions, and/or parameters surrounding the optimization model allows users to explore different harbor configurations in a short span of time. The resulting port designs can, and should, be subject to further investigation so as to evaluate their effectiveness, this being achieved using a more classical engineering approach. This tool also allows users to give credence to their initial hypotheses and may provide unorthodox results not necessarily envisioned by the experts.

This paper presents one such study where the focus is on the minimization of long wave energy within La Turballe Port, situated in North-Western France. The parameters are

chosen with the aim of depicting a worst-case scenario.

We begin this paper with the hydrodynamic model used in the minimization of port agitation. Here, we use a variation of the Helmholtz equation applied to a port configuration because the control of wave/wave interactions, seiches and resonance phenomena is preeminent in the design of this inner port, in so far as gravity waves are efficiently fully dissipated at the entrance. Obviously, the hydrodynamic model must deal with different forcing conditions and returns water oscillation amplitudes. The next section is devoted to the concept of optimization theory applied to coastal engineering, and more specifically to the extension of ports, with the main objective to increase the exploitable surface area and minimize the agitation of the water within the port. In the third section, we apply this theory to the practical case of La Turballe Port in North-Western France and a discussion of the long term shoreline sustainability can be found in the final section.

2 Hydrodynamic model for port agitation

In order to calculate the optimal port configuration with regards to the minimization of water oscillations within the port, a hydrodynamic model capable of modeling the relevant water level fluctuations is required. Generally, water level in ports can be driven by tide, very low frequency waves, infra-gravity waves, waves or wind waves depending upon the context. Here, we know from historical experience that classic gravity waves are efficiently attenuated at the port entrance, but may transfer part of their energy to the inner port in the form of seiches and various standing low frequency waves. In addition, the model could take into account the different weather and deep sea scenarios observed off the coast, as well as the absorption/reflection characteristics of the structures within the harbour.

The model can be applied to any port verifying the required conditions (semi-enclosed basin with a forcing boundary and roughly constant water depth). We illustrate this model on the case of the old port of La Rochelle, as a generic port. This example was chosen because it illustrates the three different boundary conditions which we are able to consider with this model. The realistic application that follows in Section 4 does not present all the boundary conditions presented here, so hasn't been used as an illustration.

The model was designed with the application of La Turballe in mind (see Section 4), that is a port with input waves arriving with no angle of incidence.

2.1 Settings

We define the domain Ω as the area occupied by water within the port. The domain is a closed, compact subdomain of \mathbb{R}^2 . We denote Λ the boundary of Ω , which is to be partitioned into three subsets $(\Lambda_i, \Lambda_w, \Lambda_o)$. We denote Λ_i the boundary over which the incoming forcing is present. Forcing is given in the form of wave agitation at the entrance of

the port, where the influx of energy arises. We denote Λ_w the borders of the domain representing the walls of the port. These walls are associated with an absorption/reflection coefficient in order to take into account the behavior of the waves when they reach the solid borders of the port. Finally, we denote Λ_o the boundary of Ω over which an outflux of energy is observed. This occurs when an outlet is present in the port, as is the case of the old port of La Rochelle (France). The different types of boundaries of Ω are illustrated in Fig. 1.

Port agitation is directly controlled by waves appearing at its entrance at Λ_i , and no influx of energy is possible from the other borders; the solid structures forming the boundary Λ_w are considered impassible and no exchange of energy can cross it. Furthermore, no energy can appear from the outflux boundary Λ_o . As such, the hydrodynamic model we consider is limited to the inside of the port with local forcings at its entrance.

Some ports, and especially the one at La Turballe, are known to be controlled by low frequency oscillations or seiches (Rabinovich, 2017) driven solely by the energy provided at the port entrance and the geometry of the port. Therefore, a model based on the Helmholtz equations is more suitable to describe the hydrodynamic processes within the port than a theory based on wave propagation.

2.2 Helmholtz model

For simplicity, we place ourselves in the setting of linear wave theory, which provides a first order description of the gravity waves on the surface of the water.

Similar to Isebe et al. (2008b), we consider a surface wave to be the sum of an incident wave and a reflected wave:

$$\eta = \eta_i + \eta_r. \quad (1)$$

The incident wave η_i is simply defined by:

$$\eta_i(x, t) = a_i(x) e^{-i\sigma t}, \quad (2)$$

where the spatial component a_i is defined by:

$$a_i(x) = a_{\max} e^{-ikx}, \quad (3)$$

where, σ is the wave frequency, a_{\max} is the amplitude of the water surface oscillation for this given frequency, and $\mathbf{k} = k(\cos\theta, \sin\theta)$ is a wave number vector, with k the wave number and θ the angle of propagation of the wave. The wave number k is calculated over the domain using the linear dispersion equation (4). Practically, a shallow water approximation can be used as port standing waves are of very significant wave length with respect to mean water depth; h is the water depth and g is the gravitational acceleration.

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh). \quad (4)$$

The reflected wave is defined by:

$$\eta_r(x, t) = a_r(x) e^{-i\sigma t}. \quad (5)$$

We suppose the spatial component a_r of the reflected wave satisfies the following Berkhoff equation (Berkhoff, 1972):

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla a) + \sigma^2 \frac{C_g}{C} a = 0, \quad (6)$$

where C and C_g are respectively the phase velocity and the group velocity of the wave.

Assuming constant depth within the port and $C_g = \frac{1}{2}C$, and noting that $C = \frac{\sigma}{k}$, Eq. (6) can be simplified to yield the following Helmholtz equation:

$$k^2 a + \Delta a = 0. \quad (7)$$

2.3 Eigen mode and domain resonance

Solving Helmholtz equation can also be seen as looking for the eigen modes of the Laplace operator in the domain Ω under some boundary conditions:

$$-\Delta u_\lambda = \lambda u_\lambda + b.c. \quad (8)$$

where $(\lambda(\Omega), u_\lambda(\Omega))$ are the eigen couple functions of the domain Ω which is variable in a context of shape optimization.

In situation where $|\lambda(\Omega)| = \|\mathbf{k}\|^2$, the solution of Eq. (8)

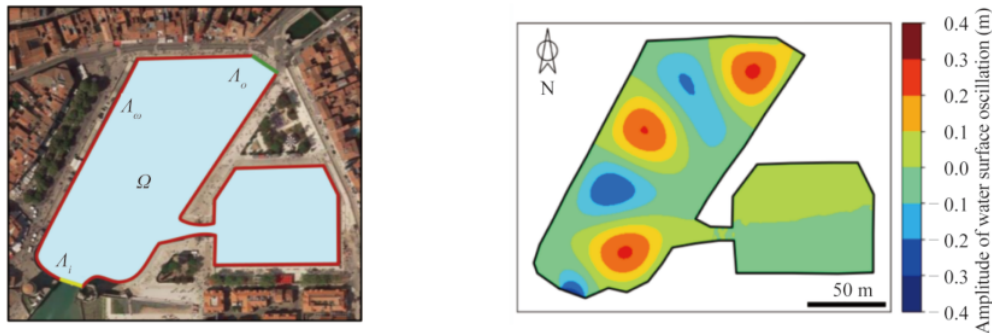


Fig. 1. Left: Illustration of the domain Ω and its borders on the old port of La Rochelle (France). The red borders depict the walls of the port, characterized by absorption and reflection. The yellow border indicates an influx of energy, depending on outer wave conditions. The green border indicates an outflux of energy, where the energy flux driven by dynamics of the water surface exits the port domain through the existing channel. Right: Numerical result of the hydrodynamic model applied to the La Rochelle configuration. The plot represents the resulting total wave field $a = a_i + a_r$ forced by incoming fair-weather waves at an angle 110° through Λ_i , and fully transformed to standing long waves within the port.

is an eigenmode of the Laplace operator. Exciting therefore this mode by a relevant incoming wave forcing will result in an infinite increase of the wave agitation in the basin and subsequently of the corresponding energy. We will address how to deal efficiently with this issue in the optimization section.

2.4 Boundary conditions

Boundary conditions need to be associated with Eq. (7) for the reflected wave field a_r .

On forcing boundaries Λ_i , the total wave field is composed solely of the incident wave field since no reflection occurs. This yields $\eta = \eta_i$ and therefore $a_r = 0$ over Λ_i .

On solid borders Λ_w , a certain portion of the energy of the waves is reflected/absorbed when contact with this boundary is made. This reflective property is directly linked to the physical characteristics of the boundary. In the case of vertical rigid walls, almost all of the energy is reflected. On mild slope boundaries, more energy is absorbed/dissipated; the reflected wave field on these boundaries is equal to a portion of the incident wave field. Over Λ_w , we have $\eta_r = -\gamma\eta_i$, where $\gamma \in [0, 1]$ is a reflection/absorption coefficient. For $\gamma = 1$, the border shows total reflection and $\gamma = 0$ the border shows total absorption. This also yields $a_r = -\gamma a_i$ over Λ_w .

Outlet borders have no direct influence of the wave field within Ω , but energy can leave the domain via this boundary. We therefore apply the homogeneous Neumann boundary condition over Λ_o : $\nabla a_r \cdot \mathbf{n} = 0$, where \mathbf{n} is the outer unit normal and \cdot represents the inner product operator.

2.5 Numerical strategy

The incident wave field is calculated analytically using Eq. (3), whereas the reflected wave field satisfies:

$$\begin{cases} k^2 a_r + \Delta a_r = 0 & \text{over } \Omega \\ a_r = 0 & \text{on } \Lambda_i \\ a_r = -\gamma a_i & \text{on } \Lambda_w \\ \nabla a_r \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{over } \Lambda_o \end{cases} \quad (9)$$

This time-independent elliptic partial differential equation which includes Neumann and Dirichlet boundary conditions is solved using a finite element method. This method was chosen because it allows the use of irregular grids with elements of different sizes and geometries, as well as the possibility of mesh adaptation. Given that a port may present intricate details and complex boundaries, a finite element method was a natural choice. Such a finite element method requires a weak formulation of the considered problem. In our case, the weak formulation of the Helmholtz problem (9) reads:

find a_r such that

$$\int_{\Omega} k^2 a_r v = \int_{\Omega} \nabla a_r \nabla v + \int_{\Lambda_w} \gamma (\nabla a_i \cdot \mathbf{n}) v \quad (10)$$

for all test functions v of the same nature as a_r . We use piecewise linear finite element functions to numerically de-

termine the solution of Eq. (10) over a triangular adapted mesh.

Fig. 1 illustrates the resulting field of the water surface oscillations within the La Rochelle Port with the boundary conditions described previously and in the case of fair weather incoming conditions. We observe the arrival of energy over the forcing boundary Λ_i as well as the presence of bumps and nodes within the port resulted from the interactions of wave oscillations with the boundary walls. We also observe an output of energy at Λ_o where the energy leaves the domain Ω of the port and enters the adjoining canal.

3 Optimal design model

Using the previously described hydrodynamic model, we consider the following optimization approach in the design of ports based on agitation minimization.

3.1 Application to port configuration

We set ψ as the set of parameters defining the possible transformations of the port. Examples include the dimensions of a groin, the angle of a jetty or width of the entrance. The values of these parameters are modifiable and are used to determine the optimal configuration of the port with regard to the minimization of the cost function. Given that ψ determines the shape of the port, it is clear that the domain Ω varies in relation to ψ . Therefore, the computational domain of the hydrodynamic model changes at each step of the optimization method.

The optimization problem consists of minimizing the global agitation of long waves within the port while taking into account the different forcing scenarios that can be observed. The design of the port should reduce long wave agitation whether in the presence of fair weather or storms offshore. It is clear that priority should be given to the minimization of severe wave conditions over calmer ones, since greater damage is observed under stormy conditions. In this study, the frequency of occurrence of a given wave scenario is discarded and instead we focus on the minimization of waves of larger amplitude. Let N be the total number of forcing scenarios considered in the study of the port design. We associate each scenario with an index $n \in \{0, \dots, N\}$. In order to incorporate these different forcing scenarios, we define the local cost functions \mathcal{J}_n associated with a given scenario n and combine them in a purposeful manner to form the global function \mathcal{J} to be minimized.

3.2 Choice of cost function

For a given forcing scenario n , we consider the following local cost function:

$$\mathcal{J}_n(\psi) = \frac{1}{K(\mathcal{P})} \frac{1}{|\Omega(\psi)|} \int_{\Omega(\psi)} \mathcal{E}_n(\psi, \mathbf{x}) \mathcal{P}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (11)$$

where ψ is the parameterization of the port modifiable in the search of an optimal configuration and $|\Omega(\psi)|$ is the surface area of $\Omega(\psi)$. The quantity $\mathcal{E}_n(\psi, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \rho g [a_n(\psi, \mathbf{x})]^2$ is the

total surface energy defined over the domain Ω and associated with the forcing scenario n and the configuration ψ of the port. Here, ρ is the density of the water, g is the gravitational acceleration and $a_n(\psi)$ the amplitude of the waves calculated over $\Omega(\psi)$ associated with the forcing scenario n and the configuration ψ of the port. The function \mathcal{P} , named spatial weight function, enables us to prioritize the minimization of the agitation over certain preferred zones of the port, with $K(\mathcal{P}, \Omega(\psi)) = \int_{\Omega(\psi)} \mathcal{P}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. In practice, these zones are defined by traditional port engineers in order to focus the minimization of agitation in zones nearby mooring stations for boats or in which high maritime circulation is expected. Examples of spatial weight functions include $\mathcal{P}_0(\mathbf{x}) = 1$, where no zone is prioritized over another, or alternatively

$$\mathcal{P}_1(x, y) = \exp\left\{-A\left[(x - x_A)^4 + (y - y_A)^4\right]\right\}, \quad (12)$$

where a circular zone within the port is considered a priority, the center of which is given by the coordinates (x_A, y_A) and A defines its radius.

The global cost function \mathcal{J} is a linear combination of the local cost functions defined by Eq. (11), where the scalar coefficients are determined by the wave energy at the forcing boundary. Let $a_i(n)$ be the amplitude of the incoming waves (defined on Λ_i) associated with the forcing scenario n , and the global cost function to be minimized in the search

of the optimal solution is defined as:

$$\mathcal{J}(\psi) = \frac{\sum_{n=1}^N a_i(n) \mathcal{J}_n(\psi)}{\sum_{n=1}^N a_i(n)}. \quad (13)$$

The choice of this global cost function ensures priority to be given to the minimization of the local cost functions associated with the more extreme weather scenarios. These scenarios have the ability to cause the most damage within the port, so it is natural to design a global cost function capable of prioritizing the more severe weather conditions.

3.3 Numerical strategy

Fig. 2 illustrates the numerical strategy put in place in the search of the optimal port configuration. The model explores the different port configurations allowed by the user. For each forcing scenario, wave agitation is calculated using the hydrodynamic model presented in Section 2. This includes calculating the incident wave analytically and solving the Helmholtz equation with a PDE solver for the reflected waves. The local cost function Eq. (11) can then be determined. Once all the local cost functions have been calculated, it is then possible to determine the global cost function \mathcal{J} defined by Eq. (13). It is then possible to determine the optimal port configuration with regards to \mathcal{J} , which concludes the simulation.

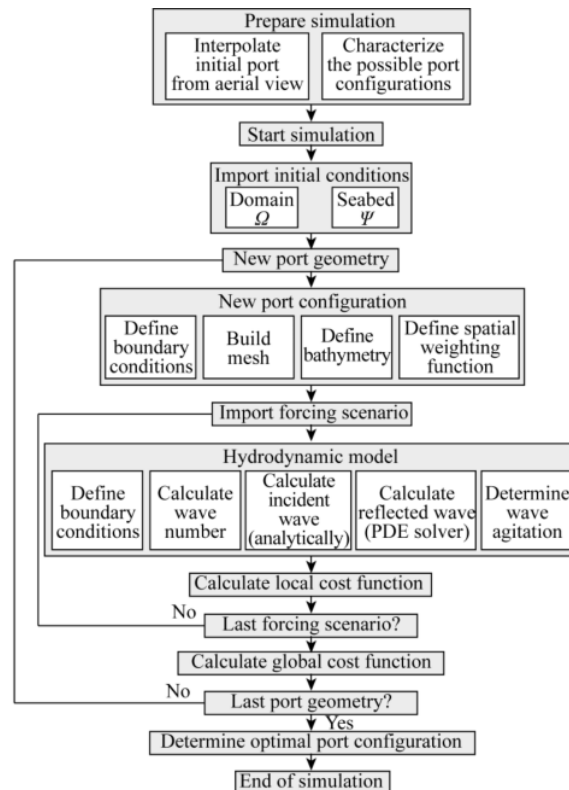


Fig. 2. Numerical strategy applied to the search of the optimal configuration of La Turballe Port.

3.4 Managing resonance

We mentioned the necessity of making sure that the solution of the Helmholtz equation is not an eigenmode of the Laplace operator in the domain as these situations lead to artificially high level of wave energy in the basin and therefore the functional.

Obviously, one cannot imagine computing, at each iteration of an optimization procedure, all the eigenmodes of the Laplace operator for the corresponding domain to make sure that the corresponding energy level is not artificially driven by some resonance phenomena. This would increase dramatically the computation time and is thus opposite to the optimization philosophy.

An alternative method must be set to control resonance efficiently. The method chosen aims to reducing the energy of the port in the case of an energy exceeding a given threshold, here 10^5 J, which is by far a maximum energy that could be observed in the port. This simple method assumes that any huge amount of energy observed in the port must be due to numerical resonance and therefore must be reduced to secure more realistic results.

Resonance is not often observed in real basin because wave-wave interactions reduce the concentration of energy on one specific frequency, preventing this situation from occurring. However, the hydrodynamical model of this study is based on many superimposed computations of the linear Helmholtz equation forced by monochromatic waves, which does not account for non-linear processes, which explains the possible high energy levels to control.

4 Application to La Turballe Port

In this section, we have applied the previous optimization strategy to the port of La Turballe (France). The present work accompanies a more traditional engineering approach in finding the best configuration satisfying all parties involved. Contrarily to the port preciously mentioned, this port does not possess an outlet boundary.

4.1 Presentation of the port

Situated along the Atlantic coast in the North-West of France, the port of La Turballe is home to a wide range of maritime activities, including the presence of a marina, numerous fishing facilities as well as a ship repair services. With the increase of these activities and the arrival of others, the department of LoireAtlantique wishes to increase the available surface area of the port. This project accompanies the plan of introducing an offshore wind turbine farm, since its maintenance center is expected to be installed at the La Turballe Port. Its expansion is therefore crucial for the well-being of users of the port. The objective of the project is to expand the port in such a way that the agitation within the port is reduced, thereby reducing the damages to moored boats. Damages caused by excessive agitation within the port include sinking, stranding, colli-

sions, and overturning. The aim of this study is to alter the geometry of the port while verifying the following conditions: the surface area of the port must be increased and the agitation of the long waves within the port must be reduced.

Usually, waves customarily arrive nearby a port with some incidence (Wu and Liu, 1985; Booij and Holthuijsen, 1987; Niemeyer et al., 2000). However, in light of the orientation of the port of La Turballe with regard to the mean orientation of the coast and the incoming wave spectrum in this area, no direct waves can enter the port. Furthermore, the large rounded jetty head located at the seaward side of the port entrance reflects any direct incoming waves. It also drives a significant diffraction pattern of any incoming wave forcing that result in the scattering of the wave field towards the shore, but not in the direction of the inner port. This claim is supported by observational data of said port. Therefore, the only source of external energy generating port agitation is not that of the direct wave spectrum, but the energy resulting from the transformation of a part of the wave spectrum into low frequency oscillations at the port entrance. This is the primary reason why the dimensioning of La Turballe is a question of low frequency agitation, and not a problem relative to the direct impact of oceanic waves. To handle this classic situation in harbours, we shoaled the deep water wave conditions towards the port entrance, calculated the energy brought by the waves at this point, and we fed our model directly with an equivalent wave forcing representative of such energetic conditions assuming that the totality of energy associated with the incoming waves is transferred by diffraction and wave spectrum transformation to the port entrance.

4.2 Setting

Through classic engineering, it was established that the best course of action was through the installation of a jetty and a mole to produce a bottleneck effect at the entrance of the port. As illustrated in Fig. 3, the jetty extends in an east-western direction to form a basin. The mole is attached to the existing structure occupied by parking facilities.

The dimensions of these structures will be determined using optimization theory to ensure minimal agitation with-



Fig. 3. Illustration of La Turballe Port. Left: The port in its initial state. Right: The port with the two additional structures considered in this study: Mole A and Jetty B.

in the port. However, certain constraints are imposed in order to guarantee practical results. These constraints include the location of the mole along the existing wall, the dimensions of the mole, the location of the jetty (the extremity must be fixed to the existing port and cannot be installed in waters deeper than 5.5 m) and the dimensions of the jetty. The structures must also be sufficiently elevated to be considered impassable by wave overtopping. Each structure is characterized by the dissipation factor γ defined in Eq. (9). In order to investigate the most critical scenario, we consider the boundaries to be fully reflective by setting $\gamma = 1$.

The bathymetric properties within the port have been observed to be stable, with a depth ranging between 1.5 m and 3.5 m. We therefore omit the changes to the seabed from the optimization simulation.

In order to conduct this study, we were provided with wave scenarios that were deemed representative of the forcing conditions of the port. These scenarios were given in the form of statistical data of the directional waves (significant wave height, peak period, average direction, etc.) and did not include the probability of occurrence of each scenario. Given the nature of our study which prioritizes the minimization of extreme weather waves (with the introduction of the weighted global cost function), the probability of occurrence of each scenario is irrelevant. These data could not be used in the initial state in the optimization process, because they were attained at different depths surrounding the port. This results in forcing scenarios that cannot be easily compared. The idea is therefore to propagate the wave conditions to the entrance of the port in a classic manner and using a regional wave simulation tool, TELEMAR (Hervouet, 2007; Galland et al., 1991). Certain assumptions involving the nature of the waves and the configuration of the port were made to simplify the calculations, but have no consequences on the results aside from a slight increase in wave agitation. Since this study was conducted for a worst-case scenario, it makes no difference if a little more energy enters the port. This guarantees additional security on the final port configuration.

This process ultimately provided the study with twenty-eight different forcing scenarios, representing conditions ranging from fair weather to severe storms. These scenarios are given in the form of three parameters: the frequency, angle and amplitude of the incoming wave (f, θ, a_{\max}). These are then plugged into the hydrodynamic model presented in Section 2, noting that $\omega = 2\pi f$, to calculate the wave field over the domain.

By way of illustration, fair weather conditions resemble $(f, \theta, a_{\max}) = (0.00373, 1.47, 0.344)$, whereas the more extreme conditions are of the like of $(f, \theta, a_{\max}) = (0.0261, 1.25, 3.75)$. Some scenarios may exceed the operating limit given by the ship mooring stability conditions (PIANC, 1995). The inclusion of these scenarios ensures port stability, in so far as possible, even in the most extreme forcing

scenarios.

4.3 Parameterization of the port

For illustrative purposes, we present the search for the optimal configuration of the port using two degrees of freedom only. We define the set of parameters by $\psi = (\alpha, \beta)$, where α represents the width added to Mole A along the existing wall and β represents the length of the extension of Jetty B. Fig. 4 illustrates the definitions of α and β . The choice of these parameters originates from the expertise of classic port engineering, and incorporates the required design constraints. The total width of Mole A must measure between 30 m and 180 m, whereas the length of the jetty must measure between 350 m and 550 m.

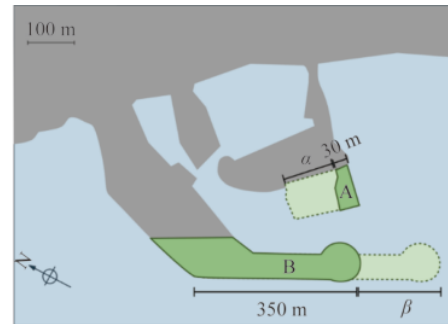


Fig. 4. Illustration of the two degrees of freedom (α and β) used in the search of the optimal solution.

The optimization problem becomes: find $\psi = (\alpha, \beta)$ such that $\mathcal{J}(\psi)$ is minimal and the following constraints are met: $0 \leq \alpha \leq 150$ and $0 \leq \beta \leq 200$.

Following the discussion with the industrial experts leading the study of the redesign of La Turballe Port, it was established that the minimization of wave agitation should be concentrated in the south basin of the port. This choice is natural given the dense network of boats and the plan to add a dock and/or wharf to this area. Therefore, the cost function \mathcal{J} , defined by Eq. (11), features the spatial weighting function \mathcal{P}_1 . This function, defined by Eq. (12), is illustrated in Fig. 5 over $\Omega(\psi)$ for a given parameterization ψ of the port.

5 Results

In this section, we present the results of the hydrodynamic model presented in Section 2 applied to the port of La Turballe, as well as the results of the optimization calculations.

5.1 Hydrodynamic simulations

Fig. 6 illustrates the amplitude of the wave field within the La Turballe Port under moderately severe weather conditions. We observe that the energy originates from the forcing boundary at the entrance of the port. Crest and troughs are observed as the waves propagate throughout the port re-

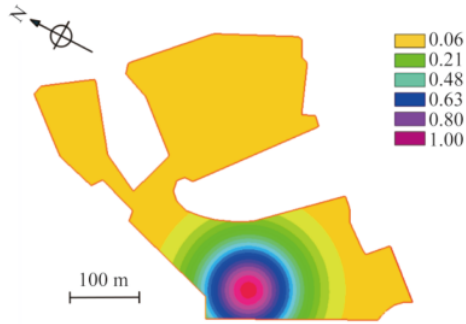


Fig. 5. Spatial weight function \mathcal{P}_1 defined over $\Omega(\psi)$ for a given parameterization ψ of the La Turballe Port.

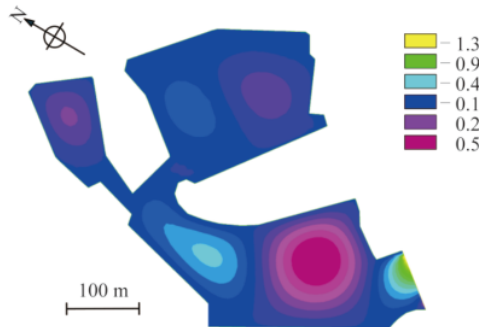


Fig. 6. Oscillation of waves within the port of La Turballe, for a given parameterization of the port. The wave field results from forcing conditions associated with scenario $n = 23$ and characterized by $(f, \theta, a_{\max}) = (0.0186, 1.25, 1.50)$.

acting to the solid borders and show signs of seiche-like behavior.

5.2 Optimization simulations

The local cost function associated with forcing scenario $n = 4$ is given in Fig. 7. Here the forcing conditions, given by $(f, \theta, a_{\max}) = (0.0261, 1.47, 0.172)$, depict fair weather conditions. Several local minima are observed, which demonstrate the necessity of adopting an optimizing program capable of detecting a global minimum. Otherwise,

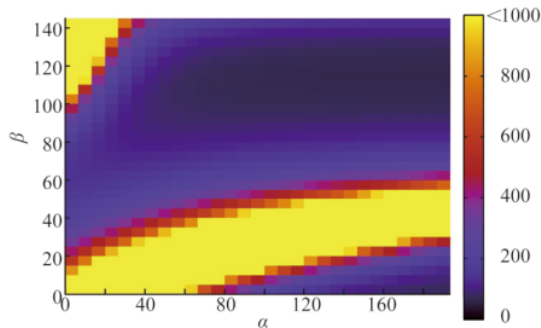


Fig. 7. Local cost function $\mathcal{J}(\alpha, \beta)$ with only one forcing scenario considered and several local minima located at the dark purple regions of the graph.

problems may occur, especially if the number of design parameters is increased.

Fig. 8 represents the values of the cost function \mathcal{J} defined by Eq. (13) with respect to the parameters α and β . The minimum of \mathcal{J} is marked by a cross and is located away from the borders. Despite the presence of several local minima in one forcing scenario, the linear combination of scenarios that form the global cost function leads to a unique global minimum. This may differ depending on the choice of parameters ψ . We deduce that the study of the optimal solution with two degrees of freedom provides the following results: $\alpha^* = 90$ and $\beta^* = 107$. We notice great variability of the solution over the α axis, whereas over β , the function is relatively independent. This suggests that the decrease of wave agitation within the port is greatly influenced by dimensions of the mole and less so by the extension of the jetty.

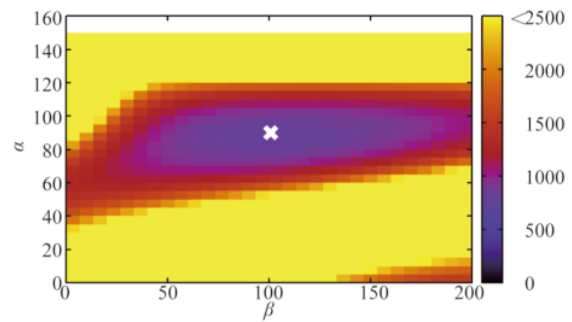


Fig. 8. Cost function $\mathcal{J}(\alpha, \beta)$. The optimal solution is indicated by a cross. In this case, we have a unique global optimum and a local minimum.

The corresponding configuration is given in Fig. 9. The jetty is extended by 107 m and the mole is widened by 90 m.

5.3 Energetic state of the port

Fig. 10 represents the values of the local cost function \mathcal{J}_n with regard to the 28 different forcing scenarios here represented on the X -axis by their reference number. Each point plotted on the figure corresponds to the value of the function \mathcal{J}_n calculated for a given configuration of the port and a given forcing scenario n .

We therefore have a graphical representation of the set of the values of the functional \mathcal{J}_n for all scenarios and all configurations explored by optimization simulation. Along a vertical line (i.e. for a given forcing scenario), we see the values of \mathcal{J}_n for the scenario n , according to different configurations. The lowest point corresponds to the local optimal configuration for this forcing scenario. The red marker indicates the energy \mathcal{J}_n associated with the configuration (α^*, β^*) for each of the forcing scenarios. For each of the 28 cases, this marker is situated in the lower range of the possible values, showing that the minimum of the global cost function \mathcal{J} is equivalent to the minimum of each of the local cost functions \mathcal{J}_n .



Fig. 9. Analysis of the efficiency of the global optimal solution, with the parameters being limited to two degrees of freedom (α, β) and forced by the 28 scenarios. The diagram represents the variation of the global cost function \mathcal{J} with regard to the forcing scenario and for each possible port configurations (red markers correspond to the values of \mathcal{J} associated with each parameterization of the port, green corresponds to the values of \mathcal{J} associated with the global optimal solution).

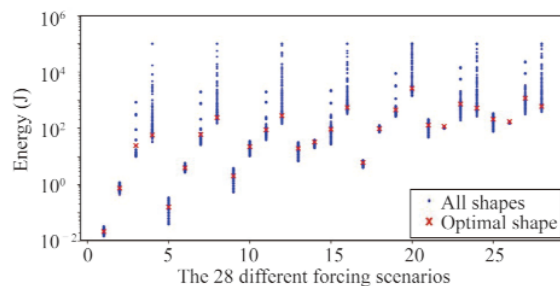


Fig. 10. Inner border (red) of the optimal configuration of the port, resulted from the minimization of energy. We observe an extended jetty and a wide mole.

In each case, the optimal solution has significantly reduced the quantity of energy within the port. Let us take the example of Scenario 4. The energy within the port can potentially be in the order of 105 J; this corresponds to a wave height of 4.5 m. The optimal configuration, marked by a red point, results in an energy of 58 J, which corresponds to a wave height of 0.12 m. This reduction of 4.38 m in wave height demonstrates the efficiency of the optimization model in determining the best configuration of the port. As the lowest possible energy of the port for Scenario 4 is 33 J, which corresponds to a wave height of 0.082 m, we can conclude that the optimization model provides a quasi-optimal solution for this forcing scenario. This reasoning can be applied to each forcing scenario, which leads us to conclude that the optimization model provides a solution to reduce the agitation in the port for all types of forcing conditions.

6 Discussion

Despite finding an optimal solution to reduce the agitation of the water within the port whilst increasing its exploitable surface area, the solution may be deemed unfit if it

has an undesirable effect on its environment. A study has therefore been conducted so as to determine the morphological impact of the new configuration on the surrounding shoreline. Depending on the results, the optimal solution may or may not be retained.

6.1 GenCade model

The study of the morphological effect of the newly designed port was modeled by GenCade (Hanson et al., 2011), a numerical model developed by the CIRP and the Regional Sediment Management Program which combines the engineering processes of GENESIS (Hanson and Kraus, 1989) and the long-term, regional transport processes of Cascade (Connell et al., 2007).

This model simulates the evolution of the shoreline and the transport of sand over time. Capable of incorporating different engineering structures, such as jetties, breakwaters, and seawalls as well as other activities such as beach nourishment, this model is often used to determine the consequences of introducing man-made structures to the coastal environment. Examples of this model being applied to the study of shoreline dynamics include Frey et al. (2012b), Schrader et al. (2016) and Frey et al. (2012a).

6.2 Setup

GenCade was applied to an area surrounding La Turballe Port, covering a distance of over 5 km. Two set of simulations were conducted in order to compare the evolution of the shoreline with and without the jetty and mole studied in Section 4. Fig. 11 shows the two initial shoreline conditions used in the simulation. The blue line indicates the shoreline with the newly determined jetty and mole whereas the red delimits the shoreline in its actual state. Characteristic forcing conditions of the area were applied over the duration of 30 years.

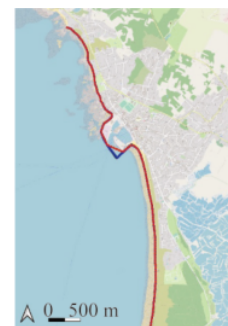


Fig. 11. Two initial shoreline conditions of La Turballe Port.

The aim of this simulation was to confirm that the re-design of the port has little influence on the surrounding shoreline in long term. We cannot compare simulation with field data since the simulations are purely forecasts. We set the Gencade model with typical parameters for the beaches surrounding La Turballe, and a comparison was performed

with and without the port transformation. The modeling of the long term shoreline dynamics is relative on account of Gencade using a purely linear formalism (Pelnard Considère equation, cf. Pelnard-Considère, 1956), but does provide a trend.

6.3 Results

Fig. 12 shows the results of two simulations conducted by GenCade, in the area surrounding the port. Beyond this area, no changes to the shoreline are observed, arguing that the new layout of the port only impacts the surrounding shoreline within a 150 m radius, and no long term impact can be expected.



Fig. 12. Results of the long term morphodynamic simulation with and without the proposed structures. The simulations without the redesign of the port are given by the dotted lines: yellow is the initial shoreline and red is the shoreline after the 30-year simulation. The simulations incorporating the redesign of the port are given by the solid lines: black is the initial shoreline and blue is the shoreline after the 30-year simulation.

In the vicinity of the port, two areas of discrepancy can be observed. The first is located in the area where the beach reaches the port. However, the difference between the two configurations does not exceed 15 m over the 30-year period. The second zone of interest is situated on the border of the jetty exposed to the ocean waves. Here, a difference of several meters is observed. Given that this border is a solid wall and cannot vary over time, the discrepancy can be explained as the result of numerical inaccuracy against such solid boundary condition. Given the results provided by GenCade, we can conclude that redesigning the port to include a jetty and mole does not impact the shoreline dynamics of the surrounding area.

7 Conclusions

The motivation behind this numerical model is not to determine the ultimate port design, which would require extensive verification and validation procedures, but to provide a description of a new rapid and cost effective optimization tool, with an application to La Turballe Port. This tool was designed to accompany classical engineering approaches and should not be the sole component of the port design study; the Verification and Validation (V&V) component is undeniably required when approving a new port

design. However, this is beyond the scope of the numerical work presented here. In this paper, we demonstrate that the rapidity and adaptiveness of the model allows the engineers in charge to focus on practical solutions efficiently. They should subsequently perform a thorough V&V of the considered port configurations.

The final redesign of the port promoted by the procedure satisfies the constraints imposed, is a good solution for any incoming forcing considered and thus delineates the best solution ever. This solution is consistent with classic engineering. Despite the calculations being centered on the minimization of wave agitation and the increase of exploitable surface area, the optimal solution also has the advantage of having no significant impact on the surrounding shoreline dynamics. This work demonstrates that numerical optimization may be quick and efficient in the identification of port solutions consistent with classic engineering even in the context of complex problems.

Acknowledgements

This work describes a full textbook case of port engineering redesigned by optimization theory combined with a posteriori management of an environmental question. The concepts and a comprehensive methodology are presented on the very classic port of La Rochelle; then a realistic application is performed for the redesign of La Turballe Port. The optimal solution presented in Section 4 where an elongated jetty and a widened mole is preferred is determined by optimization theory.

Right and permissions

Open Access This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

References

- Alises, A., Molina, R., Gómez, R., Pery, P. and Castillo, C., 2014. Overtopping hazards to port activities: Application of a new methodology to risk management (port risk management tool), *Reliability Engineering & System Safety*, 123, 8–20.
- Allsop, N.W.H. and Hettiarachchi, S.S.L., 1989. *Wave Reflections in Harbours: Design, Construction and Performance of Wave Absorbing Structures*, HR Wallingford, Oxford.
- Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction – diffraction.

- tion, *Proceedings of the 13th International Conference on Coastal Engineering*, American Society of Civil Engineers, Vancouver.
- Booij, N. and Holthuijsen, L.H., 1987. Propagation of ocean waves in discrete spectral wave models, *Journal of Computational Physics*, 68(2), 307–326.
- Bouharguane, A., Azerad, P., Bouchette, F., Marche, F. and Mohammadi, B., 2010. Low complexity shape optimization & a posteriori high fidelity validation, *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 13(4), 759–772.
- Bouharguane, A. and Mohammadi, B., 2012. Minimisation principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow sea, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 26(3), 163–172.
- Castillo, E., Losada, M.A., Mínguez, R., Castillo, C. and Baquerizo, A., 2004. Optimal engineering design method that combines safety factors and failure probabilities: Application to rubble-mound breakwaters, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 130(2), 77–88.
- Connell, K.J., Larson, M. and Kraus, N.C., 2007. Morphologic modeling of multiple barrier island breaches for regional application, *Proceedings to the Sixth International Symposium on Coastal Engineering and Science of Coastal Sediment Process*, (ASCE), 2011–2073.
- Cornett, A. and Baker, S., 2018. Value of 3D physical modeling in harbor design – gateway harbor Chicago case study, *Proceedings of the 34th PIANC World Congress*, PIANC, Panama.
- Frey, A.E., Rosati III, J., Connell, K.J., Hanson, H. and Larson, M., 2012a. Modeling alternatives for erosion control at Matagorda county, Texas, with Gencade, *Proceedings to the 33rd International Conference on Coastal Engineering 2012*, Coastal Engineering Research Council, Santander, Spain.
- Frey, A.E., Munger, S., Williams, G.L., Wutkowski, M.J. and Conner, K.B., 2012b. *GenCade Application at Onslow Bay, North Carolina*, U.S. Army Engineer Research and Development Center, Coastal and Hydraulics Laboratory, Vicksburg.
- Galland, J.C., Goutal, N. and Hervouet, J.M., 1991. TELEMAR: A new numerical model for solving shallow water equations, *Advances in Water Resources*, 14(3), 138–148.
- Groenveld, R., 1983. *Harborsim, A Generally Applicable Harbour Simulation Model*, TU Delft, Section Hydraulic Engineering, Delft.
- Hanson, H., Connell, K.J., Larson, M., Kraus, N.C., Beck, T.M. and Frey, A.E., 2011. Coastal evolution modeling at multiple scales in regional sediment management applications, *Proceedings of Coastal Sediments 2011 Conference*, World Scientific, Miami, pp. 1920–1932.
- Hanson, H. and Kraus, N., 1989. Genesis: Generalized model for simulating shoreline change, *Proceedings of the 30th International Conference on Coastal Engineering*, pp. 3762–3773.
- Harris, G.A., Anderson, M., Schroer, B.J., Landrum, B. and Möller, D.P.F., 2009. A simulation model for determining container throughput at an expanding seaport, *Proceedings of the 6th Vienna International Conference on Mathematical Modeling MATHMOD2009*, Vienna, Austria.
- Hervouet, J.M., 2007. *Hydrodynamics of Free Surface Flows: Modeling with the Finite Element Method*, John Wiley & Sons, Ltd., New York.
- Hewitt, C.L. and Martin, R.B., 2001. *Revised Protocols for Baseline Port Surveys for Introduced Marine Species: Survey Design, Sampling Protocols and Specimen Handling*, CSIRO Marine Research, Hobart.
- Isebe, D., Azerad, P., Bouchette, F., Ivorra, B. and Mohammadi, B., 2008a. Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(8), 1262–1277.
- Isebe, D., Azerad, P., Mohammadi, B. and Bouchette, F., 2008b. Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact, *Coastal Engineering*, 55(1), 35–46.
- Isebe, D., Bouchette, F., Mohammadi, B., Azerad, P., Lambert, A., Bujan, N., Grasso, F. and Michallet, H., 2008c. Une nouvelle approche pour la protection des plages: Applications à la plage du lido de sète, *Proceedings of the Xemes Journées Génie Civil-Génie Cotier*, Revue Paralia, Sophia-Antipolis, pp. 263–272. (in French)
- Ivorra, B., Isebe, D. and Mohammadi, B., 2005. Optimisation globale à complexité réduite: application à divers problèmes industriels, *Proceedings of the 7e Colloque National en Calcul des Structures*, CSMA, Giens, France. (in French)
- Jahren, C.T. and Ishii, S., 1995. Emergency ferry landing design, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 121(4), 216–222.
- Joubert, F.J. and Pretorius, L., 2020. Design and construction risks for a shipping port and container terminal: Case study, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 146(1), 05019003.
- Li, P.F. and Zhou, X.J., 2015. Mechanical behavior and shape optimization of lining structure for subsea tunnel excavated in weathered slot, *China Ocean Engineering*, 29(6), 875–890.
- Lillycrop, L.S. and Briggs, M.J., 1992. *Capabilities in Harbor Design and Monitoring: A Case Study*, US Army Engineer Waterways Experiment Station (WES), Coastal Engineering Research Center (CERC), Vicksburg, Mississippi, pp. 11.
- McCartney, B.L., 1985. Floating breakwater design, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 111(2), 304–318.
- Mohammadi, B. and Bouchette, F., 2014. Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics, *Computers & Fluids*, 89, 78–87.
- Mohammadi, B. and Bouharguane, A., 2011. Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters, *Computers & Fluids*, 40(1), 291–298.
- Mohammadi, B. and Pironneau, O., 2009. *Applied Shape Optimization for Fluids. Numerical Mathematics and Scientific Computation*, second ed., Oxford University Press, Oxford.
- Mohammadi, B. and Saia, J.H., 2003. *Pratique de la Simulation Numérique*, Dunod. (in French)
- Niemeyer, H.D., Kaiser, R. and Weiler, B., 2000. Design wave evaluation for coastal protection structures in the Wadden Sea, *Proceedings of the 6th International Workshop on Wave Hindcasting and Forecasting*, Environment Canada, Monterey.
- Pachakis, D. and Kiremidjian, A.S., 2003. Ship traffic modeling methodology for ports, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 129(5), 193–202.
- Pelnaud-Considère, R., 1956. *Essai de théorie de l'évolution des Formes de Rivage en Plages de Sable et de Galets*, Société hydro-technique de France, Paris, pp. 289–298. (in French)
- PIANC, 1995. *Criteria for Movements of Moored Ships in Harbours: A Practical Guide*, PIANC, Brussel.
- Rabinovich, A.B., 2017. Seiches and harbor oscillations, in: Kim, Y.C. (ed.), *Handbook of Coastal and Ocean Engineering*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd., Singapore, pp. 243–286.
- Saghi, H., Ning, D.Z., Cong, P.W. and Zhao, M., 2020. Optimization of baffled rectangular and prismatic storage tank against the sloshing phenomenon, *China Ocean Engineering*, 34(5), 664–676.
- Sawicki, A., Kulczykowski, M., Robakiewicz, W., Mierczyński, J. and Hauptmann, J., 1998. New type of bottom protection in harbors-

- design method, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 124(4), 208–211.
- Schrader, M.H., Douglass, E.C. and Lillycrop, L.S., 2016. *Regional Sediment Management Strategies for the Vicinity of St. Augustine Inlet, St. Johns County, Florida*, U.S. Army Engineer Research and Development Center, Coastal and Hydraulics Laboratory, Vicksburg.
- Smith, C.D., 1988. Outlet structure design for conduits and tunnels, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 114(4), 503–515.
- Tian, Z.L., Sun, Z.C., Liang, S.X. and Wang, X.G., 2018. Inverse calculation of wave-absorbing structure dimensions based on extended ANFIS model, *China Ocean Engineering*, 32(5), 501–513.
- Trbojevic, V.M. and Carr, B.J., 2000. Risk based methodology for safety improvements in ports, *Journal of Hazardous Materials*, 71(1–3), 467–480.
- Wang, D.T., Ju, L.H., Zhu, J.L., Wang, Z., Sun, T.T. and Chen, W.Q., 2017. Experimental study on mean overtopping of sloping seawall under oblique irregular waves, *China Ocean Engineering*, 31(3), 350–356.
- Wang, G., Zheng, J.H., Liang, Q.H., Zhang, W. and Huang, C., 2015. Theoretical analysis of harbor resonance in harbor with an exponential bottom profile, *China Ocean Engineering*, 29(6), 821–834.
- Wu, C.S. and Liu, P.L.F., 1985. Finite element modeling of nonlinear coastal currents, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 111(2), 417–432.
- Wu, G.W., Wu, H., Wang, X.Y., Zhou, Q.W. and Liu, X.M., 2018. Tidal turbine array optimization based on the discrete particle swarm algorithm, *China Ocean Engineering*, 32(3), 358–364.
- Zhang, W.C., Liu, H.X., Zhang, L. and Zhang, X.W., 2016. Hydrodynamic analysis and shape optimization for vertical axisymmetric wave energy converters, *China Ocean Engineering*, 30(6), 954–966.

1.6 2021: Pre-submit: Application of Opti-Morph: Optimized beach protection by submerged geotextile tubes [6]

Application of Opti-Morph: Optimized beach protection by submerged geotextile tubes

Megan Cook^{1,3,*}, Frédéric Bouchette¹, Bijan Mohammadi², Nicolas Fraysse³

Abstract

This paper illustrates the potential of Opti-Morph, a new morphodynamic model based on wave-energy minimization driven morphodynamics. Given the fast simulation times, this model is ideal for determining the optimal position of submerged breakwaters to maximize efficiency. This paper focuses on the study of the location of submerged geotextile tubes for optimal beach protection, while taking into account the evolution of the seabed.

Keywords: coastal engineering, Opti-Morph, optimization, breakwater

1. Introduction

The question of coastal protection is of crucial importance, and breakwaters are a typical example of means to approach this. Designed to absorb/dissipate the energy of incoming waves and therefore reduce coastal erosion, breakwaters date back to the Roman Empire and have been used for coastal protection ever since [1]. Different types of breakwaters exist depending on whether they are emerged, floating [2] or submerged [3]. Examples include rubble-mound, caissons, pontoons, and geosynthetic tubes. The nature of the considered breakwater depends on many factors such as wave conditions, water depth, characteristics of the seabed foundations, cost

*Corresponding author

Email addresses: megan.cook@umontpellier.fr (Megan Cook),
frederic.bouchette@umontpellier.fr (Frédéric Bouchette),
bijan.mohammadi@umontpellier.fr (Bijan Mohammadi), nicolasfraysse@brl.fr
(Nicolas Fraysse)

¹GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

²IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

³BRL Ingénierie, Nîmes, France

Preprint submitted to

September 20, 2021



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



of construction and maintenance, as well as visual and environmental impacts. Different characteristics of the breakwater need to be studied. This includes length and width of the structure, orientation, and location with regard to the shoreline, shape. Given the many parameters surrounding the design of breakwaters, i.e. length, width, shape, location, orientation, etc., it is natural to consider numerical simulations to accompany the investigation.

This paper details the numerical study of submerged breakwaters made of geotextile material. For the sake of simplicity, this study focuses on one breakwater parameter: its location along the cross-shore profile. The objective is to determine the optimal position of a geotextile tube for minimal beach erosion along the cross-shore profile and to do so, optimization methods are required.

The use of optimization methods for coastal protection can easily be found in the literature, such as [4, 5] for the protection of ports, [6, 7] in the case of the design of seawalls, and [8, 9, 10] for the study of breakwaters. Geotextile tubes, or geotubes, have already been the subject of an optimization study on a static background [11, 12], where the authors sought the optimal shape of these coastal protection structures. Here, we search for the optimal location of the seabed, while taking into account the morphodynamic response of the seabed, the latter being determined by the numerical model, Opti-Morph [13].

Opti-Morph is a new morphodynamic model, based on the theory that shallow-water seabeds react to the surface waves and evolves in an effort to minimize a certain hydrodynamic quantity. This concept was first formulated in the works of [14, 15, 16, 17], in a somewhat theoretical context. The numerical model Opti-Morph was then developed (cf. [13]), in an effort to apply this concept to experimental and in situ configurations and validate the theory. Advantages of this numerical model include its low number of hyperparameter and their robustness, its fast simulation times. The work of [13] demonstrates the potential of this up-and-coming morphodynamic model, with both short-term and long-term simulations.

This paper presents the potential of this new morphodynamic model, by applying it to the problem of the positioning of submerged geotextile tubes. First, we define the optimization problem regarding the position of the breakwater for optimal coastal protection, with the definition of the domain, the objective function, and constraints. Next, we offer a brief description of the Opti-Morph model, which is based on wave energy optimization and thus requires the definition its own cost function. A description of the coupling of

both optimization problems is approached in section 4 before presenting the numerical results.

2. Geotube Position Optimization

2.1. Description

Geotextile tubes are made from high-strength geosynthetic fabric and are increasingly used in coastal and riverine applications. They are often filled hydraulically with a slurry of sand and water, although many other materials have been used. Sand-filled flexible tubes of geotextile material are used for their ability to allow water to pass through but maintain the sand within. Geotextiles tubes are for coastal protection by the means of revetments, protection dykes, groynes, and offshore breakwaters [18, 19], the latter being the focus of this study. Like other types of offshore emerged breakwaters, geotextile tubes are designed to dissipate the waves by creating local shallow water conditions forcing waves to prematurely break, thus, ensuring less energy arrives at the coast and in doing so protecting the shoreline from erosion. Geotextile tubes have been deployed all over the world, on account of their low costs and less ecological and environmental impact [20, 21], having little effect on the local marine fauna and flora. Their easy installation and maintenance, with potentially locally sourced materials and their low visual impact also play a role in their increasing popularity.

One such example is the introduction of submerged geotextile breakwaters on the Northern coast of Yucatan, Mexico [22, 23]. Beaches were sustaining erosion of approx. 1 m per year, with many beaches being almost fully eroded. Several geotextile tubes were installed 10 m and 30 m from the shoreline with promising results. Similarly, geotextile tubes were deployed for the coastal protection of Young-Jin beach on the east coast of Korea [24, 25]. The situation was so critical shoreline roads and other public properties were being damaged. Eight geotubes tubes were deployed along the beach at 90 m–100 m from the shoreline, with a water depth of 3 m. Field monitoring shows an extension of up to 7.6 m of the shoreline and an accumulation of sand around the areas covered by the geotextile tube. On the Lido of Sète, France, on the Mediterranean Sea, submerged geotextile tubes were also installed [26, 11]. Here, they were deployed approximately 350 m from the beach with a depth of 4 m and induced an important enlargement of the beach. Extensive studies were made prior to the installation. In particular, the location of the geotubes with regards to the coastline. In the three

previous examples, the position of the structures ranges between 10 *m* and 350 *m* from the shore.

Here, we study the optimal location of the geotube using a numerical model. To do so, we must define the quantity to be minimized as well as the physical constraints that arise.

2.2. Geotube Deployment Objective Function

The search for the optimal geotube location depends on the choice of the cost function, or objective function to be minimized or maximized. Several cost functions can be considered depending on the main objective of the deployment, whether it's environmental, financial or physical (e.g. limiting beach erosion or reducing wave energy). It may also be a combination of several factors. In this study, we seek to minimize the position of the shoreline, in order to prevent erosion and encourage accretion. For illustrative purposes, we consider one geotube parameter, its location along the cross-shore profile, but additional parameters can be incorporated if desired.

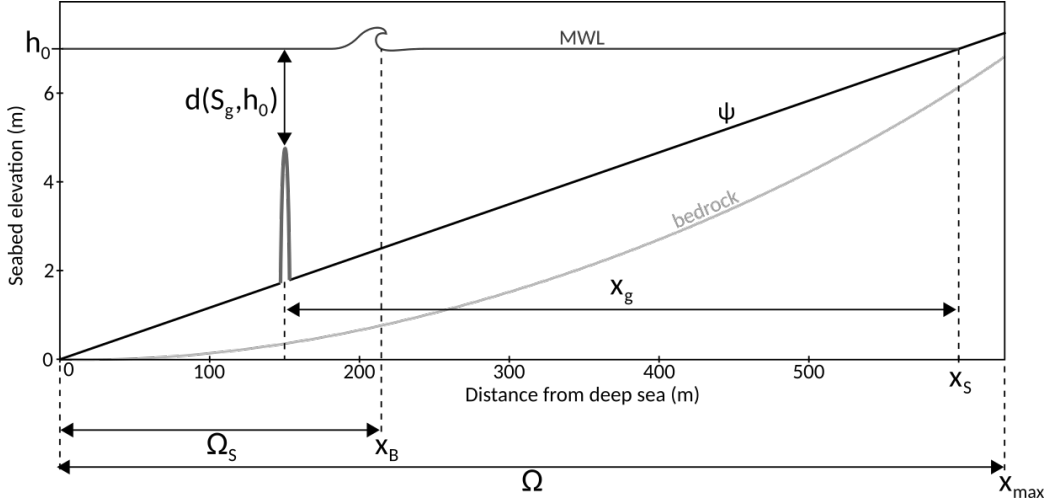


Figure 1: Diagram of the cross-shore profile featuring a geotube

Let $\Omega = [0, x_{\max}]$ be the domain of the cross-shore profile, where $x = 0$ *m* is an arbitrary point situated in deep waters and x_{\max} is a point located beyond the shoreline, as shown in Figure 1. Let ψ be the elevation of the seabed, and $x_G \in \Omega_G$ the location of the geotube, where Ω_G is the zone of feasible deployment. We define the geotube deployment objective function as the final position of the shoreline $x_S \in \Omega$:

$$\mathcal{J}_G(x_G) = x_S(t = T, x_G) \quad (m) \quad (1)$$

where $[0, T]$ is the time interval considered for the morphodynamic response. This function is to be minimized in the search of the optimal geotube location.

2.3. Constraints

Certain constraints associated with the introduction of geotextile tubes need to be considered in the search for the optimal position. These constraints are used to exclude certain positions which are deemed unacceptable. For instance, geotextile tubes cannot be installed in too deep a water because the deployment of such a structure, as well as its maintenance, will prove to be too difficult and expensive. The topography of the seabed may also limit the choice of position, with sharp rock or debris that may damage the tubes. Protected marine flora may also restrict the feasible zones of deployment. Furthermore, one should avoid installing geotextile tubes in shallow waters where they risk being damaged by beach users, in particular the keels of ships which can cause lesions to the geotextile material.

As such, in this study, we impose that the geotextile tubes must be set: (i) close enough to the shore to allow for easy deployment/maintenance; (ii) such that the vertical distance between them and the water surface measures at least 1 m. For illustrative purposes, topographical constraints have not been included, but can easily be added if necessary.

3. Morphodynamic Response by Wave Optimization

3.1. Description

Opti-Morph is a new hydro-morphodynamic model developed to simulate the dynamics of sandy beaches and designed to be robust, of low complexity, and have remarkably low execution times. For this reason, Opti-Morph is a natural choice of morphodynamic model regarding problems relating to coastal engineering. This model, first presented in [13] is used here in the study of the optimal location of geotubes. The central theory behind the Opti-Morph model is the assumption that the seabed evolves naturally in an attempt to minimize the energetic state of the surface waves. This is achieved through the minimization of a hydro-morphodynamic cost function, this minimization is deemed the driving force behind the morphodynamic response.

Constraints are added to the model for increased realism; phenomena that are secondary to the morphodynamic processes are considered constraints.

3.2. Hydro-morphodynamic Cost function

The hydro-morphodynamic cost function driving the Opti-Morph model is the same as that of [13], i.e. the potential energy of shoaling waves:

$$\mathcal{J}(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_s} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad (J.m^{-1}) \quad (2)$$

for all $t \in [0, T]$, where Ω_s is a time-dependent subset of Ω over which the waves shoal (see Figure 1), H denotes the height of the waves over the cross-shore profile (m), ρ_w is water density ($kg.m^{-3}$) and g is the gravitational acceleration ($m.s^{-2}$).

3.3. Constraints

In the works of [13], two constraints are mentioned: (i) a sandstock constraint, which ensures that the quantity of sand in a closed basin remains constant over time and (ii) a slope constraint preventing the seabed from being unrealistically steep. In the aforementioned work, Opti-Morph was applied to a flume configuration and thus required the presence of a sandstock constraint to guarantee that the quantity of sand remains constant over time. Given the open-sea setting of this study, a sandstock constraint is not required but is used here to limit the displacement of sand between the deep waters and the nearshore zone. The slope constraint remains the same, with a limit of the slope of the seabed by a quantity relative to the critical angle of repose of the sediment. This constraint prevents impossibly steep slopes from forming, which would lead to unrealistic results.

4. Coupling

Two optimization problems have been defined and must be resolved simultaneously: the geotube positioning along the cross-shore profile and the morphodynamic response of the seabed performed by Opti-Morph. This requires special treatment for their resolution.

4.1. Optimization problem 1: Geotube Positioning

The first optimization problem concerns the optimal geotube position. This can be formulated as follows:

(P1): Find $x_G \in \Omega_G$ such that $\mathcal{J}_G(x_G)$ defined by (1) is minimal and subjected to two constraints:

- (C1): $x_G < x_G^{\max}$
- (C2): $d(S_G, h_0) < 1$

where x_G^{\max} (m) is the maximal distance from the coast for geotube deployment, and $d(S_G, h_0)$ (m) is the distance between the summit of the geotube S_G and the mean water level h_0 (cf. Figure 1).

Constraint (C1) prevents the geotube from being installed too far from the coast : geotubes cannot be deployed beyond a distance of x_G^{\max} from the coast. Constraint (C2) ensures that the geotube is located deep enough to evade collision with boats and other beach users which could potentially damage the tubes. Here, a minimum of 1 m is permitted between the geotube and the water surface.

4.2. Optimization problem 2: Morphodynamic Response of the Seabed

The second optimization problem determines the evolution of the shape of the seabed over the course of the simulation and can be summarized as:

(P2): For each $t \in [0, T]$, find $\psi \in \Psi$ such that $\mathcal{J}(\psi, t)$ defined by (2) is minimal and subjected to the constraints:

- (C1'): $\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi(t = 0, x) dx \quad \forall t \in [0, T]$
- (C2'): $\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}}$

where Ψ is the set of physical parameters describing the characteristics of the seabed and M_{slope} is a grain-dependent upper-bound of the seabed slope.

The constraint (C1') and (C2') describe the constraints mentioned in Section 3.3. The first is the sandstock constraint, which limits the sediment transfer between the nearshore zone and the deep sea. This is achieved by setting the sandstock as constant over the course of the simulation. Constraint (C2') ensures that the slope of the seabed cannot be overly steep by defining the upper-bound M_{slope} .

4.3. Workflow

Given the low run time and complexity of Opti-Morph to solve $(P2)$, it is possible to solve $(P1)$ using a direct optimization method. Other optimization methods such as a gradient descent method can be applied, if the morphodynamic model used is more complex and if only a small number of morphodynamic simulations can be performed. This study operates in a manner analogous to the search for an optimal port configuration in [5], but the morphodynamic response of the sandy seabed is now incorporated in the study.

Before launching the simulation, the parameterization of the Opti-Morph model must be defined, including the domain of the cross-shore profile Ω , the initial seabed $\psi|_{t=0}$, the forcing conditions, and the parameters determining constraints. The set of all considered geotube positions must also be provided. For each position of geotubes, the morphodynamic response is calculated over time. The geotube deployment objective function \mathcal{J}_G is then deduced. When the set of eligible positions has been explored, the value of x_G which minimizes \mathcal{J}_G can then be determined. An explanatory diagram of the implementation strategy is given in Figure 2.

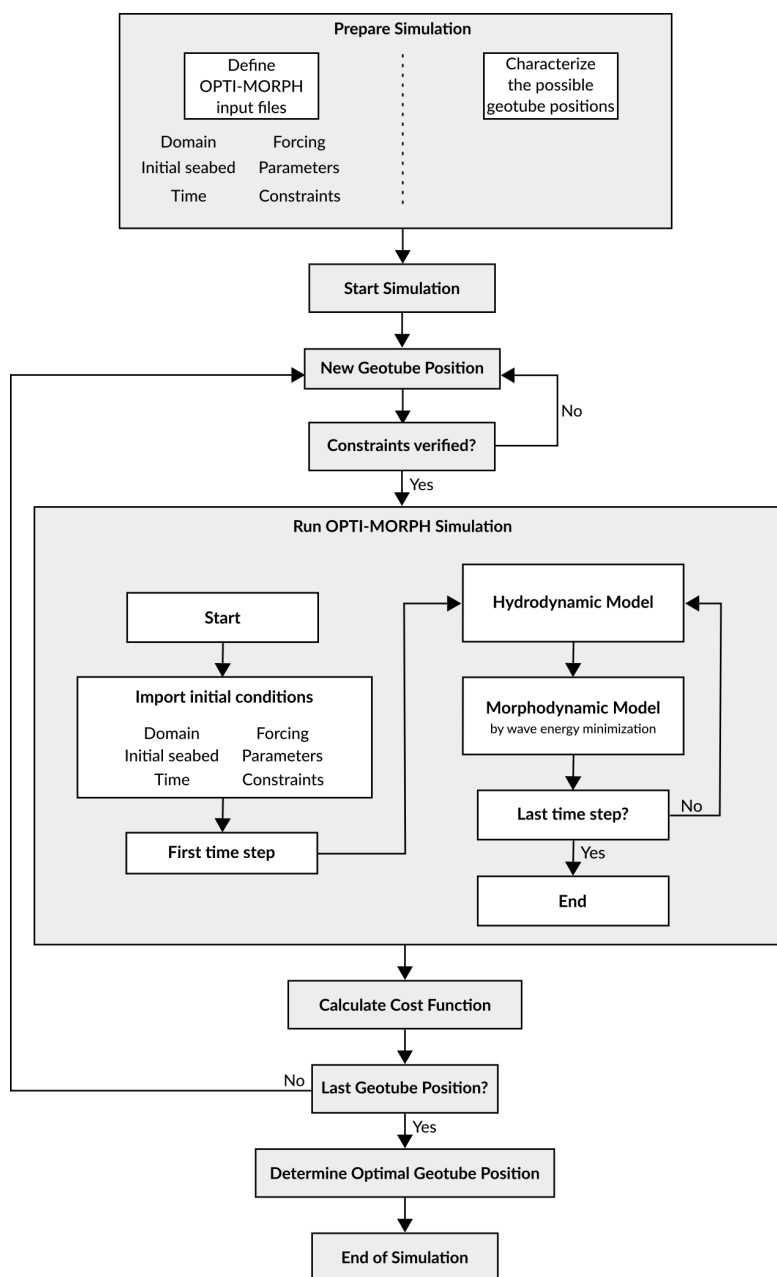


Figure 2: Diagram of the structure of the model capable of finding the optimal geotube position while incorporating the morphodynamic response of the seabed.

5. Application and Numerical Results

5.1. Setting

For simplicity, this study concerns a 1D cross-shore beach profile, although it can be easily adapted to the 2D case, once Opti-Morph has been extended to cater to 2 dimensional configurations. The initial seabed is a linear seabed measuring 600 m along cross-shore profile, similar to the seabed at Sète, France [26]. Bedrock features in the configuration as shown in Figure 1. The domain of the cross-shore profile is subdivided into 1 m long cells, allowing for a horizontal precision of 1 m over the 600 m domain. The mean water level (MWL) is set at 7 m . We consider a simple 20-day forcing scenario characterized by a rise-peak-fall storm over 6 days and fair weather conditions preceding and succeeding the storm. The sediment is considered fine sand with a critical angle of talus of 0.2 . Geotubes are to be placed along the cross-shore and are defined by a width of 6 m and a height of 3 m . Constraints of problem (P1) restrict the deployment of the geotextile tube to the interval $x_G \in (350, 495]$.

5.2. Results

This section is devoted to the numerical results of both optimization problems: the search for the optimal position of the geotube for minimal coastal erosion and the natural morphodynamic response of the seabed.

Figure 3.A illustrates the variations of the geotube deployment objective function \mathcal{J}_G defined by Equation (1), with regard to the location of the geotube. We observe a piecewise constant function with erosion ranging between 2 m for $x_G = 351$ and 9 m for $x_G = 495\text{ m}$. The optimum is located in the zone nearest the coast, over the 351 m - 388 m plateau. As such, geotubes located anywhere between 351 m and 388 m from the coast induce the same retreat of the shoreline of 2 m . Given the downward trend of the objective function, it is natural to elect $x_G = 351\text{ m}$ as the optimum for the remaining studies. The piecewise constant nature of the objective function is due to the 1 m precision of the discretization of the cross-shore domain Ω .

Figure 3.B illustrates the morphodynamic response of the seabed in relation to the different positions of the geotube. Four simulations were performed, with geotubes located at $x_G = 495\text{ m}$ (blue), $x_G = 450\text{ m}$ (green), $x_G = 400\text{ m}$ (yellow), and $x_G = 351\text{ m}$ (red), where the latter corresponds to an optimal geotube position. The value of the objective function \mathcal{J}_G associated with each of the geotubes is labeled in Figure 3.A. A fifth simulation

was also performed without geotube (black) for the purpose of providing a reference in the efficiency analysis of the geotubes.

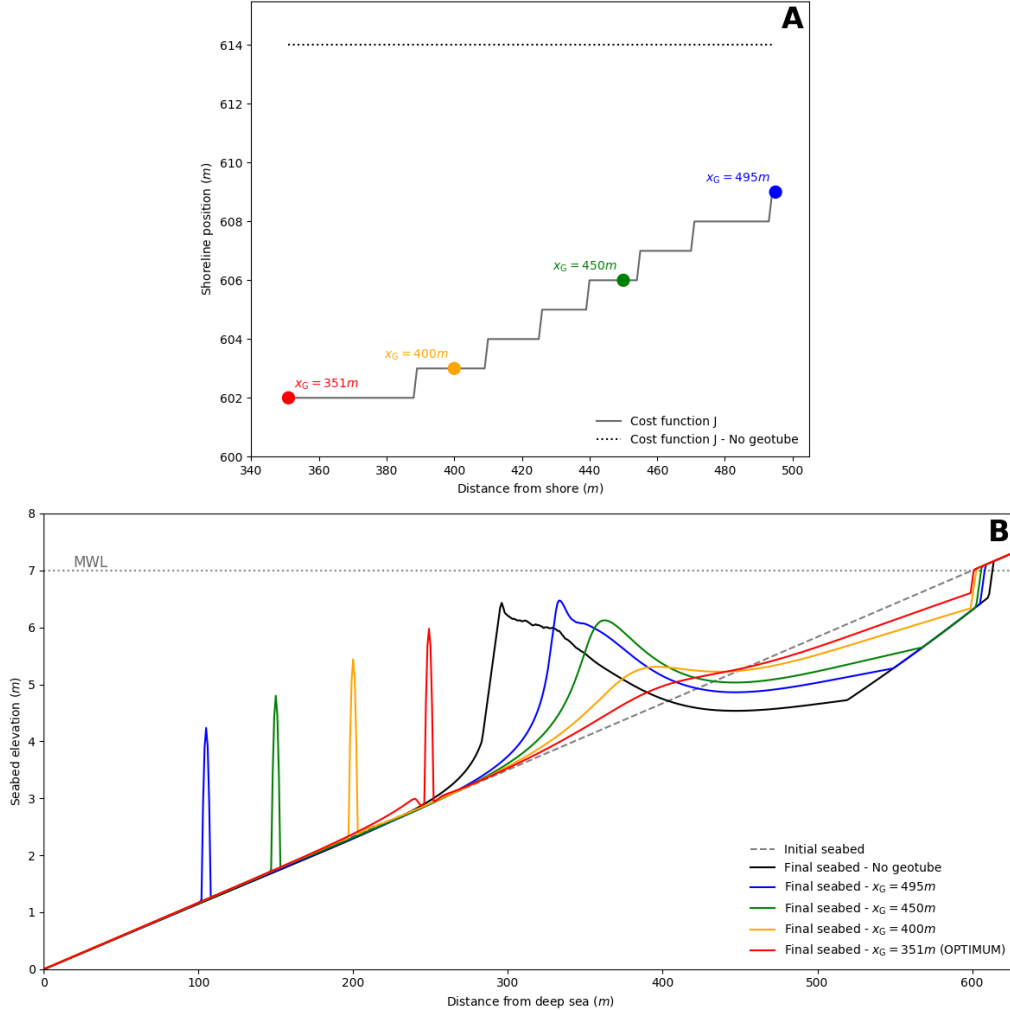


Figure 3: Results of the numerical search of the optimal geotube position via Opti-Morph. **A.** Variations of the geotube deployment objective function with regards to the distance between the geotube and the shoreline. The objective function calculated over a cross-shore profile with geotubes is also given as a reference. Four points are emphasized, corresponding to the four seabeds depicted in the second graphic. **B.** Final seabed profiles produced by the morphodynamic model Opti-Morph with varying geotube positions over the cross-shore profile.

At the end of the numerical simulation, each seabed features a sandbar, the height and location of which depend on the geotube position. A sandbar located at $x = 330\text{ m}$ appears for a geotube deployed at $x_G = 495\text{ m}$ (blue) with a height of 2.6 m . The closer the geotube is to the shoreline, the smaller and closer the resulting sandbar is to the coast. For a geotube located 450 m (green) from the shoreline, the resulting sandbar measures 1.9 m and is located at $x = 360\text{ m}$. For a geotube at $x_G = 400\text{ m}$ (yellow), the sandbar measures 0.8 m in height, and for $x_G = 351\text{ m}$ (red), it measures 0.3 m . The latter two are located at $x = 390\text{ m}$. A trough proportional to the sandbar has also appeared near the coastline, and induces erosion at the coast. Limited by the bedrock, this trough has a depth of 1.1 m for $x_G = 495\text{ m}$ and 0.4 m for $x_G = 351\text{ m}$. The greatest displacement of sediment is observed for a seabed devoid of geotubes. A sandbar located at $x = 300\text{ m}$ appears with a height of 3 m , as well as a 1.3 m deep trough.

Opti-Morph is capable of producing realistic results when dealing with submerged breakwaters. Indeed, the closer the geotube is positioned relative to the coast, the more wave energy is dissipated, and as such less seabed movement can be observed. For $x_G = 351\text{ m}$, i.e. the optimal geotube, very little movement occurs, whereas for $x_G = 495\text{ m}$, the shape of the seabed has undergone major transformation. Conversely, the further in deep waters the geotube is deployed, the more the seabed behaves as if no geotube has been introduced. This is due to the fact that in too deep a water, the geotube have little effect on the surface waves, allowing waves to pass with little to no attenuation, and as such, the energy hitting the shore is comparable to a configuration without geotubes. This can be observed by the final shape of the sandbar and trough for the deeper geotubes compared to the non-geotube configuration.

Furthermore, 3.B shows that the position of the geotube has a noticeable effect on the shoreline, with the red geotube inducing less erosion than those situated further seaward. This can be explained by the decrease of wave energy associated with the geotubes nearer the shore. According to Figure 3.A, deploying a geotube anywhere in the $[105, 250)$ zone has a positive effect on the shoreline, when compared to that without geotubes. Indeed, even in the worst case, with a geotube situated at $x_G = 495\text{ m}$, the objective function is lesser ($\mathcal{J}_G(x_G = 495) = 609\text{ m}$) than without any geotubes where the objective function is 614 m .

We notice an accumulation of sand at the foot of the $x_G = 351\text{ m}$ geotube. The small trough is due to numerical inaccuracies; further developments are

required on Opti-Morph to allow sand to build up against the solid structure. However, this accumulation of sand seaward of a geotube is often encountered in in situ observations of the behavior of the seabed following the deployment of a submerged breakwater [27].

6. Discussion

6.1. Effect of the Geotube on Wave Height

In this section, we analyze the behavior of the hydrodynamic model used by Opti-Morph. Figure 4 shows the height of the waves over the cross-shore profile at three different points in time: (i) after 2 days (Fig. 4.A) to observe the wave height during fair-weather conditions before the storm, (ii) after 8.3 days (Fig. 4.B) at the peak of the storm, and (iii) 18.7 days (Fig. 4.C) after the storm has occurred and the fair-weather conditions have returned. For each of the three points of time, the wave height associated to five different morphodynamic configurations is depicted. Black shows the wave height associated to a seabed without geotube. The blue, green and yellow profiles show the wave height corresponding to a seabed where a geotube has been deployed at $x_G = 495\text{ m}$, $x_G = 450\text{ m}$ and $x_G = 400\text{ m}$ respectively, and the red corresponds to the optimal geotube position, for $x_G = 351\text{ m}$.

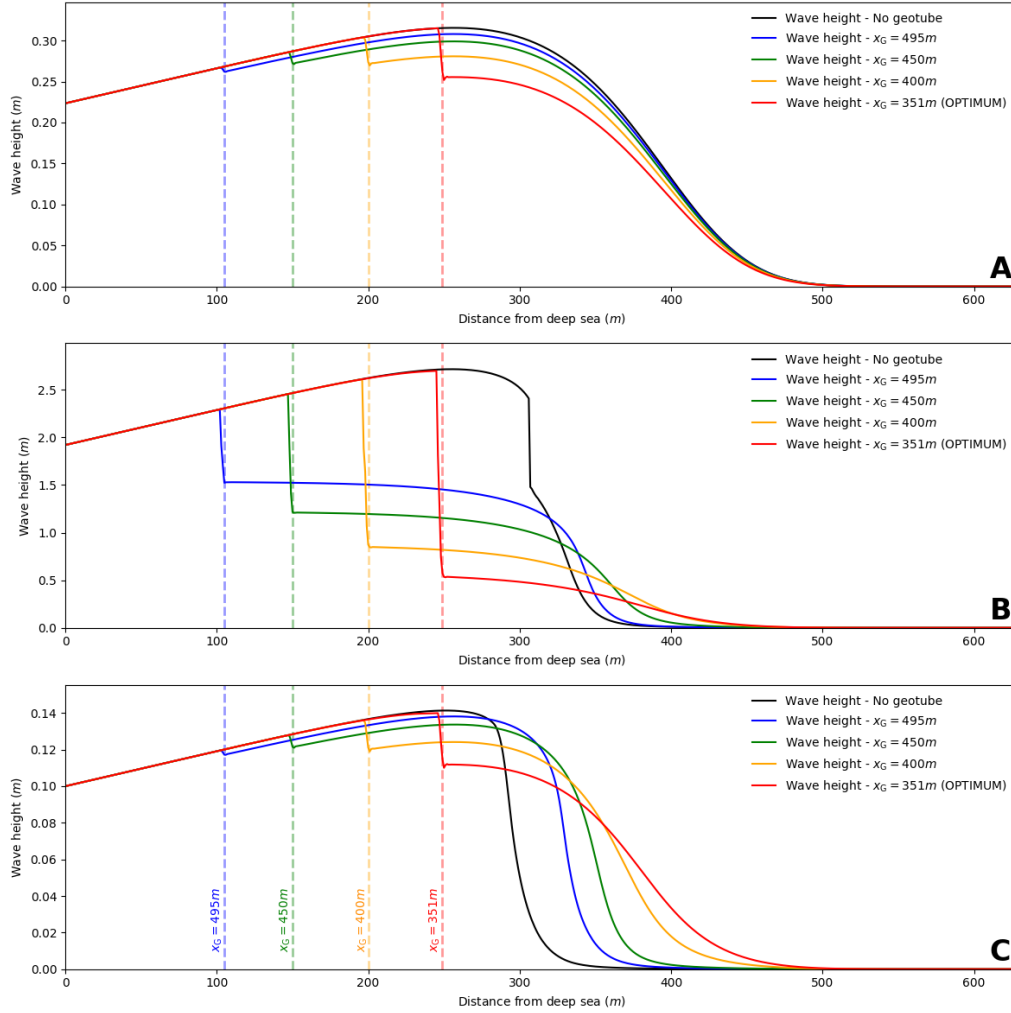


Figure 4: Wave height over the cross-shore profile associated with four geotube positions: $x_G = 495\text{ m}$ (blue), $x_G = 450\text{ m}$ (green), $x_G = 400\text{ m}$ (yellow), and $x_G = 351\text{ m}$ (red). Wave height relating to a seabed profile devoid of geotubes has also been given as a reference (black). **A.** Wave height prior to the storm at $t = 2\text{ days}$. **B.** Wave height at the apex of the storm at $t = 8.3\text{ days}$. **C.** Wave height posterior to the storm at $t = 18.7\text{ days}$.

Figure 4 demonstrates that the simple hydrodynamic model used by Opti-Morph is capable of handling underwater breakwaters, as shown by the fact that the waves behave as expected: (i) waves shoal prior to the geotube with an increase in wave height, (ii) geotubes trigger a breaking effect on the waves with a sharp drop of height, and (iii) after breaking, wave height decreases

smoothly before reaching the coast. Furthermore, Figure 4 illustrates the different impact that geotubes have on the surface waves depending on the height of the latter. Indeed, we observe that geotubes have little impact on the small waves of Figures 4.A, and 4.C, with a drop of a few millimeters, whereas when the wave height is great, as in Figure 4.B, the drop can reach up to 2 m (red). This behavior of the wave height is characteristic of cross-shore profiles containing a geotube.

In addition, geotubes in deeper waters have less effect on the waves as those in shallower waters. In Figure 4.B, the geotube located at $x_G = 495\text{ m}$ induces a drop of 0.8 m whereas the optimal geotube, located at 351 m provokes a drop of over 2 m . This can also be illustrated using the transmission coefficient, K_t , described in [28, 19] as the ratio between the height of the waves prior to the geotube and posterior to the geotube, and used to describe the efficiency of submerged breakwaters. This coefficient ranges between 0 and 1, where 0 indicates no transmission (i.e. an impermeable structure) and 1 indicates complete transmission (i.e. the geotube has no impact on the surface waves). According to [19], a transmission coefficient lesser than 0.6 is required for the most effective submerged breakwaters.

At the apex of the storm, the optimal geotube has a transmission coefficient of $K_t = 0.20$. Geotubes located at $x_G = 495\text{ m}$, $x_G = 450\text{ m}$ and $x_G = 400\text{ m}$ have a transmission parameter of $K_t = 0.68$, $K_t = 0.49$ and $K_t = 0.32$ respectively. In fact, K_t is inferior to 0.6 for all geotubes located between 351 m and 475 m from the coast. In other words, geotubes deployed beyond the $x = 475\text{ m}$ threshold from the shoreline are deemed ineffective in reducing wave energy.

6.2. Time-dependent Geotube Analysis

The main purpose of introducing a geotube to the cross-shore profile is to provoke premature breaking of the greater waves, and thus reducing the energy of the waves and limiting coastal erosion. As such, this section is devoted to the analysis of these three physical quantities. Figure 5 shows the influence of geotubes on the breaking location, the energy of the waves, and the shoreline.

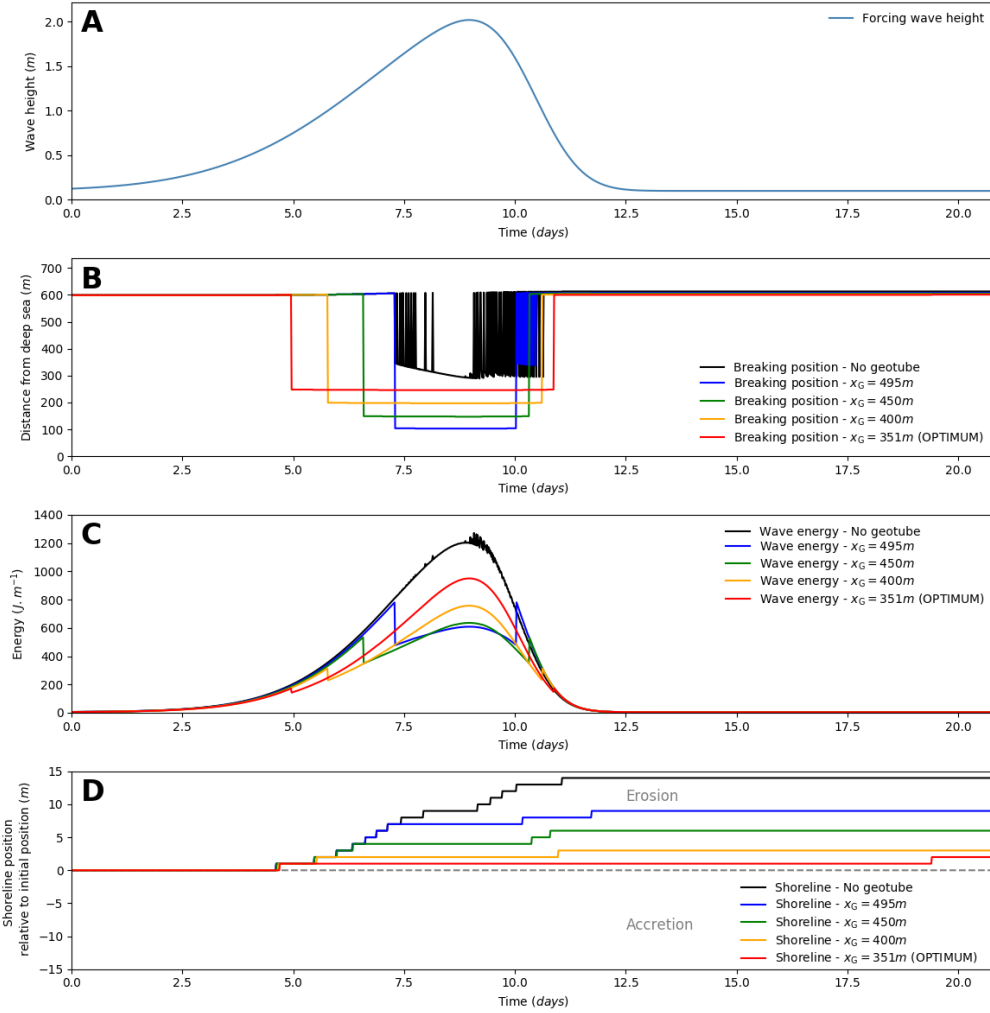


Figure 5: Time series of the wave breaking position, wave energy and shoreline position for different geotube configurations : $x_G = 351m$ (red), $x_G = 400m$ (yellow), $x_G = 450m$ (green), and $x_G = 495m$ (blue). The time series of the forcing wave height is also provided. **A.** Forcing wave height. **B.** Time series of the wave breaking position associated with different geotube locations. Should several breakings occur, the first event is retained. The breaking position associated to a seabed devoid of geotubes is also given (black). **C.** Time series of the energy of the waves associated with different geotube locations. The energy associated to a seabed devoid of geotubes is also given (black). **D.** Time series of the position of the shoreline relative to its initial location at $x = 600m$, and associated with different geotube locations. A positive value indicates erosion and a negative value indicates accretion. The breaking position associated to a seabed devoid of geotubes is also given (black).

Figure 5.A shows the time-series of the forcing wave height in order to identify the different forcing conditions exerted on the beach profile. We can then analyze the effect of the storm on the breaking waves, energy, and shoreline position. Forcing wave height follows a Gaussian curve, the peak appearing at $t = 9$ days. After day 13, fair weather conditions return for the remaining 8 days of simulation. Figures 5.B, 5.C, and 5.D respectively show the evolution of the breaking point, energy of the waves, and shoreline associated with this forcing scenario, for seabeds without a geotube (black), with a geotube located at $x_G = 351\text{ m}$ (red), $x_G = 400\text{ m}$ (yellow), $x_G = 450\text{ m}$ (green), and $x_G = 495\text{ m}$ (blue).

Figure 5.B shows the evolution of the breaking point of the waves over the course of the simulation. All five profiles show breaking occurring at the coast at the beginning and end of the simulation, i.e. when the forcing wave height is minimal. This result is normal given that geotubes are expected to have little effect on smaller waves and greater effect on larger ones. In the case of the optimal geotube (red), we observe that breaking occurs at the site of the geotube (i.e. $x_G = 351\text{ m}$) at day 5, and continues to break there up until day 11, that is when the forcing wave height exceeds 0.75 m . The geotube placed at $x_G = 400\text{ m}$ (yellow) induces wave breaking as of day 5.8 and continues to do so until day 10.6; this corresponds to a forcing wave height exceeding 1 m . Similarly, the geotube placed at $x_G = 450\text{ m}$ (green) induces wave breaking over the 6.5 - 10.3 day interval, which corresponds to a forcing wave height exceeding 1.2 m . Finally, in a configuration with a geotube placed at $x_G = 495\text{ m}$ (blue), wave break at the site of the geotube from day 7.3 until day 10, when the forcing wave height exceeds 1.5 m . For another 0.5 days, waves breaking fluctuates between 340 m and the shoreline. This corresponds to the sandbar which appeared over the course of the simulation as shown in Figure 3.B, and now acts as a natural submerged breakwater, prematurely breaking the waves before they hit the coast. This phenomenon is more observable for the configuration with no submerged structures (black). Here, breaking occurs at the coast up until day 7.3. Then, waves breaks at $x = 350\text{ m}$, due to the appearance of the sandbar, which acts as a natural breakwater. Breaking continues to occur around this point, fluctuating often with the coast. Over the course of the simulation only 12% of the waves break away from the shoreline.

Figure 5.C shows the evolution of the energy of surface waves over time, given by $E = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \rho g H^2 dx$ ($J.m^{-1}$). Before and after the geotubes take effect, all four energy profiles coincide with the energy profile associated with

no geotubes. However, we observe a drop in energy when the wave height is sufficiently high to detect the geotube, i.e. at day 5 for the optimal geotube (red), day 6.5 for the geotube located at $x_G = 450\text{ m}$ (green), day 5.8 for $x_G = 400\text{ m}$ (yellow) and day 7.3 for the geotube located at $x_G = 495\text{ m}$. Similar observations can be made after the storm peak, with a sharp rise of energy when the geotubes no longer affect the waves.

Energy reaches 1240 J.m^{-1} at the apex of the storm in the case of no geotubes. This has been significantly reduced for all the geotube simulations. In fact, the geotube located at $x_G = 351\text{ m}$ (resp. 400 m , 450 m and 495 m) generates an apex energy of 950 J.m^{-1} (resp. 755 J.m^{-1} , 635 J.m^{-1} and 610 J.m^{-1}), this suggest a reduction of energy of 290 J.m^{-1} , 485 J.m^{-1} , 605 J.m^{-1} , and 630 J.m^{-1} respectively.

Figure 5.D depicts the evolution of the shoreline. The shoreline remains constant over the first 4.6 days of the simulation, when the forcing wave height remains small (0.6 m). The seabeds with geotubes closest to the shore experience relatively little erosion, varying from its initial position by 2 m for $x_G = 351\text{ m}$ and 3 m for $x_G = 400\text{ m}$. The greater the distance between the geotube and the shoreline, the greater the erosion. For $x_G = 450\text{ m}$, we observe a retreat of 6 m and 9 m for $x_G = 495\text{ m}$. In the case of no geotubes, the shoreline experiences the greatest retreat with a variation of 14 m . Once the storm has passed, and the height of the forcing waves is once again small, the shoreline remains stable over the subsequent period of the simulation.

Figure 5 shows unsurprising results when it comes to the influence of the geotubes on the breaking position, wave energy, and shoreline position, and demonstrates the potential of Opti-Morph. This model, with a simple approach to hydrodynamic processes, illustrates several phenomena one would expect of a geotube deployment. First, Figure 5.B shows that waves pass over the geotubes smoothly for smaller waves. Also, the further the geotube is from the coast, the greater the waves have to be for the geotube to take effect. When a geotube is detectable, breaking occurs directly above, demonstrating that it is the submerged breakwater which causes the premature breaking. Figure 5.C shows that any geotube capable of prematurely breaking the waves causes a reduction of energy. We observe that the geotube reducing the most energy is not the same as the one obtained during the optimal search (red). Based on this observation, we investigate which geotube location minimizes wave energy in the following section. Finally, 5.D demonstrates that premature breaking has a positive effect on the shoreline; breaking away from the coast over a long period of time leads to less erosion

at the coast.

6.3. Alternative Geotube Deployment Objective Function

The adaptability of this approach in the search of the optimal geotube position is illustrated in this section. We perform the previous analysis, with the same constraints and forcing conditions, but using a different geotube deployment objective function. The choice of cost function will depend on many factors, and as such flexibility with regard to its choice is preferred. Previously, the search of the optimal position is performed with regard to the position of the shoreline (cf. Eq. (1)). In this section, we choose to minimize the time-averaged energy of the surface waves, as mentioned in Section 6.2 and in Figure 5, where it was revealed that an optimal geotube in terms of minimal erosion is not necessarily equivalent to an optimal geotube in terms of energy.

Given that the geotextile tubes are designed to prematurely cause wave breaking and thus ensuring less energy arrives at the coast, in this study we seek to minimize the cumulative energy of the waves over the cross-shore profile.

As such, a new objective function is considered:

$$\tilde{\mathcal{J}}_G(x_G) = \frac{1}{16} \int_0^T \int_{\Omega} \rho g H^2(x, t, x_G) dx dt \quad (J.m^{-1}.s^{-1}) \quad (3)$$

where ρ is water density ($kg.m^{-3}$), g is gravitational acceleration ($m.s^{-1}$), and H is the height of the surface waves (m).

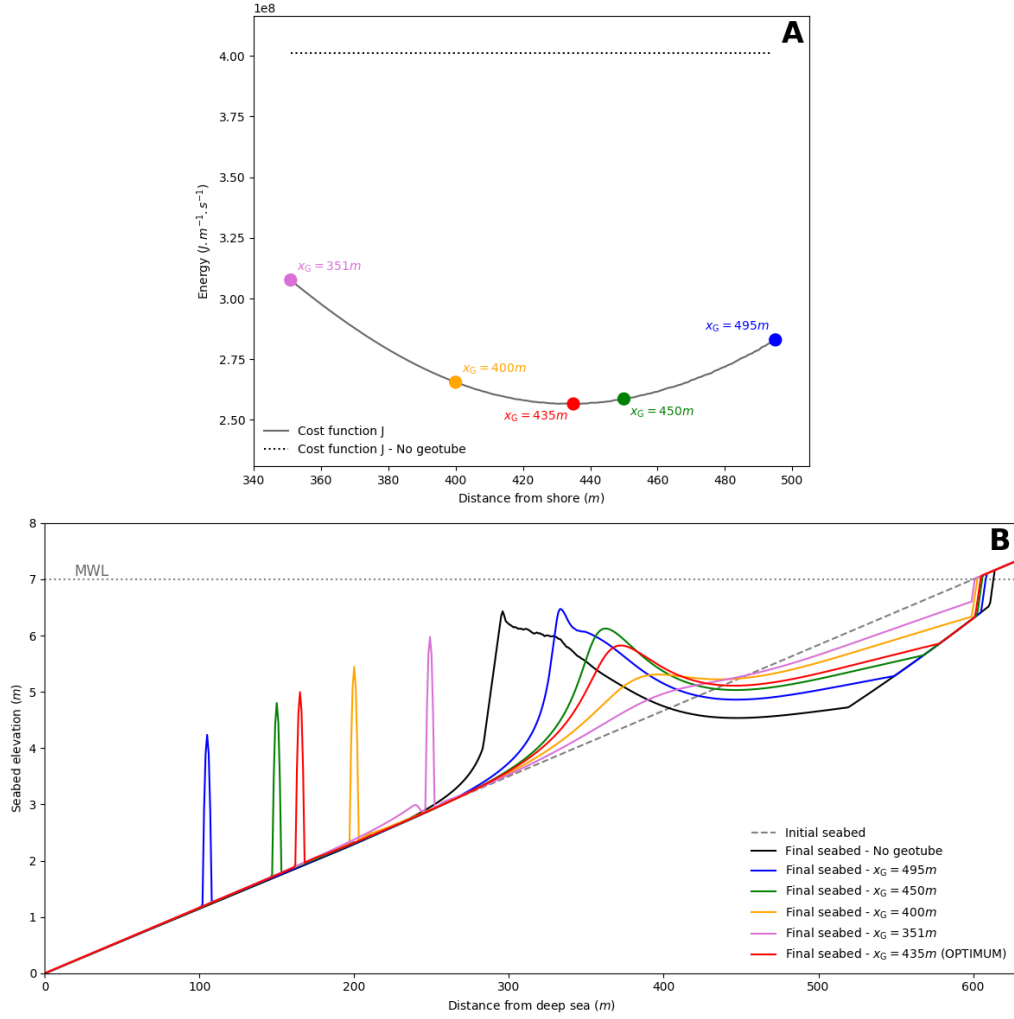


Figure 6: Results of the numerical search of the optimal geotube position via Opti-Morph. **A.** Variations of the geotube deployment objective function with regards to the distance between the geotube and the shoreline. The objective function calculated over a cross-shore profile with geotubes is also given as a reference. Five points are emphasized, corresponding to the five seabeds depicted in the second graphic. **B.** Final seabed profiles produced by the morphodynamic model Opti-Morph with varying geotube positions over the cross-shore profile : $x_G = 495 m$ (blue), $x_G = 450 m$ (green), $x_G = 400 m$ (yellow) and $x_G = 351 m$ (pink) and the optimal position at $x_G = 435 m$ (red)

Figure 6.A shows the variations of the objective function $\tilde{\mathcal{J}}_G$ (cf. Eq. (3)) with regard to the location of the geotube. Contrarily to the results

of Section 5.2, a unique minimum is observed at $x_G = 435\text{ m}$ (red point), this signifies that to achieve maximal energy reduction over the course of a storm, the best deployment location of a geotube is at 435 m from the coast. This corresponds to a cumulative wave energy of $2.56 \times 10^8\text{ J.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Other geotube positions are also depicted; their color matching the color of the seabeds in Figure 6.B. The energy associated to a configuration without geotubes is also shown.

Figure 6.B shows the outcome of the seabed, after being subjected to a storm. Six profiles are presented, the same five as in Section 5.2 and the new optimal geotube position $x_G = 435\text{ m}$ (red). As the only difference between this and the previous study is the choice of objective function in geotube location optimization problem, the morphodynamic model produces the same results for the first five seabeds: for $x_G = 495\text{ m}$ (blue), $x_G = 450\text{ m}$ (green), $x_G = 400\text{ m}$ (yellow), and $x_G = 351\text{ m}$ (pink), as well as the configuration without geotube (black). The pink profile was previously featured in red because it corresponded to the optimal position in the previous study. The new addition is the seabed corresponding to the optimal geotube location with regard to wave energy, this is $x_G = 435\text{ m}$ (red). In this configuration, the formation of a sandbar can be observed at $x = 370\text{ m}$, with a height of 1.5 m , as well as the creation of a trough whose depth reaches 0.9 m , stopped only by the now exposed bedrock. As with the previous study, all geotubes have a position influence on the reduction of wave energy: Figure 6.A shows that for all x_G , the associated value of the objective function is less than the energy without geotubes. However, the behavior of the waves and seabed tend towards a configuration without geotube when the geotubes are placed further towards the deep sea.

This study shows that the minimization of erosion of Section 5.2 differs from the minimization of cumulative energy of the waves calculated over the length of the domain. This is due to the manner in which the waves shoal and break. Breaking too early causes a small drop in wave height and thus generates large waves after the geotube. Breaking too late generates large waves prior to breaking at the geotube (with a considerable drop in wave height afterward). As such, the optimal geotube position relative to the energy across the totality of the domain can be found somewhere between these two scenarios.

The rapidity of Opti-Morph and the simplicity of the problem allows the use of a direct method to find the optimal position of the geotube. However, in more complex circumstances, an optimizer may be preferable. By way

of illustration, the Nelder–Mead algorithm [29] was applied to this energy minimization problem, and the minimum of $\tilde{\mathcal{J}}_G$ was found in 20 iterations, which corresponds to a run-time around four times quicker than the direct method.

7. Conclusion

This study was performed in an attempt to demonstrate the potential of the morphodynamic model, Opti-Morph. This model is capable of handling artificial structures such as geotextile breakwaters. We conducted an extensive search for the optimal geotube position, and thus solving two optimization problems simultaneously: the morphodynamic response by wave energy minimization and the optimal geotube position in terms of minimal coastal erosion. Further analyses were conducted to illustrate the influence of the geotube position on the waves. The resulting observations are coherent with expectations, demonstrating the potential of Opti-Morph for coastal engineering projects. In addition to this, Opti-Morph is fast, robust and of low-complexity which makes it an appealing tool for coastal engineering investigations.

References

- [1] M. Esteban, H. Takagi, T. Shibayama, Handbook of Coastal Disaster Mitigation for Engineers and Planners, 2015.
- [2] R. Cox, D. Beach, Floating breakwater performance - wave transmission and reflection, energy dissipation, motions and restraining forces, Proc 1st Int Conf on the Application of Physical Modeling to Port and Coastal Protection - CoastLab06 (2006) 371–381.
- [3] I. Na'im, A. Shahrizal, M. Safari, A short review of submerged breakwaters, MATEC Web of Conferences 203 (2018) 01005.
- [4] D. Isèbe, P. Azerad, B. Mohammadi, F. Bouchette, Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact, Coastal Engineering 55 (2008) 35–46.
- [5] M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, N. Fraysse, Optimal port design minimizing standing waves with a posteriori long term shoreline sustainability analysis, 2021. Preprint.

- [6] Y. Xu, Y. Cai, T. Sun, X. Yin, Q. Tan, J. Sun, J. Peng, Ecological preservation based multi-objective optimization of coastal seawall engineering structures, *Journal of Cleaner Production* 296 (2021) 126515.
- [7] J. R. Weggel, N. Rajendran, Optimization of a shore protection scheme for the west coast of india, in: W. Kato, B. C. Gerwick, M. Homma, R. Lenschow, O. T. Magoon, C. C. Mei, S. Motora, K. Okamura, J. Penzien (Eds.), *Ocean Space Utilization '85*, Springer Japan, Tokyo, 1985, pp. 237–248.
- [8] H. Diab, P. Lafon, R. Younes, Optimisation of breakwaters design to protect offshore terminal area, *Proceedings of the IASTED International Conference on Modelling, Simulation and Identification, MSI 2014* (2014) 70–75.
- [9] G. Elchahal, P. Lafon, R. Younes, Design optimization of floating breakwaters with an interdisciplinary fluid–solid structural problem, *Canadian Journal of Civil Engineering* 36 (2009) 1732–1743.
- [10] E. Castillo, M. A. Losada, R. Míñguez, C. Castillo, A. Baquerizo, Optimal engineering design method that combines safety factors and failure probabilities: Application to rubble-mound breakwaters, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering* 130 (2004) 77–88.
- [11] D. Isebe, P. Azerad, F. Bouchette, B. Ivorra, B. Mohammadi, Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 74 (2008) 1262 – 1277.
- [12] D. Isèbe, P. Azerad, F. Bouchette, B. Mohammadi, Design of passive defense structures in coastal engineering, *International Review of Civil Engineering (IRECE)* 5 (2014) 75.
- [13] M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, S. Meulé, N. Fraysse, OptiMorph, a new platform for sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization, 2021. Preprint.
- [14] A. Bouharguane, P. Azerad, F. Bouchette, F. Marche, B. Mohammadi, Low complexity shape optimization and a posteriori high fidelity validation, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-series B - DISCRETE CONTIN DYN SYS-SER B* 13 (2010).

- [15] B. Mohammadi, A. Bouharguane, Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters, *Computers and Fluids* 40 (2011) 291–298.
- [16] A. Bouharguane, B. Mohammadi, Minimization principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow, *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 26 (2012) 163–172.
- [17] B. Mohammadi, F. Bouchette, Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics, *Computers and Fluids* 89 (2014) 78–87.
- [18] C. R. Lawson, Geotextile containment for hydraulic and environmental engineering, *Geosynthetics International* 15 (2008) 384–427.
- [19] R. Koerner, *Geotextiles: From Design to Applications*, Woodhead Publishing Series in Textiles, Elsevier Science, 2016.
- [20] A. Masria, M. Iskander, A. Negm, Coastal protection measures, case study (mediterranean zone, egypt), *Journal of Coastal Conservation* 19 (2015).
- [21] O. Shabankareh, M. Ketabdari, M. A. Shabankareh, Environmental impact of geotubes and geotextiles used in breakwaters and small breakwaters construction (case study: Rigoo public breakwater in south of qeshm island - iran).
- [22] I. Alvarez, R. Rubio, H. Ricalde, Beach restoration with geotextile tubes as submerged breakwaters in yucatan, mexico, *Geotextiles and Geomembranes* 25 (2007) 233–241.
- [23] M. González Leija, X. Chavez, E. Alvarez, E. Mendoza, R. Silva, Experimental study on geotextile tube applications as submerged breakwaters for beach protection in yucatan, mexico, *Coastal Engineering Proceedings* 1 (2014) 25.
- [24] Y. Oh, E. Shin, Using submerged geotextile tubes in the protection of the e. korean shore, *Coastal Engineering* 53 (2006) 879–895.
- [25] Y. Oh, E. Shin, J. Kuwano, J. Koseki, Application of submerged geotextile tubes for erosion prevention in east coast of korea.

- [26] Y. Balouin, F. Longueville, Y. Colombet, Video assessment of nearshore and beach evolution following the deployment of a submerged geotextile wave breaker, *Journal of Coastal Research Special Issue* (2016) 617–621.
- [27] H. Hidayat, S. Andrianto, Effectiveness of geotextile tubes as a break-water core, *Coastal Engineering Proceedings* 1 (2018) 80.
- [28] K. Pilarczyk, Design of low-crested (submerged) structures - an overview (2003).
- [29] J. A. Nelder, R. Mead, A Simplex Method for Function Minimization, *The Computer Journal* 7 (1965) 308–313.



1.7 2021: Non-submit: Opti-Morph User Guides [7]



Opti-Morph

User Guide

Megan Cook ^{* 1,3,4}, Frédéric Bouchette ^{†1,3}, Bijan Mohammadi ^{‡2,3}, and Nicolas Fraysse ^{§4}

¹GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

²IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

³GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

⁴BRL Ingénierie, Nîmes, France

September 20, 2021

Abstract

Opti-Morph is a new morphodynamic model based on optimization theory. This user guide explains the theory behind the model as well as the hydrodynamic models currently associated with Opti-Morph. A presentation of the numerical model is described to allow the user to run Opti-Morph on their own configurations. Two basic examples are also provided.

Keywords: optimization, morphodynamics, coastal dynamics, constraints, hydrodynamics

*Corresponding Author: megan.cook@umontpellier.fr

†frederic.bouchette@umontpellier.fr

‡bijan.mohammadi@umontpellier.fr

§nicolas.fraysse@brl.fr

Contents

I	Introduction	3
I.1	About	3
I.2	Expectations and objectives	3
I.3	Target audience	3
II	Processes and theoretical formulation	4
II.1	Domain and definitions	4
II.2	Hydrodynamic model	5
II.2.1	Introduction	5
II.2.2	Shared processes between hydrodynamic models	6
II.2.3	Presentation of hydrodynamic models	8
II.3	Morphodynamic model by wave energy minimization	23
II.3.1	Introduction	23
II.3.2	Governing seabed dynamics	23
II.3.3	Choice of direction of descent	25
II.3.4	Constraints	26
III	Numerical model	28
III.1	Presentation	28
III.1.1	Workflow	28
III.1.2	Algorithm summary	31
III.1.3	Class organisation	31
III.2	Running Opti-Morph	34
III.2.1	Getting started	34
III.2.2	Main file	35
III.2.3	Input data	37
III.2.4	Output data	39
IV	Applications	42
IV.1	Linear Seabed Beach Configuration	42
IV.1.1	Setting	42
IV.1.2	Input files	42
IV.1.3	Results	43
IV.2	Beach Configuration with submerged breakwaters	44
IV.2.1	Setting	44
IV.2.2	Input files	45
IV.2.3	Results	46
A	List of parameters	48

I Introduction

I.1 About

The numerical hydro-morphodynamic model presented here embodies a new approach to coastal morphodynamics, based on optimization theory. This model is based on the assumption that a sandy seabed evolves over time in order to minimize a certain wave-related function, the choice of which depends on what is considered the driving force behind coastal morphodynamics. This numerical model was given the name **Opti-Morph**, and has the advantages of being fast, robust, and requires very few input parameters.

Optimization theory has been widely used in the study of coastal zones, but is mainly applied in the development of protection structures [Isèbe et al., 2008a, Isèbe et al., 2008b] and/or ports [Cook et al., 2021c, Isèbe et al., 2008b]. Continuing the pioneering work of [Bouharguane et al., 2010, Mohammadi and Bouharguane, 2011] and [Mohammadi and Bouchette, 2014], which put in motion the idea that morphodynamic processes can be described using optimization theory, we have developed a numerical model that simulates the evolution of the seabed while taking into account the complex coupling between morphodynamic and hydrodynamic processes. Based on the assumption that the seabed adapts to minimize a certain hydrodynamic quantity, this optimization problem is also subjected to a certain number of constraints, allowing for a more accurate description of the morphodynamic evolution. First results can be found in [Cook et al., 2021b], where this model was applied to a flume configuration and compared with physical data. A comparative analysis was also conducted between Opti-Morph and another numerical model for the purpose of evaluating the performance of Opti-Morph in comparison with existing hydro-morphodynamic models.

I.2 Expectations and objectives

The main goal of Opti-Morph is to demonstrate the potential of using optimal control in the modeling of coastal dynamics by designing an adaptable, easy-to-use numerical model.

A non-exhaustive list of objectives considered during the initial development of Opti-Morph follows.

- Production of logical/naturalistic simulation results
- Adaptable to open-sea or flume configurations
- Low run times
- High robustness
- User-friendly (including inexperienced users)
- Adaptability of:
 - hydrodynamic model
 - cost function
 - constraints
- Possibility of introducing submerged breakwaters or other soft engineering techniques

I.3 Target audience

The Opti-Morph model is a tool intended for any person wishing to simulate the natural evolution of the coastal seabed in response to the incoming wave conditions, and/or to study the effect of man-made submerged devices on the sediment transport. As such this tool can be used by engineers and project managers when planning the deployment of certain wave-reducing structures and their influence on the surrounding sediment.

This model can also be used in an academic setting to study the driving forces behind coastal morphodynamics. The model has been developed such that the mobility of the seabed is driven by the minimization of a cost function. The

choice of cost function determines which coastal hydro-morphodynamic components drive the seabed mobility. The default cost function is wave energy but other functions can be explored if desired.

II Processes and theoretical formulation

The Opti-Morph model operates by pairing a hydrodynamic and a morphodynamic model. The basis of the morphodynamic model is the minimization of a wave-related cost function; this cost function is provided by the hydrodynamic model, which demonstrates the close relation between the hydrodynamic and morphodynamic processes. In this first section, we will begin by describing the domain and definitions used throughout this document. The hydrodynamic model is then described with its various adaptations, followed by the theoretical description of the morphodynamic model. This includes the governing equations, the choice of cost function, and the introduction of the notion of constraints.

II.1 Domain and definitions

We consider a coordinate system composed of a horizontal axis x and a vertical axis z . We denote $\Omega := [0, x_{\max}]$ the domain of the cross-shore profile, where $x = 0$ refers to an arbitrary fixed point in the deep water and x_{\max} an arbitrary fixed point at the shore, beyond the coast. The elevation of the seabed is a one-dimensional positive function, defined by: $\psi : \Omega \times [0, T] \times \Psi \rightarrow \mathbb{R}^+$ where $[0, T]$ is the interval of time considered for the study, and Ψ is the set of physical parameters describing the shape of the seabed. Let h_0 be the mean water level (m) and h be the water depth (m), defined over the cross-shore profile by $h = h_0 - \psi$. We denote Ω_S the sub-domain of Ω over which the waves shoal and Ω_B the sub-domain of Ω over which the waves break. Let x_B denote the location of the breaking of the waves and let x_S be the shoreline position, that is when the seabed intersects with the mean water level h_0 . Note that the breaking location and the shoreline position may vary over the course of the simulation, and as such x_B and x_S are both time-dependent. The same also goes for Ω_B and Ω_S . Time dependency of x_B , x_S , Ω_B and Ω_S have been omitted for clarity from the remainder of this document. The definitions and notations presented above are summarized in Figure 1.

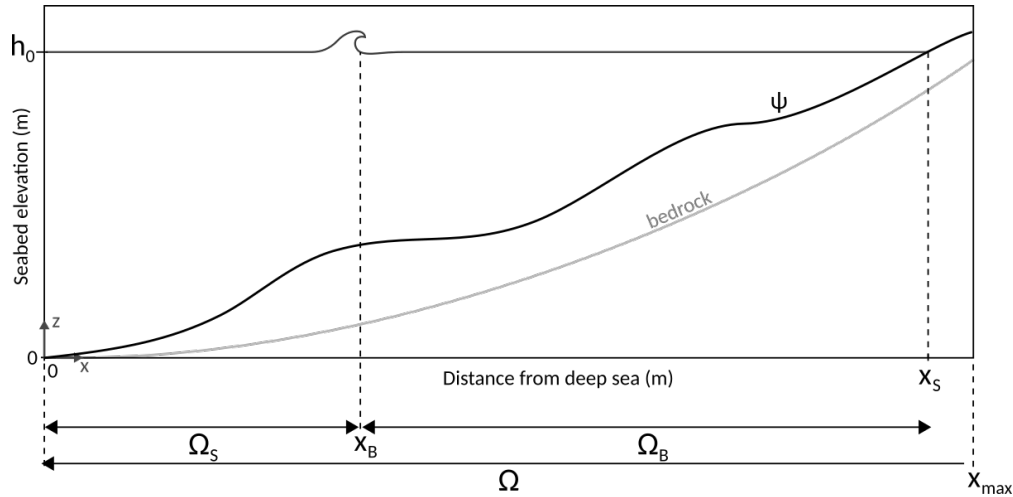


Figure 1: Illustration of the cross-shore profile where breaking occurs once at $x = x_B$

i At the present time, Opti-Morph operates in a one-dimensional setting, depicting either the cross-shore profile of a sandy beach or a flume experiment. However, no assumptions were made regarding the choice of dimension in the theoretical development of this model, and as a result, it is straightforward to extend this theory to a two-dimensional configuration.

II.2 Hydrodynamic model

II.2.1 Introduction

In order to model the evolution over time of the seabed ψ and given the assumption that ψ changes over time in response to the minimization of some hydrodynamic quantity, a hydrodynamic model capable of providing the necessary data is required, here the significant wave height over the cross-shore profile.

There are currently seven different hydrodynamic models associated with the Opti-Morph model. These hydrodynamic models have the advantage of being able to analytically calculate the gradient of wave height with respect to the seabed. Indeed, Opti-Morph relies heavily on this differentiation, and explicit formulas induce quick execution times. Considering that one of the main objectives of Opti-Morph is a rapid output time (cf. Section I.2), it is natural for the associated hydrodynamic models to also have significantly fast execution times. This is achieved by providing wave height analytically with regard to the seabed ψ . Other hydrodynamic models can be integrated with ease, provided that the parameters and methods required by the morphodynamic model are still present. A model using a time-consuming differentiation method can be used but defeats the purpose of Opti-Morph which was designed to be quick and of low-complexity. Another solution would be to perform the calculation of the gradient using automatic differentiation programs [Griewank and Walther, 2008, Hascoët and Pascual, 2004]. This exceeds the initial scope of the Opti-Morph model, but may be implemented at some point in the future if needs be.

The seven hydrodynamic models presented below provide the significant wave height over the cross-shore profile as well as other wave-related data. They range in complexity, from the simplest model in II.2.3.a. to the more complex in II.2.3.g.. In fact, the hydrodynamic models, and the order in which they appear, illustrate the evolution of the model over the course of its development, with the last being the final product. This was carried out in an attempt to address the different issues encountered during the research phase. Each model has its own merits and all have been retained in order to demonstrate the simplicity of replacing one hydrodynamic model with another. This evolution of the hydrodynamic model is showcased in Table 1.

Hydrodynamic model Characteristics	1 (II.2.3.a.)	2 (II.2.3.b.)	3 (II.2.3.c.)	4 (II.2.3.d.)	5 (II.2.3.e.)	6 (II.2.3.f.)	7 (II.2.3.g.)
Shoaling							
Breaking condition							
Energy conservation							
Multiple wave-breaking							
Handling submerged breakwaters							
Dependency of seaward activity							
Dependency of seaward activity with decreasing influence							
Smooth transition of boundary conditions							
Incorporation of anti-dissipative effect							

Table 1: Defining characteristics of each of the featured hydrodynamic models

In the following sections, hydrodynamic models no. 1 to 7 are presented. All are based on the same principle derived from linear wave theory [Dean and Dalrymple, 1991]. The processes shared by all of the models appear in the first section. Then, individual descriptions of the various hydrodynamic models are provided.

II.2.2 Shared processes between hydrodynamic models

Let H be the significant wave height over the cross-shore profile. We use the partition of $\Omega = \Omega_S \cup \Omega_B$ to define H : waves over the cross-shore profile are either shoaling (over Ω_S) or breaking (over Ω_B).

In order to determine H over the cross-shore profile, the following wave parameters are required:

- wavenumber k (m^{-1}): see Section II.2.2.a.
- phase velocity C ($m.s^{-1}$): see Section II.2.2.b.
- group velocity C_g ($m.s^{-1}$): see Section II.2.2.c.

i All models also require the following input data:

- forcing wave height $t \rightarrow H_0(t)$
- forcing wave period $t \rightarrow T_0(t)$ (here assumed constant)
- a wave-breaking index γ

II.2.2.a. Wavenumber

The wavenumber is determined by the linear dispersion equation. Linear dispersion is given by:

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (1)$$

where $\sigma = \frac{2\pi}{T_0}$ is the wave pulsation (s^{-1}), $g \approx 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ is the gravitational acceleration, and k is the wavenumber (m^{-1}). Recalling that $k = \frac{2\pi}{L}$, this equation states that waves with different wavelengths L (m) travel at different speeds C ($m.s^{-1}$). Here, we use it to determine the wavenumber k by using a recursive algorithm such as the Newton-Raphson method.

II.2.2.b. Phase velocity

The phase velocity of a wave C ($m.s^{-1}$) is given by:

$$C(x, t) = C_0(t) \tanh(k(x, t)h(x, t)) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (2)$$

where C_0 is the velocity of the forcing waves ($m.s^{-1}$), defined here by $C_0(t) = \frac{g}{2\pi} T_0(t)$ for all $t \in [0, T]$.

II.2.2.c. Group velocity

The group velocity of a wave C_g ($m.s^{-1}$) is given by:

$$C_g = \frac{1}{2} C \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (3)$$

Let n be the ratio of the wave velocity with respect to the group velocity: $n = \frac{C_g}{C}$.

II.2.2.d. Wave height

For all $x \in \Omega_S$ and $t \in [0, T]$, we define the shoaling wave height H_S as:

$$H_S(x, t) = H_0(t) K_S(x, t) \quad (4)$$

where H_0 is the height of the forcing waves and K_S is the shoaling coefficient (-) defined by Equation (5).

$$K_S(x, t) = \left(\frac{1}{2n(x, t)} \frac{C_0(t)}{C(x, t)} \right)^{1/2} \quad \forall (x, t) \in \Omega_S \times [0, T] \quad (5)$$

II.2.2.e. Breaking wave height

The equations governing breaking wave height (over Ω_B) vary according to the choice of hydrodynamic model. However, all use the breaking condition first established by [Munk, 1949], which states that waves break when their height is too great with respect to the water depth. In other words, waves break when inequality (6) holds, where γ is a wave-breaking index. This parameter is set to 0.55 in the upcoming simulations (cf. Section IV).

$$\frac{H}{h} > \gamma \quad (6)$$

Using this wave-breaking condition, we can define Ω_S and Ω_B as:

$$\Omega_S(t) = \left\{ x \in \Omega, \frac{H(x, t)}{h(x, t)} < \gamma \right\} \quad \text{and} \quad \Omega_B = \left\{ x \in \Omega, \frac{H(x, t)}{h(x, t)} \geq \gamma \right\} \quad (7)$$

❶ The domain over which H is defined as the disjoint union of Ω_S and Ω_B : $[0, x_S] = \Omega_S \cup \Omega_B$ and $\Omega_S \cup \Omega_B = \emptyset$.

II.2.3 Presentation of hydrodynamic models

II.2.3.a. Hydrodynamic model no.1: Shoaling model with decreasing exponential breaking

Technical features

Technical features

- **Code name:** shoaling_1run
- **Use:** Regular seabed
- **Advantages:** Very fast; Known wave-breaking type
- **Inconveniences:** One wave-breaking allowed; wave-breaking type must be known
- **Additional entry parameters:** α : wave-breaking parameter
- **Description:** Shoaling until breaking then decreasing exponentially with the alpha parameters describing the descent.
- **Governing equations:**

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(t)K_S(x, t) & \text{for } x \in [0, x_B] \\ H_S(x_B) \frac{e^{-\alpha(x-x_B)} - e^{-\alpha(x_S-x_B)}}{1 - e^{-\alpha(x_S-x_B)}} & \text{for } x \in [x_B, x_S] \end{cases}$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, where α is user-defined.

▲ Time dependency of x_B and x_S have been omitted for clarity.

Detailed description

We assume that waves shoal the length of the cross-shore profile until the breaking condition (6) is first activated. This point is denoted x_B . From then on, waves break up until the shoreline x_S , decreasing in height until $H(x_B) = 0$. Breaking wave height is described as a simple decreasing exponential function from x_B to x_S : for all $x \in \Omega_B = [x_B, x_S]$, wave height is given by:

$$H(x, t) = H_S(x_B) \frac{e^{-\alpha(x-x_B)} - e^{-\alpha(x_S-x_B)}}{1 - e^{-\alpha(x_S-x_B)}} \quad (8)$$

where the parameter α determines the manner in which the waves break (cf. Figure 2).

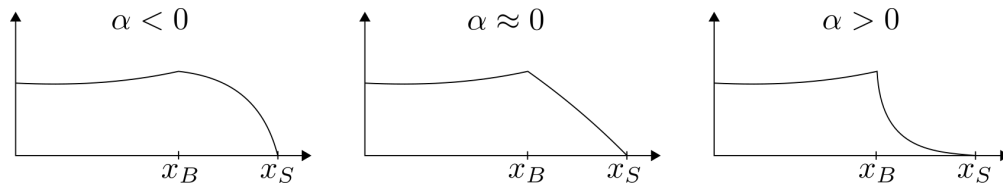


Figure 2: Different values of α alter the behavior of the breaking waves.

❗ This function was designed such that the resulting wave height over the cross-shore profile Ω is a continuous function with zero wave height at the shoreline i.e. $H(x_B) = H_S(x_B)$ and $H(x_S) = 0$.

Combined with the shoaling equation (4) over $\Omega_S = [0, x_B]$, Hydrodynamic model no.1 provides wave height over the cross-shore profile using the following definition:

$$H(x, t) = \begin{cases} H_S(x, t) & \text{for } x \in [0, x_B] \\ H_S(x_B) \frac{e^{-\alpha(x-x_B)} - e^{-\alpha(x_S-x_B)}}{1 - e^{-\alpha(x_S-x_B)}} & \text{for } x \in [x_B, x_S] \end{cases} \quad (9)$$

for all $x \in \Omega$ and $t \in [0, T]$.

Note that breaking may occur only once, and therefore Ω_B and Ω_S are both connected sets.

Illustration

An illustration of the the wave height provided by this model is given in Figure 3 on different types of seabeds.

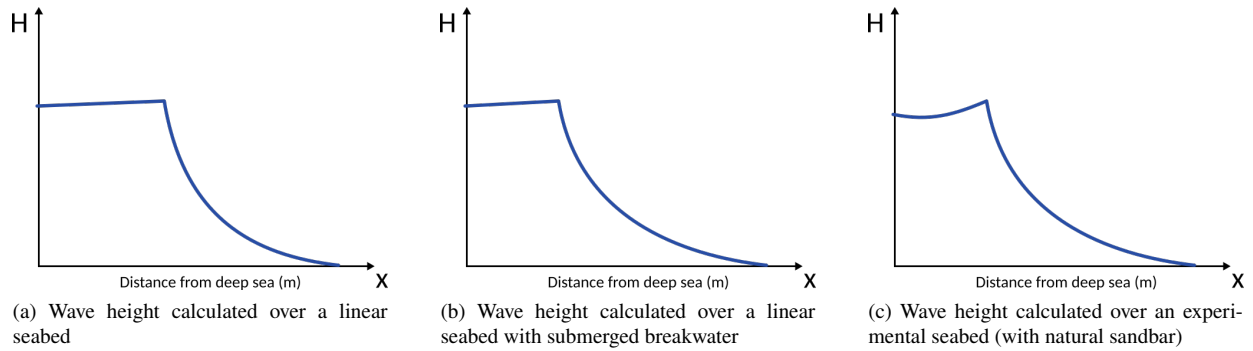


Figure 3: Illustration of Hydrodynamic model no.1 on different seabeds

All three examples of wave height look alike: waves shoal in the deeper waters then decrease exponentially to reach zero at the shore.

i This model is recommended on all seabeds, on the condition that the user is content with having waves only breaking once along the cross-shore profile. It is also the faster of the models.

II.2.3.b. Hydrodynamic model no.2: Shoaling model with decreasing exponential breaking and energy conservation

Technical features

Technical features

- **Code name:** shoaling_2run
- **Use:** Regular seabed
- **Advantages:** Very fast; Guarantees conservation of wave energy between sediment displacement (for a same forcing condition)
- **Inconveniences:** One wave-breaking allowed
- **Additional entry parameters:** $\alpha_{t=0}$: initial breaking decrease parameter
- **Description:** Shoaling until breaking then decreasing exponentially with $\alpha(t)$ chosen for energy conservation.
- **Governing equations:**

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(t)K_S(x, t) & \text{for } x \in [0, x_B] \\ H_S(x_B) \frac{e^{-\alpha(t)(x-x_B)} - e^{-\alpha(t)(x_S-x_B)}}{1 - e^{-\alpha(t)(x_S-x_B)}} & \text{for } x \in [x_B, x_S] \end{cases}$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, where α is determined to ensure conservation of wave energy between sediment displacement.

▲ Time dependency of x_B and x_S have been omitted for clarity.

Detailed description

This model is based on the principle of energy conservation. Given two wave height functions H_1 and H_2 originating from the same forcing H_0 , we should have **conservation of energy**, irrespective of the shape of the seabed. Therefore, the energy of the system should be the same before and after applying the morphodynamic model.

To achieve this, we implement the following workflow:

- **Step 1:** Apply Hydrodynamic model with user defined parameters
- **Step 2:** Apply Morphodynamic model
- **Step 3:** Apply Hydrodynamic model with parameters selected to ensure energy conservation

We adopt the previous hydrodynamic model from Section II.2.3.a., but allow variations of the value of the parameter α to guarantee energy conservation. This implies that waves break differently depending on the forcing wave energy.

Step 1: In Step 1, the wave height over the cross-shore profile is set as:

$$H(x, t) = \begin{cases} H_S(x) & \text{for } x \in [0, x_B] \\ H_S(x_B) \frac{e^{-\alpha(x-x_B)} - e^{-\alpha(x_S-x_B)}}{1 - e^{-\alpha(x_S-x_B)}} & \text{for } x \in [x_B, x_S] \end{cases} \quad (10)$$

for all $x \in \Omega$ and $t \in [0, T]$. Here, H_S is once again given by the shoaling equation (4) and α is user-defined as a prediction of the type of breaking waves.

Step 2: The morphodynamic model is then applied which provides the new seabed elevation function ψ in response to the forcing conditions at time t .

Step 3: Here, we consider that waves break as per Equation (10), but α is no longer user-defined. We now need to determine the breaking parameter α such that energy is conserved.

Let $H_1, \mathcal{E}_1, x_{S_1}, x_{B_1}, \Omega_{S_1}$ and Ω_{S_1} (resp. $H_2, \mathcal{E}_2, x_{S_2}, x_{B_2}, \Omega_{S_2}$ and Ω_{S_2}) be the wave height, wave energy, shoreline and breaking point, shoaling zone and breaking zone before (resp. after) the morphodynamic changes.

Conservation of energy implies:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \Rightarrow \frac{1}{16} \int_{\Omega} \rho_w g H_1^2 = \frac{1}{16} \int_{\Omega} \rho_w g H_2^2 \quad (11)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{\Omega} H_1^2}_{A} = \underbrace{\int_{\Omega_{S_2}} H_2^2 dx + H_2(x_{B_2})^2 \int_{\Omega_{B_2}} \left(\frac{e^{-\alpha(x-x_{B_2})} - e^{-\alpha(x_{S_2}-x_{B_2})}}{1 - e^{-\alpha(x_{S_2}-x_{B_2})}} \right)^2 dx}_{B} \quad (12)$$

$$\Rightarrow \frac{A - B}{H^2(x_{B_2})} = \int_{\Omega_{B_2}} \left(\frac{e^{-\alpha(x-x_{B_2})} - e^{-\alpha(x_{S_2}-x_{B_2})}}{1 - e^{-\alpha(x_{S_2}-x_{B_2})}} \right)^2 dx \quad (13)$$

▲ Wave height over $\Omega \setminus (\Omega_S \cup \Omega_B)$ is zero.

The quantities A and B are easily calculated. Using a Newton-Raphson method, we can determine α such that Equation (13) holds, and therefore energy is conserved between morphodynamic changes.

To conclude, the Hydrodynamic Model no.2 provides wave height over the cross-shore profile using the following definition: For all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$

$$H(x, t) = \begin{cases} H_S(x) & \text{for } x \in [0, x_B] \\ H_S(x_B) \frac{e^{-\alpha(t)(x-x_B)} - e^{-\alpha(t)(x_S-x_B)}}{1 - e^{-\alpha(t)(x_S-x_B)}} & \text{for } x \in [x_B, x_S] \end{cases} \quad (14)$$

where $\alpha(t)$ is the time-dependent breaking parameter ensuring conservation of energy at time $t \in [0, T]$.

Illustration

An illustration of the the wave height provided by this model is given in Figure 4 on different types of seabeds.

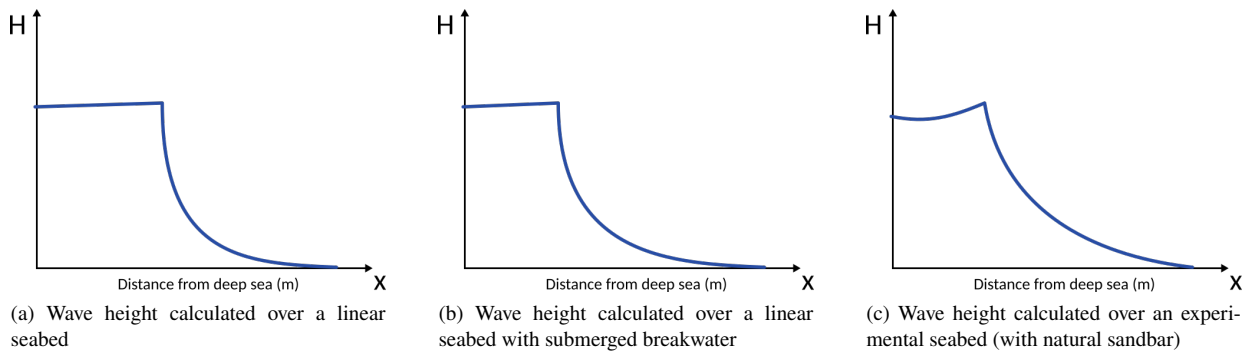


Figure 4: Illustration of Hydrodynamic model no.2 on different seabeds

Similar to before, all three examples of wave height look alike: waves shoal in the deeper waters then decrease exponentially to reach zero at the shore. The only difference is the value of α which differs over time.

i This model is recommended on all seabeds, on the condition that the user is content with waves only breaking once across the cross-shore profile.

II.2.3.c. Hydrodynamic model no.3: Global shoaling model with Munk's breaking condition

Technical features

Technical features

- **Code name:** shoaling_throughout
- **Use:** Regular seabed
- **Advantages:** Very fast; Possibility of multiple wave-breakings
- **Inconveniences:** Not suitable for submerged breakwaters
- **Additional entry parameters:** -
- **Description:** Shoaling waves in shoaling zone(s) and waves based on Munk's breaking condition in breaking zones.
- **Governing equations:**

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \gamma h(x, t) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$.

A Time dependency of Ω_B and Ω_S have been omitted for clarity.

Detailed description

As with the previous two models, the height of the waves over Ω_S is described by the shoaling equation (4). Over Ω_B , we set the height of the wave H as the tipping point condition between breaking and shoaling waves. That is, for all $(x, t) \in \Omega_S \times [0, T]$, breaking waves are defined as:

$$H(x, t) = \gamma h(x, t) \quad (15)$$

i The sets Ω_S and Ω_B can now be non-connected, i.e. the shoaling zone (resp. breaking zone) can now be comprised of multiple disjoint sets (cf. Figure 5).

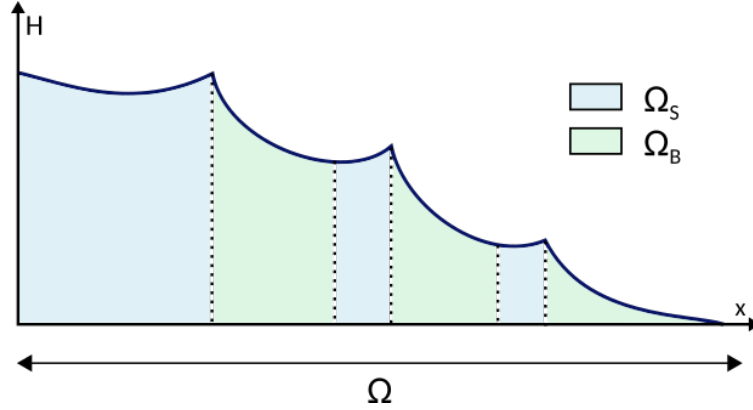


Figure 5: Multiple wave-breakings are now possible, which leads to Ω_S and Ω_B being potentially disconnected

Therefore, Hydrodynamic model no.3 provides wave height over the cross-shore profile using the following definition:

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \gamma h(x, t) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases} \quad (16)$$

Illustration

An illustration of the the wave height provided by this model is given in Figure 6 on different types of seabeds.

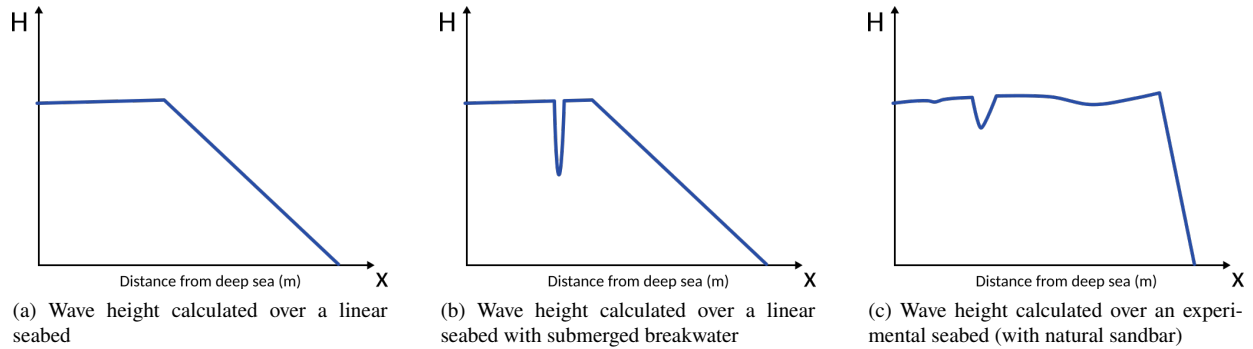


Figure 6: Illustration of Hydrodynamic model no.3 on different seabeds

When waves break, wave height closely follows the profile of the seabed, since over Ω_B , $H = \gamma(h_0 - \psi)$, by definition of h . As such, for a linear seabed, the breaking descent is linear (Fig. 6a). For the configuration with submerged breakwater, the shape of the structure is outlined (Fig. 6b). The structure triggers breaking but wave height quickly resumes it's previous state. This demonstrates that this model is not equipped to manage underwater structures or any irregular seabed. This is also shown in Figure 6c, where the natural sandbar starts the breaking phenomenon, but wave height increases unrealistically once the sandbar has been passed. This model does however have the advantage of allowing multiple breakings. Breaking occurs twice in Figures 6b and 6c, once at the breakwater/sandbar and once further toward the coast.

i This model is recommended on regular seabeds, but is unable to handle irregular seabed such as those with submerged breakwaters or natural sandbars.

II.2.3.d. Hydrodynamic model no.4: Local shoaling model with Munk's breaking condition

Technical features

Technical features

- **Code name:** shoaling_incremental
- **Use:** Regular or irregular seabeds
- **Advantages:** Very fast; Possibility of multiple wave-breakings
- **Inconveniences:** Unstable (due to the iterative nature of the model)
- **Additional entry parameters:** -
- **Description:** Local shoaling waves in shoaling zone(s) and waves based on Munk's breaking condition in breaking zones.
- **Governing equations:**

$$H(x, t) = \begin{cases} H(x - \varepsilon)K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases}$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$.

▲ Time dependency of Ω_B and Ω_S have been omitted for clarity.

Detailed description

Instead of considering that a wave is spatially dependent on only the initial wave height, this model considers that wave height depends on the seaward activity of the waves. In a configuration with a local sandbar or wave-breaking structure, waves determined by the previous model (Section II.2.3.c.) shoal up until the structure and then break when the structure is detected. However, once the waves move beyond the wave-breaking device, they resume a wave height similar to that before the structure, i.e. disregarding the encounter of the wave-breaking structure. In other words, the model doesn't register the loss of energy that took place at the submerged wave-breaker. This is due to the fact that the only spacial component influencing the wave height across the cross-shore profile is at $x = 0$ (by way of the term $H_0(t)$). This model amends this.

Instead of using wave height at the entry of the domain at each point x of the cross-shore profile Ω , we now use the previous seaward point of the domain discretization, located at $x - \varepsilon$. Therefore, shoaling waves, which were previously described by (4) is now defined by:

$$H(x, t) = H(x - \varepsilon)K_S(x, t) \quad (17)$$

for all $x \in \Omega_S$ and $t \in [0, T]$, where $x - \varepsilon$ is the previous point of the discretization.

With the same breaking process as before over Ω_B , i.e. Equation (15), wave height is now described by the following equation:

$$H(x, t) = \begin{cases} H(x - \varepsilon)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \gamma h(x, t) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases} \quad (18)$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$.

▲ Taking the previous point of the discretization guarantees that submerged breakwaters are taken into account. However, the iterative nature of the model leads to unstable results. Increasing ε would render the model more stable, but results in a poor management of the submerged breakwaters once again.

Illustration

An illustration of the the wave height provided by this model is given in Figure 7 on different types of seabeds.

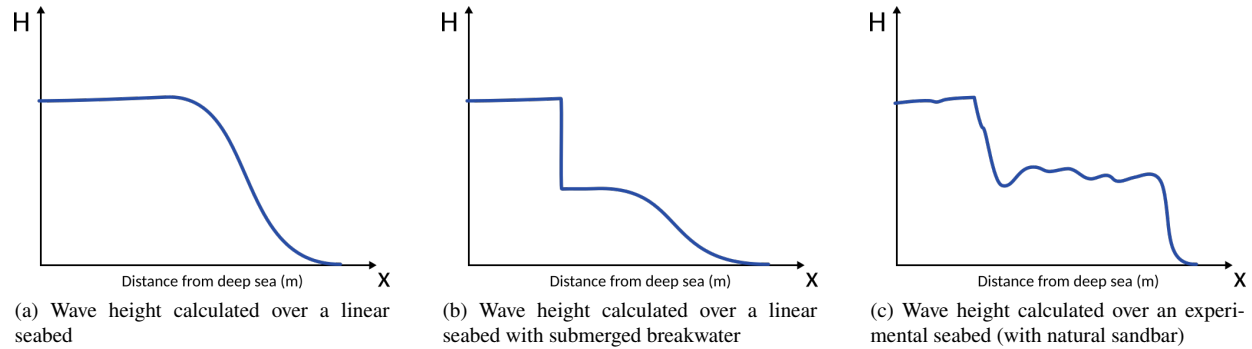


Figure 7: Illustration of Hydrodynamic model no.4 on different seabeds

Figure 7 shows that this model can handle the introduction of geotubes. The structure causes the waves to break prematurely. Wave height drops and shoaling resumes. This is also true for natural sandbars. Once the waves break, waves can once again shoal, allowing for multiple breakings if necessary.

❗ This model is not recommended for Opti-Morph because of the unstable effect it has on the seabed.

II.2.3.e. Hydrodynamic model no.5: Weighted window local shoaling model

Technical features

Technical features

- **Code name:** shoaling_window
- **Use:** Regular or irregular seabeds
- **Advantages:** Fast; Possibility of multiple wave-breakings; Takes into account the effect of the seawards waves; Handles submerged breakwaters
- **Inconveniences:** Poor management of deep sea conditions
- **Additional entry parameters:** d_w : maximal distance of local spatial dependency of a wave
- **Description:** Seaward waves influence wave height with decreasing effect
- **Governing equations:**

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0^w(x, t) K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \gamma h(x, t) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, where H_0^w is the weighted average of the seaward waves.

A Time dependency of Ω_B and Ω_S have been omitted for clarity.

Detailed description

Instead of considering that waves depend solely on offshore wave height H_0 as in II.2.3.c., or a nearby seaward point as in II.2.3.d., this model suggests that shoaling waves are decreasingly influenced by seawards waves. The greater the distance, the less effect it has of the present wave height. Let $d_w > 0$ be the maximal distance of local spatial dependency of a wave. Wave height at $x \in \Omega_S$ depends on the behavior of the wave height over the interval $[x - d_w, x)$ with a strong influence at the upper-bound and little to no influence at the lower-bound. As such, we introduce a weighting function w , defined over $[0, d_w]$ and quantifies the influence of the seawards waves on the current wave. It is defined such that $w(0) = 1$, $w(d_w) = 0$ and decreases exponentially:

$$\begin{aligned} w : [0, d_w] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \exp\left(\ln(0.01) \left(\frac{x}{d_{win}}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (19)$$

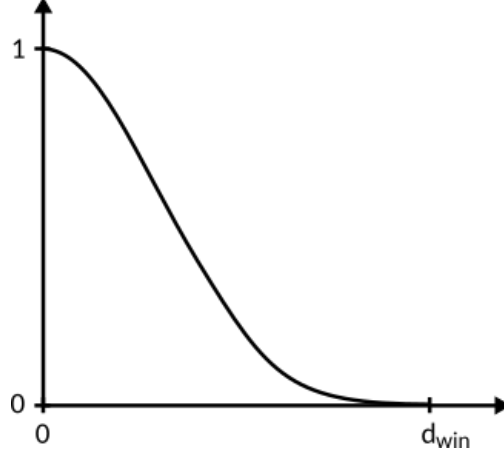


Figure 8: Weighting function w , equal to 1 closest to the present wave and decreases exponentially as the distance seaward increases

An illustration of the weighting function w is given in Figure 8. However, if breaking occurs, the history of the wave prior to breaking should not be relevant. This is to ensure that once the energy of the waves is lost due to breaking, it cannot be regained. The term H_0 in equation (4) (or the term $H(\cdot - \varepsilon)$ in (17)) is now replaced by a weighted average of the seaward wave height, denoted H_0^w and defined as:

$$H_0^w(x, t) = \frac{1}{\int_{x-X}^x w(x-y)dy} \int_{x-X}^x w(x-y)H(y)K(y)dy \quad (20)$$

where $X = \min(x, d_w, \text{dist}(x, x_B))$. Introducing X ensures wave history is taking into account over the appropriate zone: $X = x$ indicates that the zone of local spatial dependency is cut off by the lower-bound of the domain, $X = d_w$ depicts wave dependency over the maximal distance, and $X = \text{dist}(x, x_B)$ indicates that the zone of local spatial dependency is interrupted by waves breaking.

Shoaling waves are therefore described by:

$$H(x, t) = H_0^w(x, t)K_S(x, t) \quad (21)$$

for all $x \in \Omega_S$ and $t \in [0, T]$.

As such, wave height over the cross-shore profile Ω is given by:

$$H(x, t) = \begin{cases} H_0^w(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \\ \gamma h(x, t) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases} \quad (22)$$

Illustration

An illustration of the the wave height provided by this model is given in Figure 9 on different types of seabeds.

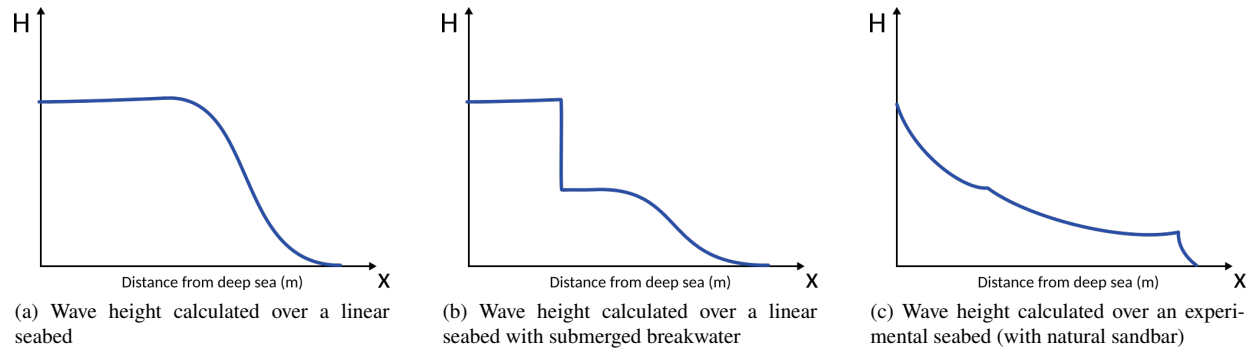


Figure 9: Illustration of Hydrodynamic model no.5 on different seabeds

Like before, this model can handle multiple breakings and the introduction of submerged breakwaters. In addition, it produces stable results. However, in some configurations, the poorly managed boundary conditions may cause a drop in wave height at deep-sea border (e.g. Fig. 9c). This may happen when $x = 0$ doesn't correspond to deep-sea conditions, a condition which is not always possible when applying the model to a flume configurations.

i This model is recommended on regular seabeds, with and without submerged breakwaters. However, the user must proceed with caution when applying to an experimental setting.

II.2.3.f. Hydrodynamic model no.6: Weighted window local shoaling model and improved boundary conditions

Technical features

Technical features

- **Code name:** shoaling_window_LC
- **Use:** Regular or irregular seabeds
- **Advantages:** Fast; Possibility of multiple wave-breakings; Takes into account the effect of the seawards waves; Handles submerged breakwaters; Proper handling of deep sea conditions
- **Inconveniences:** May lead to overly dissipative waves
- **Additional entry parameters:** d_w : maximal distance of local spatial dependency of a wave
- **Description:** Previous hydrodynamic model with linear combination of 6 equations for smoother boundary conditions
- **Governing equations:**

$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha_w(x))H_0(t) + \alpha_w(x)H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_S(x, t) & \text{if } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases}$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, where H_0^w is the weighted average of the seaward waves and $\alpha_w(x) = \frac{x}{d_w}$ over $[0, d_w]$.

▲ Time dependency of Ω_B and Ω_S have been omitted for clarity.

Detailed description

The boundary conditions of the previous model lead to unrealistic wave height over the lowermost part of the domain Ω . The weighting function w is provided with a very small number of points at the beginning of Ω , which may lead to an unreasonable drop in wave height in deeper waters. To allow a smooth transition between offshore and nearshore-dependent waves, we adopt a linear combination of the initial shoaling equation (4) and the weighted shoaling equation (21) over the lowermost part of Ω .

Let α_w be the linear combination parameter combining both shoaling physics, defined by:

$$\begin{aligned} \alpha_w : [0, d_w] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto \alpha_w(x) = \frac{x}{d_w} \end{aligned} \quad (23)$$

Over the deepest portion of Ω_S , more specifically, the interval $[0, d_w]$, shoaling wave height is defined such that the initial shoaling equation (4) prevails for x close to 0 and the weighted shoaling equation (21) dominates for x close to d_w . A smooth transition between models is achieved via the parameter α_w . The weighted shoaling equation (21) is also adopted over the remaining portion of Ω_S , beyond $x = d_w$.

Wave height over the shoaling zone Ω_S is therefore defined for all $x \in \Omega_S$ and $t \in [0, T]$ by:

$$H(x, t) = \begin{cases} [(1 - \alpha_w(x))H_0(t) + \alpha_w(x)H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{if } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_S(x, t) & \text{if } x \geq d_w \end{cases} \quad (24)$$

Adopting the same wave height equation over Ω_B as before, with Equation (15), wave height over the cross-shore domain is defined for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ by:

$$H(x, t) = \begin{cases} \left[(1 - \alpha_w(x))H_0(t) + \alpha_w(x)H_0^w(x, t) \right] K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t)K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases} \quad (25)$$

Illustration

An illustration of the the wave height provided by this model is given in Figure 10 on different types of seabeds.

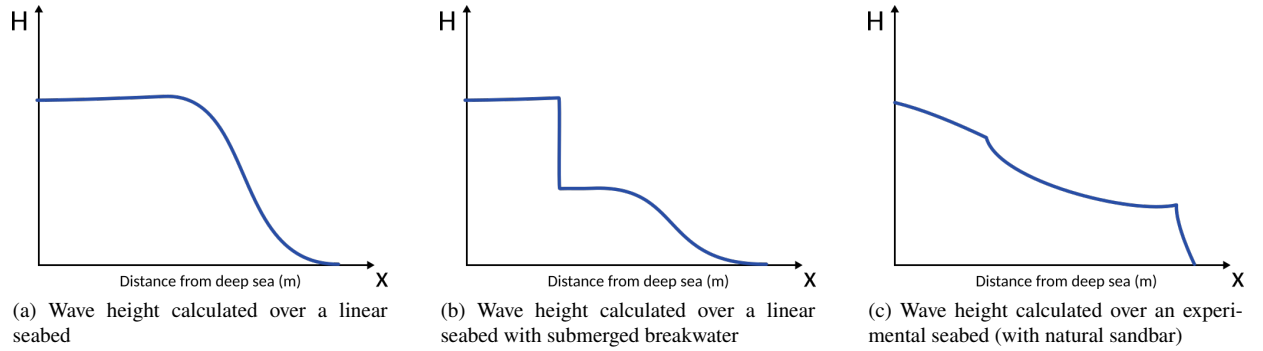


Figure 10: Illustration of Hydrodynamic model no.6 on different seabeds

Now that the boundary condition has been properly dealt with, we no longer observe the unusual drop at the beginning of the domain. Acceptable wave height is produced in all three settings.

i This model is recommended on regular seabeds, with and without submerged breakwaters, as well as in experimental settings.

II.2.3.g. Hydrodynamic model no.7: Weighted window shoaling model with anti-dissipative effect

Technical features

Technical features

- **Code name:** shoaling_window_LC_ADT
- **Use:** Regular or irregular seabeds
- **Advantages:** Fast; Possibility of multiple wave-breakings; Takes into account the effect of the seawards waves; Handles submerged breakwaters; Proper handling of deep sea conditions; Control of the dissipative effect of the waves;
- **Inconveniences:** TBA
- **Additional entry parameters:** d_w : maximal distance of local spatial dependency of a wave; a_{AD} and b_{AD} : anti-dissipative parameters
- **Description:** Previous hydrodynamic model with the possibility of including an anti-dissipative term.
- **Governing equations:**

$$H(x, t) = \chi_{AD}(x) \begin{cases} [(1 - \alpha_w(x))H_0(t) + \alpha_w(x)H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t) K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, where H_0^w is the weighted average of the seaward waves, $\alpha_w(x) = \frac{x}{d_w}$ over $[0, d_w]$ and χ_{AD} is an anti-dissipative term.

A Time dependency of Ω_B and Ω_S have been omitted for clarity.

Detailed description

Depending on the required wave behavior, it may be necessary to limit the dissipation of the waves. Indeed, one may discover that the hydrodynamic model of section II.2.3.f. dissipates too much energy over the cross-shore profile. This is especially relevant when comparing the numerical wave height with experimental data. For the purposes of allowing the user to calibrate the dissipation of the shoaling waves, we introduce the following anti-dissipative term χ_{AD} :

$$\chi_{AD}(x) = \begin{cases} \left(1 + a_{AD} \frac{x}{x_{\max}}\right)^{b_{AD}} - \left(1 + a_{AD} \frac{x_{\Omega_S^-}(x)}{x_{\max}}\right)^{b_{AD}} + 1 & \text{for } x \in \Omega_S \\ 1 & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases} \quad (26)$$

where $x_{\Omega_S^-}(x)$ is the lower-bound of the connected subset of Ω_S where x is found. The parameters a_{AD} and b_{AD} allow the user to define the manner in which the waves dissipate; a_{AD} determines the slope of χ_{AD} and b_{AD} its quadratic behavior. An example of the anti-dissipative term is given in Figure 11, with $b_{AD} > 1$.

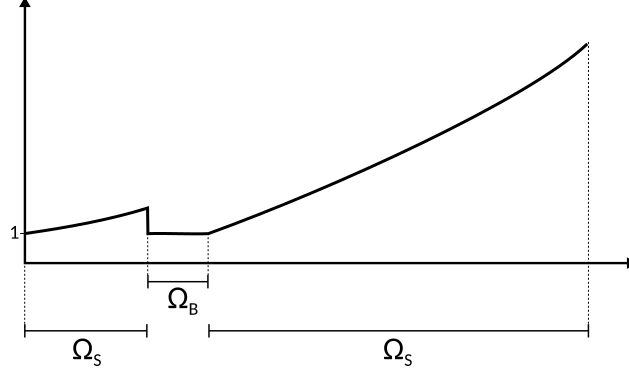


Figure 11: Example of the anti-dissipative term

❶ Setting $(a_{AD}, b_{AD}) = (0, 1)$ disables the anti-dissipative effect.

Wave height over the cross-shore profile Ω is defined by:

$$H(x, t) = \chi_{AD}(x) \begin{cases} [(1 - \alpha_w(x))H_0(t) + \alpha_w(x)H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_w \\ H_0^w(x, t) K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_w \\ \gamma h(x, t) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases} \quad (27)$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$.

This is the model used in the subsequent applications of Section IV.

Illustration

An illustration of the the wave height provided by this model is given in Figure 12 on different types of seabeds.

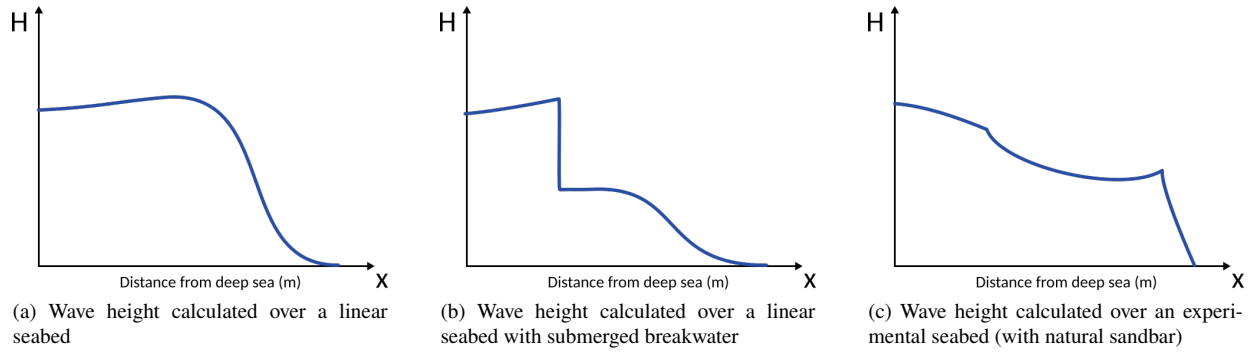


Figure 12: Illustration of Hydrodynamic model no.7 on different seabeds

With the proper choice of a_{AD} and b_{AD} , we can now calibrate the hydrodynamic model to fit the required profile. This is especially useful in the case of an experimental flume setting where wave height has been collected as part of the experiment.

❶ This model is recommended on regular seabeds, with and without submerged breakwaters, as well as in experimental settings.

II.3 Morphodynamic model by wave energy minimization

II.3.1 Introduction

This section is devoted to the presentation of the Opti-Morph model. This one-of-a-kind morphodynamic model is based on optimization theory. The fundamental assumption governing Opti-Morph states that the seabed evolves over time so as to minimize a certain quantity, named cost function. The choice of cost function depends on what is considered the driving force behind the morphodynamic response to the seabed. Several cost functions have been considered, but all revolve around wave energy. In other words, the shape of the seabed varies in an effort to minimize the energy of the surface waves at that given time. At each time, the model indicates the direction to a local minimum of the cost function with regard to the parameterization of the seabed. Two physical parameters limit or encourage seabed mobility depending on the proprieties of the sediment and the depth of the water. Furthermore, constraints are added to this optimization problem as a means to incorporate additional physics to the model. Constraints are regarded as secondary processes in regards to the minimization of the cost function, which is deemed the primary force behind the morphodynamic response to the seabed. Three constraints have been included in this model. The first concerns the maximal slope of the seabed, the second manages the sandstock of the profile in the case of an experimental flume, and the third concerns the presence of bedrock.

The optimization problem that Opti-Morph seeks to solve is:

For each $t \in [0, T]$, find the shape of the seabed $\psi(t) \in \Psi$ such that the cost function $\mathcal{J}(t)$ is minimal, while subjected to constraints.

This morphodynamic model is associated with one of the hydrodynamic models from section II.2, which provides the morphodynamic model with the necessary hydrodynamic quantities.

II.3.2 Governing seabed dynamics

In order to describe the evolution of the seabed, we assume that at each time $t \in [0, T]$, the seabed ψ , in its effort to minimize a certain energy related quantity \mathcal{J} , verifies the following dynamics over Ω :

$$\begin{cases} \psi_t(\cdot, t) = \Upsilon \Lambda d(\cdot, t) \\ \psi(\cdot, 0) = \psi_0(\cdot) \end{cases} \quad (28)$$

where ψ_t is the evolution of the seabed over time, Υ is the mobility of the sand ($m.s.kg^{-1}$), Λ is the excitation of the seabed by the water waves ($-$), and d is the direction of descent (J).

II.3.2.a. Parameter Υ

The first parameter Υ takes into account the physical characteristics of the sand and represents the mobility of the sediment. For Υ great, as is the case with finer particles, the seabed may be submitted to significant change. For Υ close to zero, little mobility is observed, as is the case of a seabed composed of larger rocks. This parameter, expressed in $m.s.kg^{-1}$, may vary over the cross-shore profile. Further interpretation of the nature of this parameter will be provided in future works.

II.3.2.b. Parameter Λ

The second parameter Λ represents the influence of the water depth on the seabed and is defined using the orbital velocity damping function φ (cf. [Soulsby, 1987]):

$$\begin{aligned} \varphi : \Omega \times [0, h_0] &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, z) &\longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - z)))}{\cosh(k(x)h(x))} \end{aligned} \quad (29)$$

An illustration of the orbital velocity of the wave particles is given in Figure 13. This function describes the excitation of the water particles for a given location along the cross-shore profile and a given water depth. However, our interest lies in the excitation of the seabed by the surface waves. Therefore, it is natural to consider the orbital damping function at $z = \psi(x)$. The parameter Λ of Equation (28) is therefore defined by:

$$\Lambda(x) = \varphi(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))} \quad (30)$$

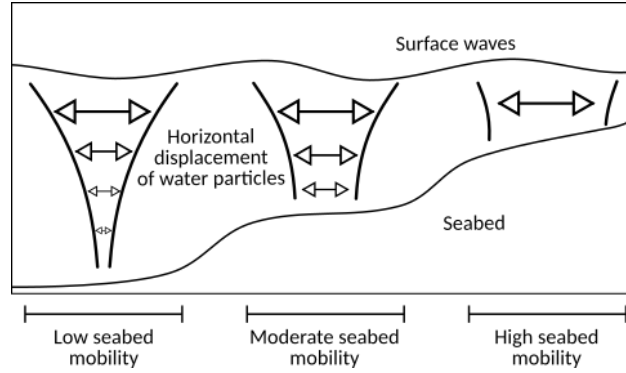


Figure 13: Illustration of the orbital velocity over the cross-shore profile

This parameter governs the manner in which the waves affect the seabed. In deeper waves, the surface waves have little to no effect on the seabed below. No movement should be observed of the seabed, and thus $\Lambda \approx 0$ over this portion of the cross-shore profile. When the waves have a large impact on the seabed, e.g. at the coast, greater movement can be observed and as such we set $\Lambda \approx 1$. An illustration of Λ is given in Figure 14.

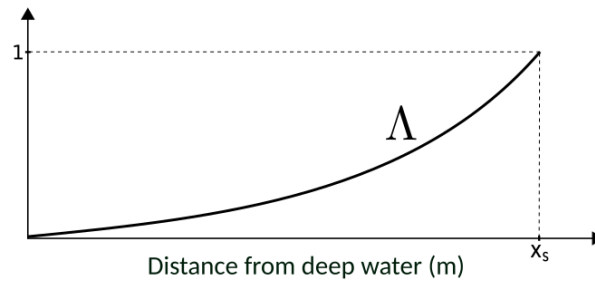


Figure 14: Variation of the parameter Λ over the cross-shore profile

II.3.2.c. Direction of descent d :

The vector d is the direction of descent. In unconstrained circumstances, we set $d = -\nabla_{\psi} \mathcal{J}$, i.e. the direction indicating the minimum of the cost function \mathcal{J} with regards to the seabed ψ . However, adding constraints changes the value of d , but increases the efficiency of the model, by incorporating more physics into the model. This results in a less optimal direction of descent but one that is capable of respecting the criteria required by the constraints, and as such produces more realistic morphodynamic results.

The following section explores the different cost functions / directions of descent implemented in Opti-Morph.

Keyword	Definition	Commentary
CF0	$d = -\nabla_{\psi} \mathcal{E}_S \chi_{\Omega_S}$	Recommended
CF1	$d = -\frac{x_B}{x_S} \nabla_{\psi} \mathcal{E}_S \chi_{\Omega_S}$	
CF2	$d = -\frac{x_B^2}{x_S} \nabla_{\psi} \mathcal{E}_S \chi_{\Omega_S}$	
CF3	$d = -x_B \nabla_{\psi} \mathcal{E}_S \chi_{\Omega_S}$	
CF4	$d = -\frac{x_B}{x_S} \int_{\Omega_S} \nabla_{\psi} \mathcal{E}_S \chi_{\Omega_S}$	
CF5	$d = (1 - \Lambda)CF2 + \Lambda CF4$	where Λ is the excitation of the seabed
CF6	$d = (1 - \Lambda)CF3 + \Lambda CF4$	where Λ is the excitation of the seabed

Table 2: Table of the different directions of descent implemented in Opti-Morph

II.3.3 Choice of direction of descent

The term "cost function" is used for the quantity to be minimized and is noted \mathcal{J} . The term "direction of descent" is used for direction indicating the manner in which the seabed varies, and is denoted d . In the more simpler cases, $d = -\nabla_{\psi} \mathcal{J}$, but exploring other directions of descents leads to more complex formulations. It is not always possible to express the cost function \mathcal{J} when exploring directions.

For the purpose of illustrating the simplicity of implementing a new cost function, seven different directions of descent have been considered. Modifying d modifies the physics behind the morphodynamic response of the seabed. These choices are shown in Table 2 and are all based on the energy of shoaling waves given by the following equation:

$$\mathcal{E}_S = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad (31)$$

where Ω_S is the shoaling zone, ρ_w is the density of the water ($kg.m^{-3}$), g is gravitational acceleration ($m.s^{-2}$), H is the height of the wave (m) and ψ is the elevation of seabed (m). We denote χ_{Ω_S} the characteristic function of the subset Ω_S of Ω .

The introduction of directions CF1, CF2, and CF3 occurred while exploring the different possible dimensions of the cost function \mathcal{J} . Ultimately, it was decided to maintain a cost function expressed in $J.m^{-1}$, so CF0 was retained. Directions CF4, CF5, and CF6 were proposed in an attempt to combine two different physics depending on the location along the cross-shore profile. A simple well-chosen factor may be needed to ensure that d has a consistent dimension. All of the considered directions have been kept in order to demonstrate how easy it is to introduce a new cost function to the model but should be adopted with caution.

The first and simplest choice is CF0 and is the one used in the subsequent applications of Section IV. The directions CF5 and CF6 are more complex and combines two physics to simulate the seabed evolution. More details can be found for these choices in sections II.3.3.a. and II.3.3.b..

II.3.3.a. Cost function based on \mathcal{E}_S

The evolution of the seabed is assumed to be driven by the minimization of a cost function \mathcal{J} , here described as the potential energy of shoaling waves:

$$\mathcal{J}(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_s} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad (32)$$

Differentiating \mathcal{J} with respect to ψ yields the direction of descent CF0. This direction was used in [Cook et al., 2021b] and is currently the recommended choice of direction.

II.3.3.b. Cost function combining two physics

In this section, we suppose that two different physics govern the evolution of seabed based whether the waves act globally or locally on the seabed. Both physics are based on the potential energy of the waves over the cross-shore profile, given by Equation (31). However, unlike in Section II.3.3.a., an explicit formulation of \mathcal{J} is not possible.

As mentioned in Section II.3.2 with the introduction of the Λ parameter, the seabed evolves differently in deep waters and at the coast. Therefore, we define two different physics governing the seabed evolution depending on location across the cross-shore profile. We denote A_1 the gradient of the potential surface energy of the waves and A_2 the gradient of the mean value of A_1 .

$$A_1(x, t) = -\nabla_{\psi} \mathcal{E}(x, t) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (33)$$

$$A_2(x, t) = -\frac{1}{x_B(t)} \int_{\Omega_s} \nabla_{\psi} \mathcal{E}(x, t) dx \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T] \quad (34)$$

The mean value A_2 was chosen to represent the physics governing the seabed over the deeper waters since the seabed is affected in a global manner in this zone. The gradient of the potential surface energy A_1 will be used at the coast, where the waves have a local effect on the seabed. In order to differentiate the different zones of the cross-shore profile, the parameter Λ is used (cf. Equation (30)). We set the direction of descent as:

$$d = \Lambda A_1 + (1 - \Lambda) A_2 \quad (35)$$

The term A_1 is dominant near the coast (for a local effect) and the term A_2 is dominant in deep waters (for a global effect). The parameter Λ is used to weight these two physics.

❶ Up to the multiplication of a constant, this approach is used for the directions CF5 and CF6.

II.3.4 Constraints

As mentioned already, the driving force behind the morphodynamic response to the seabed is assumed to be the minimization of the energy of the shoaling waves. Any physical phenomenon deemed secondary to this mechanism is represented in the form of a constraint. Constraints are added to incorporate more physics into the model, and as such provide more realistic results. At the current stage of development, three constraints have been implemented, though more can be introduced if necessary. This includes a maximal slope constraint to prevent unrealistically steep seabeds, a sandstock constraint for flume configurations, and a bedrock constraint.

II.3.4.a. Maximal sand slope constraint

The slope of the seabed is bounded by a grain-dependent threshold M_{slope} ([Dean and Dalrymple, 1991]). If a slope becomes too steep and exceeds this threshold, avalanching occurs. The maximal sand slope constraint prevents the slope from exceeding this upper limitation and is conveyed by the following inequality:

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}} \quad (36)$$

❗ The parameter M_{slope} may vary over the cross-shore profile.

II.3.4.b. Sandstock constraint

In the case of an experimental flume, the sediment composing the seabed cannot leave the confines of the tank over the course of the simulation. Also, sediment cannot be added during this period. Therefore, a sandstock constraint is introduced which asserts that the quantity of sand in a flume must be constant over time, contrarily to an open-sea simulation where the sediment can move freely between the limits of the domain. The sandstock constraint is therefore expressed by the following equation:

$$\int_{\Omega} \psi(x, t) dx = \int_{\Omega} \psi(t = 0, x) dx \quad \forall t \in [0, T] \quad (37)$$

❗ This constraint is essential for validating the numerical model with experimental data.

❗ The sandstock constraint is also applicable to an open-sea configuration when little to no transfer of sediment is observed between the deep sea and the nearshore area.

For a given time $t \in [0, T]$, we define $C_{\text{sand}}(t)$ as the difference between the current and initial sandstock:

$$C_{\text{sand}}(t) = \int_{\Omega} (\psi(x, t) - \psi(t = 0, x))^2 dx \quad (38)$$

❗ The exponent 2 ensures that $C_{\text{sand}} \geq 0$, while keeping C_{sand} differentiable.

The optimization problem becomes:

For each $t \in [0, T]$, find the shape of the seabed $\psi(t) \in \Psi$ such that the cost function $\mathcal{J}(t)$ is minimal, while maintaining $C_{\text{sand}}(t) = 0$.

Two methods can be adopted to ensure that the sandstock remains constant over time, the *penalization method* and/or the *feasible direction method*.

Penalization method

This method consists of adding a penalty term to the cost function \mathcal{J} . So instead of minimizing \mathcal{J} , we minimize both \mathcal{J} and C_{sand} simultaneously. The new cost function \mathcal{J}_{pen} is given by:

$$\mathcal{J}_{\text{pen}} = \mathcal{J} - \beta C_{\text{sand}} \quad (39)$$

where $\beta > 0$ is the sandstock constraint precision parameter and determines the importance of the conservation of the sand constraint. For β small, the constraint is largely ignored and the minimization of the \mathcal{J} governs the evolution of the seabed. For β great, the sandstock constraint dominates the minimization method.

▲ A simple well-chosen factor may be used to express \mathcal{J}_{pen} as the same dimension as \mathcal{J} .

Feasible directions

Another possible approach to incorporate the sand constraint into the morphodynamic model is to use the *feasible direction method*.

Since $C_{\text{sand}}(0) = 0$, we wish to minimize \mathcal{J} while keeping C_{sand} constant. This equates to following the direction $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$ while keeping $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}} = 0$. In order to do so, we project the direction $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$ onto the orthogonal of $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}$. Hence, the direction of descent d becomes:

$$d = \nabla_{\psi} \mathcal{J} - \left\langle \nabla_{\psi} \mathcal{J}, \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|} \quad (40)$$

This new direction of descent, illustrated by Figure 15, describes a less optimal path to the minimum of \mathcal{J} , but ensures that $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}(t) = 0$, i.e. $C_{\text{sand}}(t) = 0$, for all $t \in [0, T]$.

We can easily show that the new direction d and $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}$ are now orthogonal:

$$\langle d, \nabla_{\psi} C_{\text{sand}} \rangle = \left\langle \nabla_{\psi} \mathcal{J} - \left\langle \nabla_{\psi} \mathcal{J}, \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|} \right\rangle \frac{\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}}{\|\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}\|}, \nabla_{\psi} C_{\text{sand}} \right\rangle = 0$$

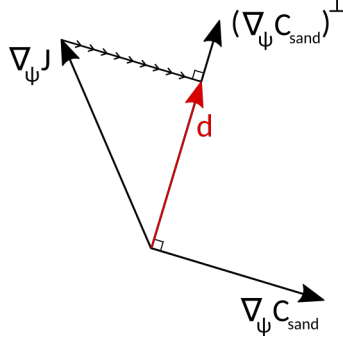


Figure 15: Illustration of the new direction of descent in \mathbb{R}^2 : the direction $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$ is projected onto the orthogonal of $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}$ to yield d .

❗ The feasible direction method can also be used to guarantee that the total energy of the waves is conserved for a same forcing condition with regards to the evolution of the seabed, i.e. $\mathcal{E}(\psi_1, t) = \mathcal{E}(\psi_2, t)$ for all $\psi_1, \psi_2 \in \Psi$ and $t \in [0, T]$. All one needs to do is project $\nabla_{\psi} \mathcal{J}$ onto the common orthogonal vector of $\nabla_{\psi} C_{\text{sand}}$ and $\nabla_{\psi} \mathcal{E}$.

II.3.4.c. Bedrock constraint

The third constraint concerns the existence of bedrock in the beach configuration. We assume bedrock to be a solid invariable feature to the cross-shore profile, with a layer of sediment covering it.

Let B be the elevation of the bedrock over Ω as in Figure 1. By definition, B remains constant over time and the seabed ψ cannot appear lower than the bedrock:

$$\psi(x, t) \geq B(x) \quad \forall x \in \Omega, t \in [0, T] \quad (41)$$

In other words, the bedrock acts as a lower bound of the seabed elevation. Equality of Equation (41), for a given $x \in \Omega$, implies exposure of the bedrock.

III Numerical model

III.1 Presentation

In this section, we present the numerical model Opti-Morph and how to use it.

III.1.1 Workflow

Figure 16 illustrates the workflow of the Opti-Morph model, with the associated hydrodynamic model. Before launching the model, the user must first define the initial setting of the simulation. This includes the forcing data, the choice of hydrodynamic model, the seabed elevation data, the choice of cost function, and the constraints.

For each time step, the forcing data is provided to the hydrodynamic model. This model then calculates the wave height over the cross-shore profile and thus provides the cost function \mathcal{J} (or direction of decent d) used by Opti-Morph's morphodynamic module. Using the imported sand characteristics, the new shape of the seabed is determined by minimizing the cost function \mathcal{J} (or following the direction of descent d). Constraints are applied to the seabed either before or after the minimization takes place, and the new seabed is retained. At the next time step, the hydrodynamic model is fed a new forcing condition as well as the new seabed. This cycle continues over the course of the simulation, and illustrates the intricate interaction between the hydrodynamic and morphodynamic processes.

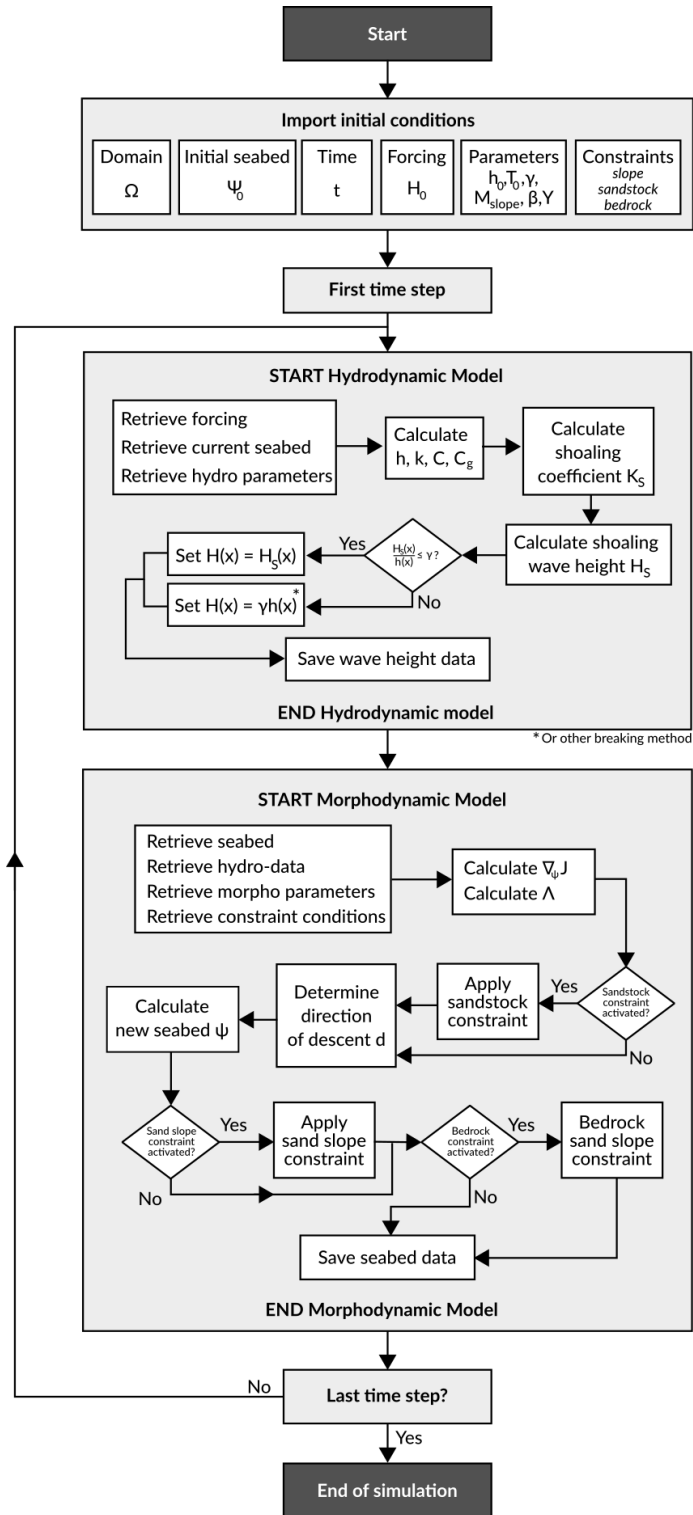


Figure 16: Diagram of the workflow of the Opti-Morph model

III.1.2 Algorithm summary

A detailed summary of the algorithm performed by Opti-Morph is provided below.

For each time step t_n , for $n \in [1, N_T]$, the following steps are applied:

→ **Apply Hydrodynamic model**

- Step 1: Import forcing data $H_0(t_n)$
- Step 2: Import current morphodynamic data ψ_{n-1}
- Step 3: Calculate wave height H_n
- Step 4: Save H_n

→ **Apply Morphodynamic model**

- Step 1: Import current wave height H_n
- Step 2: Import Υ and Λ parameters
- Step 3: Calculate cost function \mathcal{J}_n
- Step 4: Calculate $\nabla_{\psi} \mathcal{J}_n$
- Step 5: Obtain the direction of descent d_n
- Step 6: Apply local a priori constraints (if necessary)
- Step 7: Apply global a priori constraints (if necessary)
- Step 8: Determine new seabed: $\psi_n = \psi_{n-1} + \Upsilon \Lambda d_n$
- Step 9: Apply local a posteriori constraints (if necessary)
- Step 10: Apply global a posteriori constraints (if necessary)
- Step 11: Save ψ_n

❗ The sandstock constraint is considered a global a priori constraint whereas the sand slope and the bedrock constraints are considered local a posteriori constraint.

III.1.3 Class organisation

The numerical model Opti-Morph has been implemented using an oriented object structure. Figure 17 illustrates the structure of the model using a UML diagram. Structuring the model using classes was chosen in order to allow flexibility and creativity within the model. Each object can be regarded as a building block which can easily be modified or replaced depending on the user's intentions. For instance, a different hydrodynamic model can be implemented and adapted to the Opti-Morph model with ease. The same applies for the choice of cost function; to introduce a different cost function \mathcal{J} , the user simply has to implement the new function as well as its gradient and leave the rest of the Opti-Morph model unchanged.

An abstract class `Model` is used to define the general characteristics of a model. We have two different types of model: a hydrodynamic model and a morphodynamic model. The abstract class model is used because both models share a common structure and methods. For instance, in this model we find the accessors relative to the parameters and variables of the model in question. A model contains both a set of parameters and a set of variables. The parameters are considered constant over the entirety of the simulation and determine the characteristics of the model. As its name suggests, variables vary over the execution of the simulation. For instance, the wave-breaking index γ is considered a parameter of hydrodynamic model whereas wave height H is considered a variable. The accessors relative to this data are respectively `getP`, `setP` and `getV`, `setV`.

The `Domain` class defines the mesh of the domain as well as certain physical characteristics of the configurations such as the mean water level h_0 .

No.	Description	Keyword
1	Shoaling model with decreasing exponential breaking	shoaling_1run
2	Shoaling model with decreasing exponential breaking and energy conservation	shoaling_2run
3	Global shoaling model with Munk's breaking condition	shoaling_throughout
4	Local shoaling model with Munk's breaking condition	shoaling_incremental
5	Weighted window local shoaling model	shoaling_window
6	Weighted window local shoaling model and improved boundary conditions	shoaling_window_LC
7	Weighted window shoaling model with anti-dissipative effect	shoaling_window_LC_ADT

Table 3: Table of the different hydrodynamic models and their keywords

The hydro-morphodynamic class `Hydro_morpho_model` is the central component of the Opti-Morph model. This class links the hydrodynamic class `Hydro_model` with the morphodynamic class `Morpho_model`. It is also here where the run method is located. Because of the close relation between the hydrodynamic model `Hydro_model` and the morphodynamic model `Morpho_model`, both classes are associated with each other. Therefore, a hydrodynamic object can be found in the morphodynamic model and vice versa.

The hydrodynamic class `Hydro_model` which inherits from the model class `Model` is used to determine the wave height over the cross-shore profile. To do so, we use the morphodynamic data (such as the seabed) as well as forcing data. The forcing data is stored in a separate class named `Forcing`. Applying the `run` method calculates the wave height and saves the result in a table under the keyword `H`. Each of the hydrodynamic models presented in Section II.2 are sub-classes of `Hydro_model`. A summary of the different keywords is features in table 3. Additional tools used by the `Hydro_model` class can be found in the imported file `hydrotools.py`.

The morphodynamic class `Morpho_model` which also inherits from the model class `Model` is used to determine the evolution of the seabed using optimization methods. Applying the `run` method calculates the seabed elevation at that given time step, using the data calculated by the hydrodynamic model `Hydro_model`. The physics is determined by the choice of cost function, whose keywords are summarized in Table 2. The constraints associated to this optimization problem are stored in a separate class named `Constraints`. The results of the morphodynamic simulation are saved in a table with the seabed stored under the keyword `psi`. Additional tools and methods relative to the morphodynamic model can be found in the imported file `morphotools.py`.

A final class named `plot_data` is called by the `Hydro_morpho_model` class and provides the visual representations of the results. Several methods have been implemented for different graphs depending on the users needs. Numerical data can also be exported if the user wishes to plot the data manually using external tools.

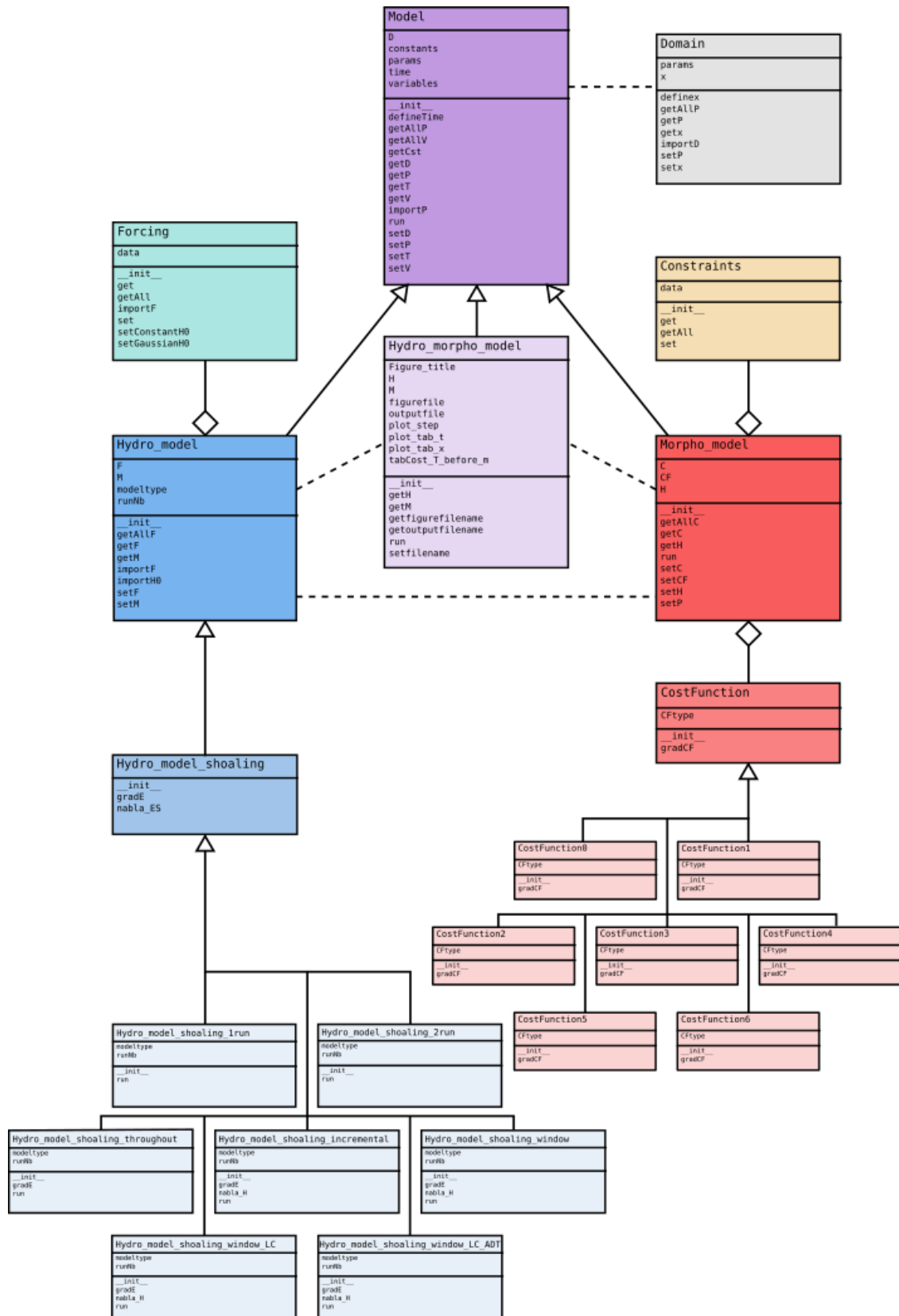


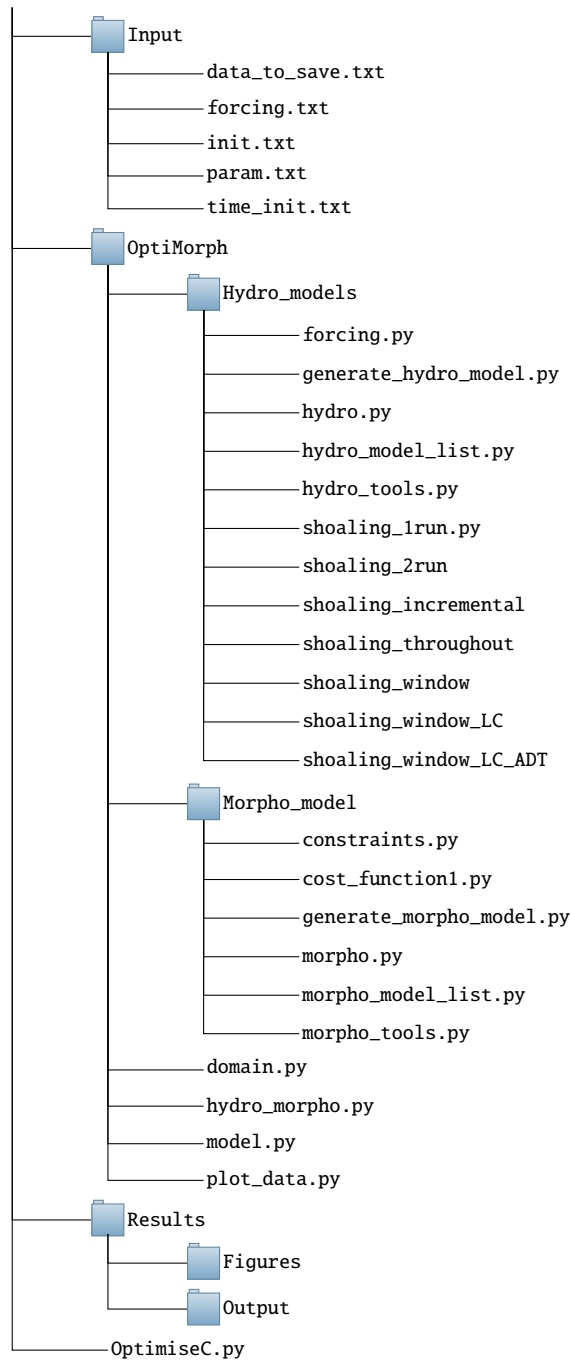
Figure 17: UML diagram of the Opti-Morph model

III.2 Running Opti-Morph

III.2.1 Getting started

This model was developed in Python 3.5.2. Therefore, in order to execute the Opti-Morph model, the user will need a version of Python compatible with Python 3.5.2 to be installed on their workstation as well as the following packages: `math`, `numpy`, `scipy`, `abc`, `matplotlib`, `netCDF4`.

The files should be organised as follows:



III.2.2 Main file

The main file of Opti-Morph that should be run either from the terminal or the chosen development environment is named `OptimiseC.py`.

The `OptimiseC.py` file is organised as followed:

- Import packages
- Import data from Input folder
- Figure preparation
- Definition of domain
- Definition of Hydrodynamic model
- Definition of Morphodynamic model
- Definition of Hydro-Morphodynamic model
- Definition of Output
- Run model

Below is an example of `OptimiseC.py` is provided below. The sections highlighted in yellow are modifiable by the user. In particular, the choice of hydrodynamic model (line 52) and cost function (line 67). This will no longer be the case once a graphical user interface (GUI) is built.

```
1 from OptiMorpho.domain import *
2 from OptiMorpho.model import *
3 from OptiMorpho.Hydro_models.hydro import *
4 from OptiMorpho.Morpho_model.morpho import *
5 from OptiMorpho.hydro_morpho import *
6 from OptiMorpho.enum_lists import *
7 from OptiMorpho.enum_generators import *
8
9 from math import pi
10
11 # Import data
12 params = genfromtxt('Input/param.txt')
13 h0 = params[0]
14 T0 = params[1]
15 gamma = params[2]
16 beta = params[3]
17 sandflag = params[4]
18 smoothflag = params[5]
19
20 init = genfromtxt('Input/init.txt')
21 x = init[:,0]
22 psi0 = init[:,1]
23 bedrock = init[:,2]
24 mobility = init[:,3]
25 slopemax = init[:,4]
26
27 init_time = genfromtxt("Input/time_init.txt")
28 time = init_time[:,0]
29 H0 = init_time[:,1]
30
31 dts = genfromtxt('Input/data_to_save.txt', dtype = None)
32 dtpcpt = int(dts[0])
33 outargs_x = []
34 outargs_t = []
```

```

35 inX = True
36 if int(dts[1]) == 1:
37     outargs_x.append('default')
38 for i in range(2, len(dts)):
39     if (dts[i].decode('utf-8') == "END"):
40         inX = False
41     if inX == True:
42         outargs_x.append(dts[i].decode('utf-8'))
43     elif (dts[i].decode('utf-8') != 'END'):
44         outargs_t.append(dts[i].decode('utf-8'))
45
46 # Domain
47 D1 = Domain()
48 D1.setx(x)
49 D1.setP("h0", h0)
50
51 # Hydrodynamic model
52 H1 = generate_hydro_model(Enum_H.shoaling_window_LC_ADT)
53 H1.setF("T0", T0)
54 H1.setF("C0", 9.81/(2*pi)*T0)
55 H1.setF("sigma0", 2*pi/T0)
56 H1.setF("theta0", 0)
57 H1.setP("gamma", gamma)
58 H1.setP("dwin", 5)
59 H1.setP("Nwin", floor(dwin/xstep))
60 H1.setP("aAD", 1)
61 H1.setP("bAD", 1.2)
62 H1.setT(time)
63 H1.setF("H0", H0)
64
65 # Morphodynamic model
66 M1 = Morpho_model()
67 M1.setCF(Enum_CF.CF0)
68 M1.setC("sand", sandflag)
69 M1.setC("Mslope", slopemax)
70 M1.setP("rho0", mobility)
71 M1.setP("bedrock", bedrock)
72 M1.setV("beta", beta)
73 M1.setP("psi0", psi0)
74 M1.setP("smoothing", smoothflag)
75
76 # Hydro-morphodynamic model
77 HMI = Hydro_morpho_model(D1, H1, M1)
78 HMI.Figure_title = "Example of simulation with linear seabed"
79 filetag = "Test_1"
80 HMI.setfilename(filetag)
81
82 # Set time-dependent and space-dependent variables to plot
83 to_plot_t(HMI, outargs_t)
84 to_plot_x_during_run(HMI, dtcpt, outargs_x)
85
86 # Run Opti-Morph
87 HMI.run()

```

Listing 1: Example of OptimiseC.py file

III.2.3 Input data

The input data is found in a folder named **Input**. Four files should appear in this folder:

- **init.txt**: initial cross-shore data
- **time_init.txt**: forcing data
- **param.txt**: model parameters
- **data_to_save.txt**: requested output data

III.2.3.a. The **init.txt** file

Let $(x_p)_{p \in [0, N_\Omega]}$ be the discretization of Ω , with N_Ω the total number of points.

The **init.txt** file is composed of 5 columns of data:

- the discretization of the domain: $(x_p)_{p \in [0, N_\Omega]}$
- the initial seabed: $(\psi(x_p))_{p \in [0, N_\Omega]}$
- the bedrock: $(B(x_p))_{p \in [0, N_\Omega]}$
- the sand mobility parameter: $(Y(x_p))_{p \in [0, N_\Omega]}$
- the slope parameter: $(M_{\text{slope}}(x_p))_{p \in [0, N_\Omega]}$

▲ Ideally, the bathymetric data should ensure that at $x = 0$, we are in deep water. That is, the water depth h is greater than half the wavelength L (cf. [Dean and Dalrymple, 1991]).

▲ For a seabed with the same type of sediment over the cross-shore profile, the mobility parameter and slope parameter will be constant over Ω .

▲ Setting the bedrock as $B(x_p) = 0$ for all $p \in [0, N_\Omega]$ deactivates the bedrock constraint.

▲ The user must verify that the initial seabed is consistent with the slope constraint parameter, i.e. that the slope of ψ_0 doesn't exceed M_{slope} . Otherwise, the model will automatically rectify the seabed so as to comply with the slope constraint after the first time step. This may result in a significant and instantaneous change to the seabed.

Examples of the **init.txt** file can be found in Section IV, Figures 21a and 24a.

III.2.3.b. The **time_init.txt** file

Let $(t_p)_{p \in [0, N_T]}$ be the discretization of the time interval $[0, T]$, with N_T the total number of points.

The **time_init.txt** file is composed on two columns of data and contains the time-dependent data:

- the discretization of the simulated time interval: $(t_p)_{p \in [0, N_T]}$
- the forcing wave height data: $(H_0(t_p))_{p \in [0, N_T]}$

Examples of the **time_init.txt** file can be found in Section IV, Figures 21b and 24b.

III.2.3.c. The **param.txt** file

The physical and numerical parameters of the model have been grouped together in one file named **param.txt** and organised by type to allow the user to easily modify the different parameters governing the Opti-Morph model. This file should contain the following parameters, in the given order:

```

# Domain parameters
h0

# Hydro parameters
T0
gamma

# Morpho parameters
beta

# Constraint flag
sandc

# Smoothing flag
smoothf

```

Here, h_0 is the still water level (m), T_0 is the wave period (s), here assumed constant over the cross-shore profile and γ is the wave-breaking index defined in Section II.2.2. The parameter β is the precision parameter required for the sandstock constraint (cf. section II.3.4) and $sandc$ is the flag associated with the sandstock constraint. The final parameter is the $smoothf$ is a smoothing function, that the user can apply to the seabed to remove noise due to numerical inaccuracies.

▲ To activate the sandstock constraint, set the flag to 1 and set the associated parameter β to its desired value. To deactivate the constraint, set the flag to 0. The same applied to the $smoothf$ flag.

▲ The slope constraint is permanently activated. In order to locally/temporarily deactivate it, the user can simply increase M_{slope} so that the constraint cannot be triggered (see Section IV.2).

Examples of the `param.txt` file can be found in Section IV, Figures 21c and 24c.

III.2.3.d. The `data_to_save.txt` file

The Opti-Morph model offers the possibility of creating a graphic representation of the different types of data, as well as exporting this data. The user provides the keywords of the data they wish to retrieve at the end of the simulation. The list of the required output figures/data is given in the `data_to_save.txt` file, situated in the Input folder.

The `data_to_save.txt` file is separated into 3 sections. The first concerns the number of time steps between each outputs of the space-dependent variables. Then the list of the space-dependent variables should be given, followed by the list of time-dependent variables.

An example of `data_to_save.txt` file is given below:

```

# Output data
T_out
default_out

# List of space-dependent variables to export/plot
*List*
END

# List of time-dependent variables to export/plot
*List*
END

```

where T_{out} is number of time steps between each output for the space-dependent variables. If the user desires a snapshot of the seabed, wave height, or any other space-dependent variable every 50 time incrementations, then they should indicate "50" in the first row of `data_to_save.txt` file.

i This parameter has no impact on the time-dependent figures/exports.

The keyword `default_out` is the flag indicating whether the user requires the default figure to be produced by Opti-Morph. An example of this figure is given in Figure 18. The list of space-dependent variables (defined over the cross-shore profile) is then given, with each keyword situated on a different line. The list of keywords can be found in Table 4 (left). The keyword `END` is required to mark the end of this first list. The list of time-dependent variables (defined over the time-series) follows, with one keyword per line. The list of keywords can be found in Table 4 (right). Once again, the keyword `END` is needed to mark the end of this second list.

Space dependent keywords	time-dependent keywords
<ul style="list-style-type: none"> • ADT^2: anti-dissipative term • C: phase velocity • Cg: group velocity • H: wave height • HS: shoaling wave height • Λ: wave excitation parameter • h: water depth • k: wave number • ψ: seabed elevation • $slope$: slope of the seabed 	<ul style="list-style-type: none"> • E_{after}: total wave energy after the seabed response • E: total wave energy • EBS: energy over Ω_B • EOB: energy over Ω_S • H_0: forcing wave height • α^1: breaking parameter • nbB: position of x_B in the discretization of the domain Ω • nbS: position of x_S in the discretization of the domain Ω • $sandstock$: sandstock • x_B: location of (first) breaking • x_S: position of the shoreline

Table 4: Table of keywords associated with the spatial (*left*) and temporal (*right*) variables available to plot/export

¹: only available for `shoaling_1run` and `shoaling_2run`

²: only available for `shoaling_window_LC_ADT`

III.2.4 Output data

At the end of the simulation, the requested figures/exports are found in the `Results` folder, with the figures in `Figures` and the exported data in `Output`.

III.2.4.a. Figure folder

At the end of the simulation, PNG images of the requested variables can be found in the `Figure` file.

If requested using the `default_out` flag set to 1, Opti-Morph produces a 6-panel figure detailing the main contributing variables of the simulation at a given time. An example of the default figure is given in Figure 18.

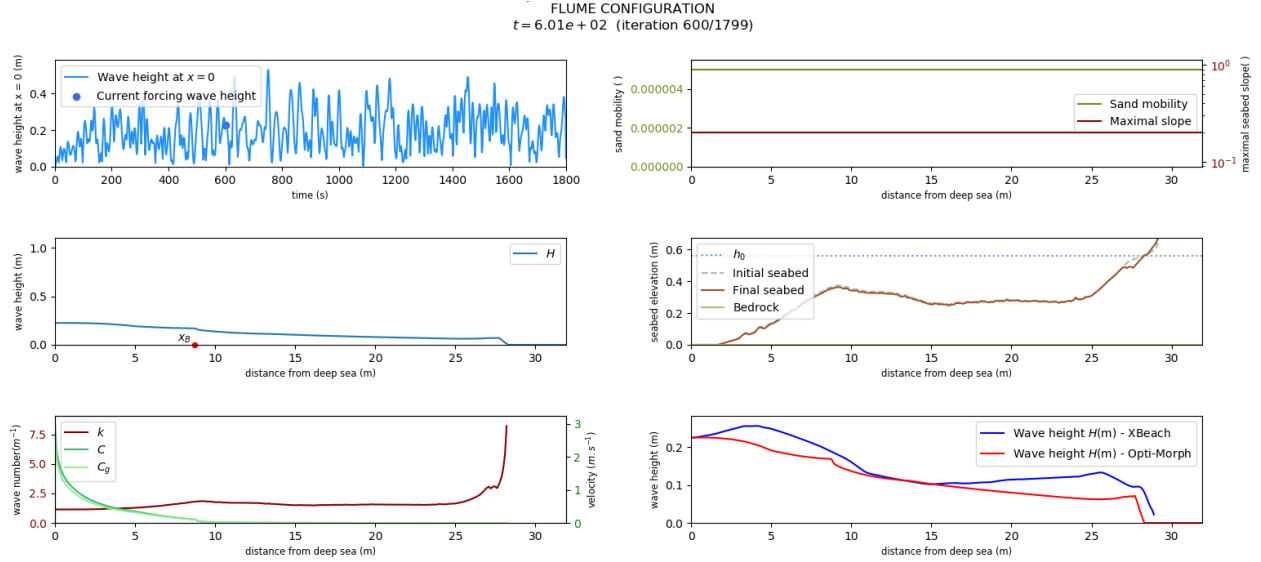
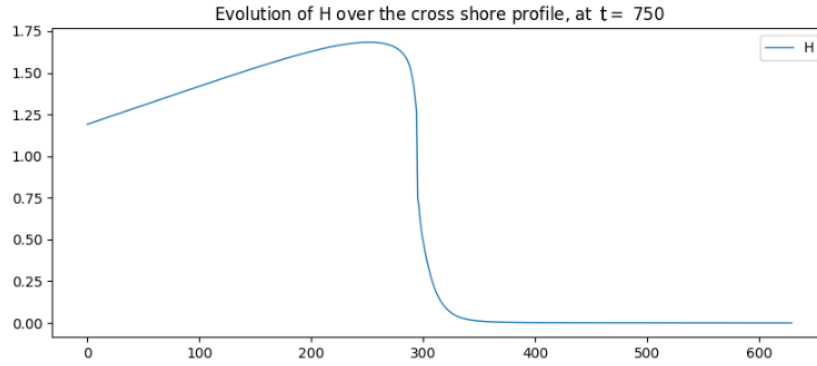


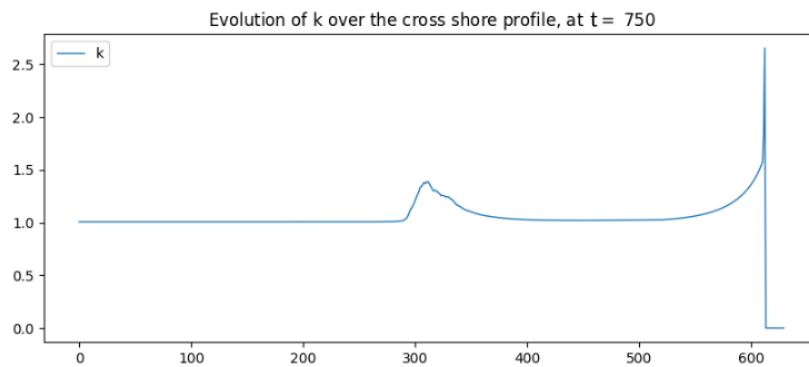
Figure 18: Example of the default figure, mid simulation. *Upper left:* Time series of the forcing wave height H_0 with the current forcing indicated with a circular point. *Middle left:* Wave height calculated over the cross-shore profile using the hydrodynamic model no.7. *Bottom left:* Variation of the wavenumber k (red), phase velocity C (green) and group velocity C_g (light green) over the cross-shore profile. *Upper right:* Variation over the cross-shore profile of the two hyper-parameters required by Opti-Morph: sand mobility parameter Υ (green) and the maximal slope parameter M_{slope} . Here constant, these parameters vary when the seabed features different types of sediment over Ω , or in the presence of man-made structures (such as submerged breakwaters, see Section IV.2). *Middle right:* Seabed elevation over the cross-shore profile. The initial seabed (grey dashed line), the bedrock (grey solid line) and the mean water height (dotted blue line) have also been specified. *Bottom right:* Comparison of wave height with another hydro-morphodynamic model, if available. Here, a comparison with Xbeach's hydrodynamic module is conducted.

These figures are saved in the folder `Figures` under the title `Figure_hyd_mor_beta_gamma_time.png` where β , M_{slope} , γ are the value of the parameters chosen for the simulation and t is the time step.

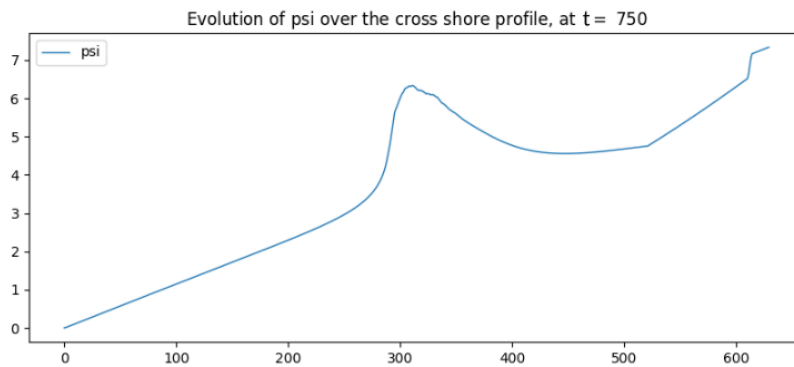
Opti-Morph can also provide simple plots of the quantities involved in the model simulation. Examples of these plots can be found in Figure 19, where the wave height, wavenumber and seabed elevation are given mid-simulation.



(a) Wave height over the cross-shore profile, mid-simulation



(b) Wavenumber over the cross-shore profile, mid-simulation



(c) Seabed elevation over the cross-shore profile, mid-simulation

Figure 19: Examples of simple plots generated by Opti-Morph during the simulation

III.2.4.b. Output folder

At the end of the simulation, text files of the requested data can be found in the Output folder. The user can then use this data to perform a more thorough post-processing analysis of the morphodynamic and hydrodynamic processes that took place during the simulation.

IV Applications

In this section, the seabed is described as a simple linear function over the cross-shore profile. First, we simulate the results over a homogeneous sandy seabed, then we look at introducing submerged structures designed to limit wave activity at the coast.

IV.1 Linear Seabed Beach Configuration

IV.1.1 Setting

The initial cross-shore configuration is given in Figure 20: the domain measures 600 m, the mean water level is set at 7 m and we apply a storm profile to the seabed, given by the top left graph of Figure 20. Here we consider a homogeneous sandy seabed, and therefore the mobility of the seabed Υ and the maximal slope parameter M_{slope} are assumed constant over the cross-shore profile Ω .

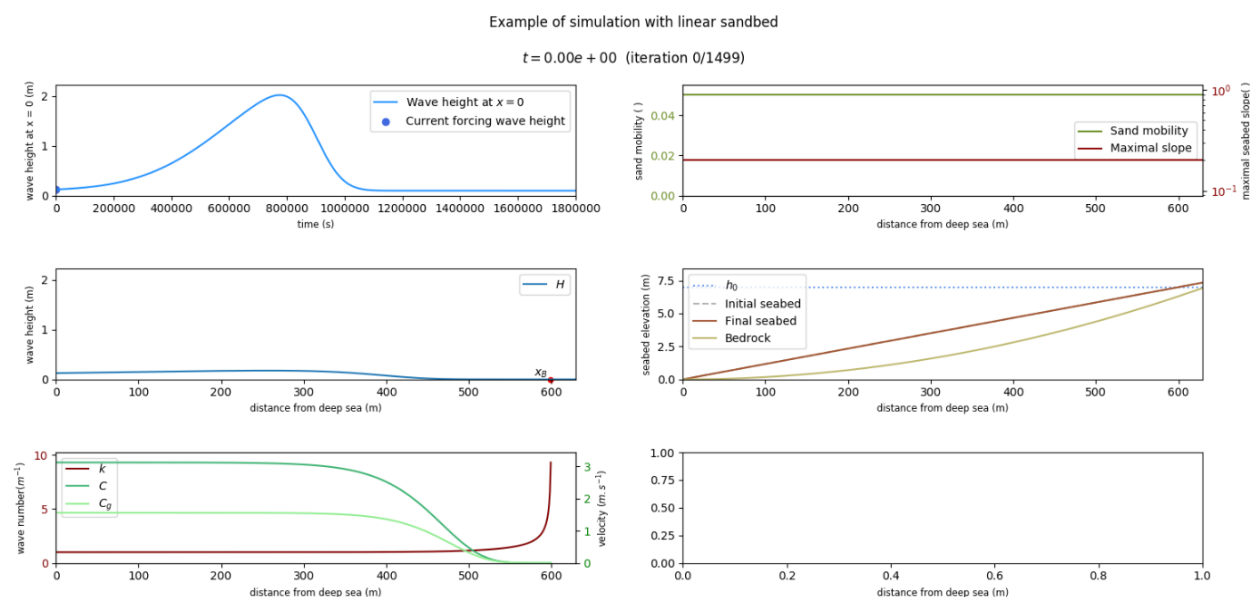


Figure 20: Initial sandy beach configuration

IV.1.2 Input files

The input files have been constructed accordingly, with Figure 21 providing an overview of the different files.

0.0000e+00	0.0000e+00	0.0000e+00	5.0000e-02	2.0000e-01
1.0000e+00	1.1667e-02	1.7516e-05	5.0000e-02	2.0000e-01
2.0000e+00	2.3333e-02	7.0064e-05	5.0000e-02	2.0000e-01
3.0000e+00	3.5000e-02	1.5764e-04	5.0000e-02	2.0000e-01
4.0000e+00	4.6667e-02	2.8025e-04	5.0000e-02	2.0000e-01
5.0000e+00	5.8333e-02	4.3790e-04	5.0000e-02	2.0000e-01
6.0000e+00	7.0000e-02	6.3057e-04	5.0000e-02	2.0000e-01
7.0000e+00	8.1667e-02	8.5828e-04	5.0000e-02	2.0000e-01
8.0000e+00	9.3333e-02	1.1210e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
9.0000e+00	1.0500e-01	1.4189e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.0000e+01	1.1667e-01	1.7516e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.1000e+01	1.2833e-01	2.1194e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.2000e+01	1.4000e-01	2.5223e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.3000e+01	1.5167e-01	2.9602e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.4000e+01	1.6333e-01	3.4331e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.5000e+01	1.7500e-01	3.9411e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.6000e+01	1.8667e-01	4.4841e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.7000e+01	1.9833e-01	5.0621e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.8000e+01	2.1000e-01	5.6751e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
1.9000e+01	2.2167e-01	6.3232e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
2.0000e+01	2.3333e-01	7.0064e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
2.1000e+01	2.4500e-01	7.7245e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
2.2000e+01	2.5667e-01	8.4777e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
2.3000e+01	2.6833e-01	9.2659e-03	5.0000e-02	2.0000e-01
2.4000e+01	2.8000e-01	1.0089e-02	5.0000e-02	2.0000e-01
2.5000e+01	2.9167e-01	1.0947e-02	5.0000e-02	2.0000e-01
2.6000e+01	3.0333e-01	1.1841e-02	5.0000e-02	2.0000e-01
2.7000e+01	3.1500e-01	1.2769e-02	5.0000e-02	2.0000e-01
2.8000e+01	3.2667e-01	1.3732e-02	5.0000e-02	2.0000e-01
2.9000e+01	3.3833e-01	1.4731e-02	5.0000e-02	2.0000e-01

domain discretization initial seabed bedrock mobility parameter maximal slope parameter

(a) init.txt file

0.0000e+00	1.2440e-01
1.2000e+03	1.2469e-01
2.4016e+03	1.2499e-01
3.6024e+03	1.2529e-01
4.8032e+03	1.2560e-01
6.0040e+03	1.2590e-01
7.2048e+03	1.2621e-01
8.4056e+03	1.2653e-01
9.6064e+03	1.2684e-01
1.0807e+04	1.2717e-01
1.2008e+04	1.2749e-01
1.3209e+04	1.2782e-01
1.4410e+04	1.2815e-01
1.5610e+04	1.2848e-01
1.6811e+04	1.2882e-01
1.8012e+04	1.2916e-01
1.9213e+04	1.2951e-01
2.0414e+04	1.2985e-01
2.1614e+04	1.3021e-01
2.2815e+04	1.3056e-01
2.4016e+04	1.3092e-01
2.5217e+04	1.3129e-01
2.6418e+04	1.3165e-01
2.7618e+04	1.3202e-01
2.8819e+04	1.3240e-01
3.0020e+04	1.3278e-01
3.1221e+04	1.3316e-01
3.2422e+04	1.3355e-01
3.3622e+04	1.3394e-01
3.4823e+04	1.3433e-01

time discretization forcing wave height

(b) time_init.txt file

```
# Domain parameters
7 # still water level [m]

# Hydro parameters
2 # wave period [s]
0.55 # wave breaking index []

# Morpho parameters
0.1 # sandstock constraint precision parameter []

# Constraint flags
1 # 0: OPEN SEA CONFIG. / 1: BASIN CONFIG.

# Smoothing flag
0
```

(c) param.txt file

```
# Output data
50 # number of time incrementations between each figure/output
1 # default figures (1: ACTIVATED ; 0 DEACTIVATED)

# List of functions to save/plot defined over the cross-shore
psi
H
END

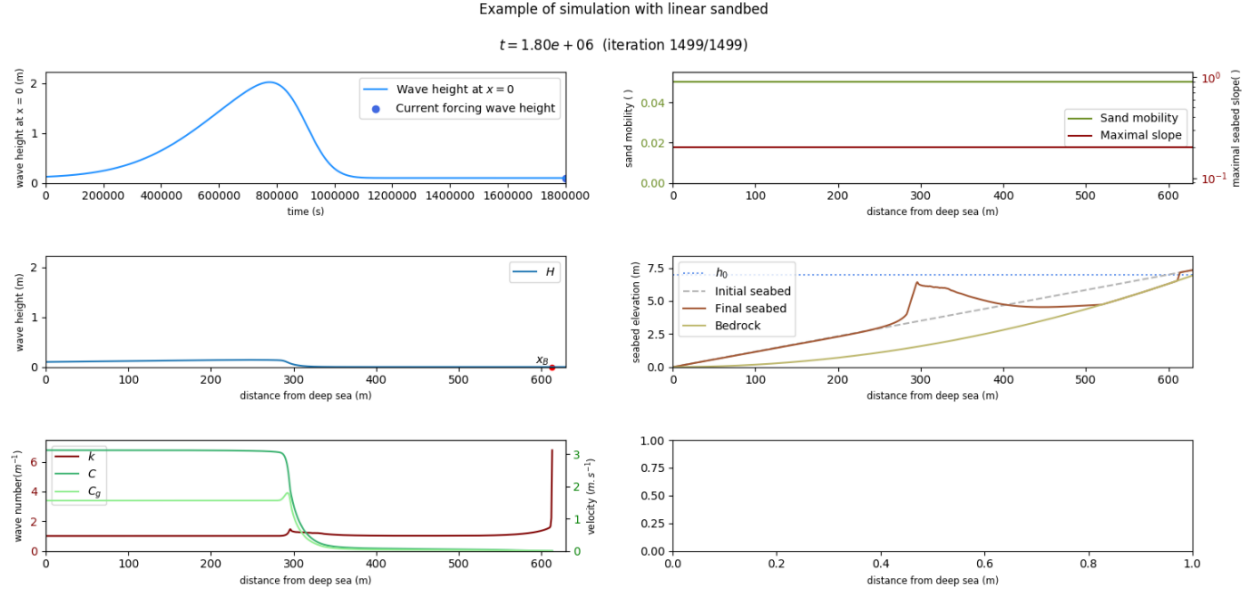
# List of functions to save/plot defined over the time series
sandstock
xB
xS
END
```

(d) data_to_save.txt file

Figure 21: Input files used in the simulation

IV.1.3 Results

At the end of the simulation, we get the following results of Figure 22. Here, the default figure has been requested, as well as xB, xS, and sandstock.



(a) Result of the beach configuration at the end of simulation

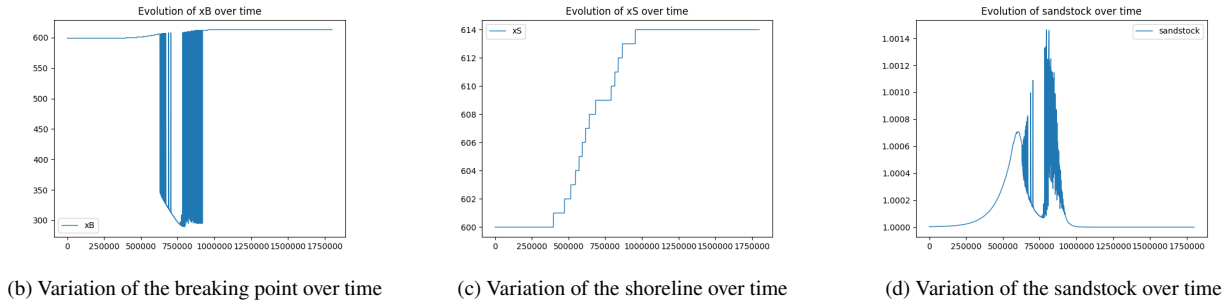


Figure 22: Various plots provided by Opti-Morph

A thorough analysis of the results of Opti-Morph can be found in [Cook et al., 2021b] for an experimental flume configuration and [Cook et al., 2021a] for a linear seabed with submerged breakwaters.

IV.2 Beach Configuration with submerged breakwaters

IV.2.1 Setting

In this simulation, we introduce a solid submerged structure, in the same manner as [Cook et al., 2021a]. To do this, we modify the seabed profile, as well as the sand mobility parameter Υ and the maximal slope parameter M_{slope} , which are no longer constant over the cross-shore profile. In the case of the mobility parameter, no movement can occur at the location of the structures, i.e. $\Upsilon = 0$ where the breakwater is positioned. Similarly, the maximal slope parameter has also been modified to locally deactivate the slope constraint over the structure. Figure 23 shows the new initial configuration incorporating a submerged breakwater located at $x = 180 \text{ m}$.

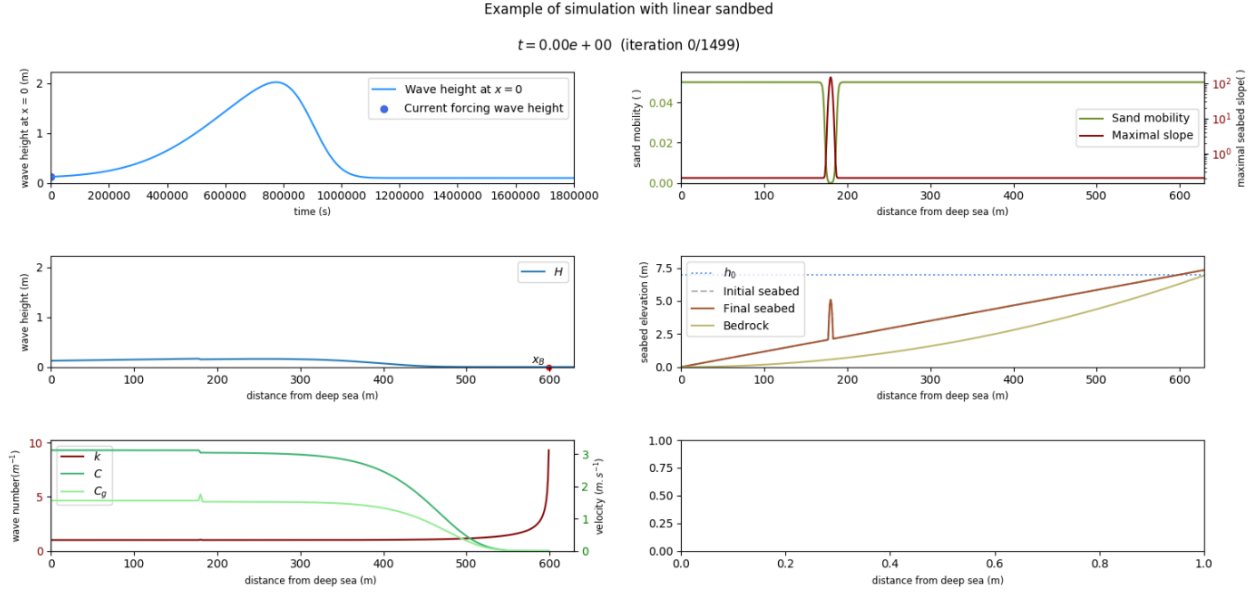


Figure 23: Initial sandy beach configuration with a submerged breakwater located at $x = 180\text{ m}$

IV.2.2 Input files

Similar to before, the input files have been constructed, with Figure 21 providing an overview of the different files. Now, the mobility parameter Υ and the slope parameter M_{slope} vary over the cross-shore profile.

1.5300e+02	1.7750e+00	4.0400e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.5300e+02	1.7850e+00	4.1003e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.5400e+02	1.7967e+00	4.1541e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.5500e+02	1.8083e+00	4.2082e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.5600e+02	1.8200e+00	4.2627e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.5700e+02	1.8317e+00	4.3175e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.5800e+02	1.8433e+00	4.3727e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.5900e+02	1.8550e+00	4.4282e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.6000e+02	1.8667e+00	4.4841e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.6100e+02	1.8783e+00	4.5403e-01	5.0000e-02	2.0000e-01
1.6200e+02	1.8900e+00	4.5969e-01	4.9999e-02	2.0000e-01
1.6300e+02	1.9017e+00	4.6538e-01	4.9998e-02	2.0000e-01
1.6400e+02	1.9133e+00	4.7111e-01	4.9994e-02	2.0000e-01
1.6500e+02	1.9250e+00	4.7687e-01	4.9983e-02	2.0000e-01
1.6600e+02	1.9367e+00	4.8267e-01	4.9954e-02	2.0000e-01
1.6700e+02	1.9483e+00	4.8850e-01	4.9876e-02	2.0000e-01
1.6800e+02	1.9600e+00	4.9437e-01	4.9665e-02	2.0000e-01
1.6900e+02	1.9717e+00	5.0027e-01	4.9101e-02	2.0000e-01
1.7000e+02	1.9833e+00	5.0621e-01	4.7629e-02	2.0000e-01
1.7100e+02	1.9950e+00	5.1218e-01	4.4040e-02	2.0012e-01
1.7200e+02	2.0067e+00	5.1819e-01	3.6553e-02	2.6225e-01
1.7300e+02	2.0183e+00	5.2423e-01	2.9000e-02	2.3026e-01
1.7400e+02	2.0300e+00	5.3031e-01	1.3447e-02	4.8796e-01
1.7500e+02	2.0417e+00	5.3642e-01	5.9601e-03	2.1377e+00
1.7600e+02	2.0533e+00	5.4257e-01	2.3713e-03	9.4197e+00
1.7700e+02	2.0650e+00	5.4875e-01	8.9931e-04	3.1217e+01
1.7800e+02	2.0767e+00	5.5497e-01	0.0000e+00	7.3981e+01
1.7900e+02	2.0883e+00	5.6123e-01	0.0000e+00	1.2429e+02
1.8000e+02	2.1000e+00	5.6751e-01	0.0000e+00	1.4778e+02
1.8100e+02	2.1117e+00	5.7384e-01	0.0000e+00	1.2429e+02

domain discretization initial seabed bedrock mobility parameter maximal slope parameter

(a) init.txt file

0.0000e+00	1.2440e-01
1.2000e+03	1.2469e-01
2.4016e+03	1.2499e-01
3.6024e+03	1.2529e-01
4.8032e+03	1.2560e-01
6.0040e+03	1.2590e-01
7.2048e+03	1.2621e-01
8.4056e+03	1.2653e-01
9.6064e+03	1.2684e-01
1.0807e+04	1.2717e-01
1.2008e+04	1.2749e-01
1.3209e+04	1.2782e-01
1.4410e+04	1.2815e-01
1.5610e+04	1.2848e-01
1.6811e+04	1.2882e-01
1.8012e+04	1.2916e-01
1.9213e+04	1.2951e-01
2.0414e+04	1.2985e-01
2.1614e+04	1.3021e-01
2.2815e+04	1.3056e-01
2.4016e+04	1.3092e-01
2.5217e+04	1.3129e-01
2.6418e+04	1.3165e-01
2.7618e+04	1.3202e-01
2.8819e+04	1.3240e-01
3.0020e+04	1.3278e-01
3.1221e+04	1.3316e-01
3.2422e+04	1.3355e-01
3.3622e+04	1.3394e-01
3.4823e+04	1.3433e-01

time discretization forcing wave height

(b) time_init.txt file

```
# Domain parameters
7 # still water level [m]

# Hydro parameters
2 # wave period [s]
0.55 # wave breaking index []

# Morpho parameters
0.1 # sandstock constraint precision parameter []

# Constraint flags
1 # 0: OPEN SEA CONFIG. / 1: BASIN CONFIG.

# Smoothing flag
0
```

(c) param.txt file

```
# Output data
50 # number of time incrementations between each figure/
output # default figures (1: ACTIVATED ; 0 DEACTIVATED)
1

# List of functions to save/plot defined over the cross-shore
psi
H
END

# List of functions to save/plot defined over the time series
sandstock
xB
xS
END
```

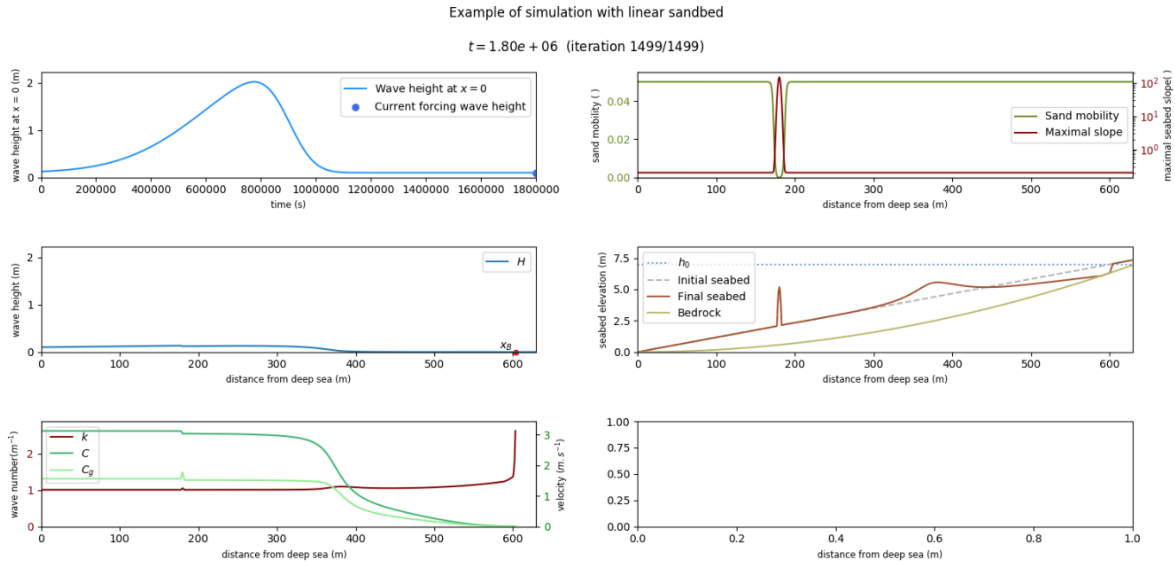
(d) data_to_save.txt file

Figure 24: Input files used in the simulation

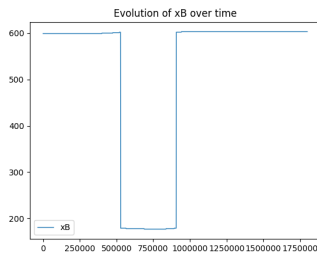
A thorough analysis of the behavior of Opti-Morph in regards to the introduction of geotubes can be found in [Cook et al., 2021a].

IV.2.3 Results

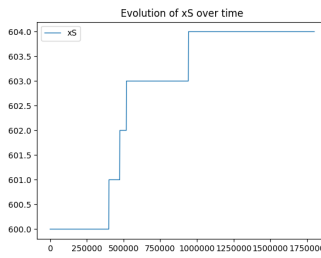
At the end of the simulation, we get the following results of Figure 25. As before, the default figure has been activated (default_out = 1), and the graphs of xB, xS, and sandstock were requested.



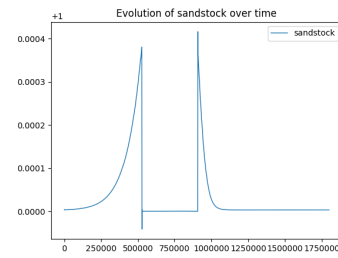
(a) Result of the beach configuration with submerged breakwaters at the end of simulation



(b) Variation of the breaking point over time



(c) Variation of the shoreline over time



(d) Variation of the sandstock over time

Figure 25: Various plots provided by Opti-Morph

A List of parameters

A summary of the notations, variables and parameters used throughout this user guide is provided in the following table.

Name	Keyword	Description	Unit
Ω	Omega	domain of the study of the cross-shore profile	m
Ω_S	Omega_S	subset of Ω over which the waves shoal	m
Ω_B	Omega_B	subset of Ω over which the waves break	m
x_{\max}	x_max	upper-bound of the domain, situated beyond the shore	m
x_S	x_S	shoreline position	m
x_B	x_B	location of (first) breaking of the waves	m
Ψ	Psi	set of parameters describing the seabed	m
ψ	psi	elevation of the seabed	m
ψ_0	psi_0	initial seabed (at $t = 0$)	m
ψ_t	-	evolution of the seabed over time	$m.s^{-1}$
B	bedrock	bedrock	m
T	T	upper-bound of the time series	s
h_0	h_0	mean water level	m
h	h	water depth	m
T_0	T_0	wave period	m
H_0	H_0	wave height at $x = 0$	m
H	H	wave height	m
C	C	phase velocity of the waves	$m.s^{-1}$
C_0	C0	initial phase velocity of the waves	$m.s^{-1}$
C_g	C_g	group velocity of the waves	$m.s^{-1}$
n	n	ratio of phase velocity and group velocity	-
k	k	wave number	m^{-1}
L	-	wavelength	m
σ	sigma	wave pulsation	s^{-1}
K_S	K_S	shoaling coefficient	-
γ	gamma	wave-breaking index	-
α	alpha	breaking type parameter	-
d_{win}	dwin	maximal distance of local spatial dependency of a wave	m
w	-	weighting function	-
H_0^w	-	weighted average of the seaward waves	m
α_w	-	boundary condition transitional parameter	-
a_{AD}	aAD	first parameter in the anti-dissipative term	-
b_{AD}	bAD	second parameter in the anti-dissipative term	-
χ_{AD}	ADT	anti-dissipative term	-
g	g	gravitational acceleration	$m.s^{-2}$
ρ_w	rho_w	water density	$kg.m^{-3}$
\mathcal{J}	J	cost function to be minimized	$J.m^{-1}$
\mathcal{E}	E	Potential wave energy	$J.m^{-1}$
-	E_after	Potential wave energy associated with the updated seabed	$J.m^{-1}$
\mathcal{E}_S	E0B	Potential energy of the shoaling waves	$J.m^{-1}$
\mathcal{E}_B	EBS	Potential energy of the breaking waves	$J.m^{-1}$
Υ	Upsilon	mobility of the sediment	$m.s.kg^{-1}$
φ	-	orbital velocity damping function	-
d	d	direction of descent	J
M_{slope}	M_slope	angle of repose of the sediment	-
C_{sand}	-	difference in sandstock between the initial and current seabed	-
β	beta	sandstock constraint precision parameter	-
\mathcal{J}_{pen}	-	cost function incorporating the sandstock penalty term	$J.m^{-1}$
N_{Ω}	N	number of points in the discretization of the domain	-

N_T	-	number of points in the discretization of the time series	-
$(x_p)_{p \in [0, N_\Omega]}$	\mathbf{x}	discretization of the domain Ω	-
$(t_p)_{p \in [0, N_T]}$	\mathbf{t}	discretization of time interval $[0, T]$ of the simulation	-
-	nbB	position of x_B in the discretization of the domain Ω	-
-	nbS	position of x_S in the discretization of the domain Ω	-
-	sandc	flag activating the sandstock constraint	-
-	smoothf	flag activating a smoothing effect on the seabed	-
-	T_out	number of time steps between output	-
-	default_t_out	flag activating the creation of the default figure output	-
-	CF0	choice of direction of descent	J

References

- [Bouharguane et al., 2010] Bouharguane, A., Azerad, P., Bouchette, F., Marche, F., and Mohammadi, B. (2010). Low complexity shape optimization and a posteriori high fidelity validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-series B - DISCRETE CONTIN DYN SYS-SER B*, 13.
- [Cook et al., 2021a] Cook, M., Bouchette, F., Mohammadi, B., and Fraysse, N. (2021a). Application of Opti-Morph: Optimized beach protection by submerged geotextile tubes. Preprint.
- [Cook et al., 2021b] Cook, M., Bouchette, F., Mohammadi, B., Meul , S., and Fraysse, N. (2021b). Opti-Morph, a new platform for sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization. preprint.
- [Cook et al., 2021c] Cook, M., Bouchette, F., Mohammadi, B., Sprunck, L., and Fraysse, N. (2021c). Optimal port design minimizing standing waves with a posteriori long term shoreline sustainability analysis. preprint.
- [Dean and Dalrymple, 1991] Dean, R. G. and Dalrymple, R. A. (1991). *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*. WORLD SCIENTIFIC.
- [Griewank and Walther, 2008] Griewank, A. and Walther, A. (2008). *Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, second edition.
- [Hasco t and Pascual, 2004] Hasco t, L. and Pascual, V. (2004). TAPENADE 2.1 user’s guide. Technical Report RT-0300, INRIA.
- [Is be et al., 2008a] Is be, D., Azerad, P., Bouchette, F., Ivorra, B., and Mohammadi, B. (2008a). Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(8):1262–1277.
- [Is be et al., 2008b] Is be, D., Azerad, P., Mohammadi, B., and Bouchette, F. (2008b). Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact. *Coastal Engineering*, 55(1):35–46.
- [Mohammadi and Bouchette, 2014] Mohammadi, B. and Bouchette, F. (2014). Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics. *Computers and Fluids*, 89:78–87.
- [Mohammadi and Bouharguane, 2011] Mohammadi, B. and Bouharguane, A. (2011). Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters. *Computers and Fluids*, 40:291–298.
- [Munk, 1949] Munk, W. (1949). The solitary wave theory and its application to surf problems. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 51:376 – 424.
- [Soulsby, 1987] Soulsby, R. (1987). Calculating bottom orbital velocity beneath waves. *Coastal Engineering - COAST ENG*, 11:371–380.

2 Notes scientifiques

2.1 2022: État de l'art de l'optimisation de structures de protection du littoral à la morphodynamique des plages par calcul optimal

État de l'art de l'optimisation de structures de protection du littoral à la morphodynamique des plages par calcul optimal

Table des matières

1	Introduction	2
2	Optimisation sur des structures de protection du littoral	3
2.1	Forme optimale de structures	3
2.2	Port de la Turballe	4
3	Optimisation d'emplacements de structures protection du littoral	5
3.1	Position de structure de protection optimale à la pointe de l'Espiguette	6
3.2	Position optimale de géotube	7
4	Vers un modèle de morphodynamique par optimisation	7
4.1	Modèles hydro-morphodynamiques 2D basés sur les équations de Saint-Venant	7
4.2	Modèles hydro-morphodynamiques 1D basés sur la minimisation d'énergie	8
4.2.1	Modèle hydrodynamique	8
4.2.2	Modèle Morphodynamique basé sur l'Optimisation de l'Énergie des Vagues	8
4.2.3	Applications avec Optimorph	10
5	Perspectives de la modélisation hydro-morphodynamique par calcul optimal	12
	Références	14



1 Introduction

La morphodynamique des plages caractérise l'évolution de la morphologie d'une plage, à savoir l'évolution sa bathymétrie. Il existe de nombreuses méthodes pour calculer la morphodynamique allant des modèles empiriques aux modèles basés sur le processus. Ces derniers peuvent être classés en plusieurs catégories, telles que i) les modèles d'évolution du profil, qui utilisent uniquement le transport transversal, ii) les modèles morphologiques 2D, qui utilisent des équations de vagues et de courants moyennées en profondeur pour modéliser le transport des sédiments tout en négligeant les variations verticales des paramètres dérivés des vagues, ainsi que iii) les modèles 3D et quasi-3D, qui déterminent l'évolution des sédiments en utilisant les variations horizontales et verticales des paramètres dérivés des vagues. Le modèle Opti-Morph est basé sur le contrôle optimal. Cette méthode d'optimisation est née après de nombreux travaux sur le littoral. Les premières idées de F. BOUCHETTE, B. MOHAMMADI & AL étaient de travailler directement sur l'optimisation de structures de protection du littoral comme dans [6]. Ensuite, des travaux se sont concentrés sur la position optimale de structures de protection du littoral comme les Géotubes [3, 7].

C'est enfin en 2011 que ces applications d'optimisation sur le littoral ont pris une dimension différente. La question qui s'est posée est : « *Et si on ne cherchait pas cette fois-ci la forme ou l'emplacement optimale d'une structure mais on cherchait la forme de la plage optimale* » et c'est à partir de là que le concept de morphodynamique des plages par calcul optimal est née. Cette question n'étant pas si simple demandait à répondre à quelques autres questions. En effet, il est intéressant d'optimiser la forme d'une plage mais il est nécessaire de l'optimiser selon un critère bien particulier que l'on appellera fonction de coût \mathcal{J} . Il a donc été important de déterminer des hypothèses afin de pouvoir optimiser celle-ci. La dernière hypothèse a été de dire que « *La nature cherche à minimiser l'énergie qu'elle dépense* » et donc cela reviendrait à dire que la plage cherche à évoluer de telle sorte que l'énergie des vagues soit la minimale. C'est sur cette citation que les développements des COOK. M & AL ont été effectués pour donner naissance à Optimorph [2]. Des premiers travaux de validation ont été effectués notamment en confrontant ce modèle à d'autres modèles très classiques comme XBeach [4]. La suite de ces travaux de développement et validation ont été laissés à DUPONT. R & AL



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



2 Optimisation sur des structures de protection du littoral

La première partie de cet état de l'art va montrer les travaux qui ont précédés l'évolution de la morphodynamique des plages. Dans un premier temps, ces travaux concernaient principalement les structures de protection du littoral.

2.1 Forme optimale de structures

Les premiers travaux d'optimisation de forme de structures de défense du littoral [6] se sont concentrés dans un premier temps sur des structures permettant de casser l'agitation des vagues sur un domaine particulier. Les vagues sur le domaine sont modélisés par des équations d'ondes de Helmholtz qui est un modèle dérivé du modèle bien connu de Berkhoff [1]. Ce modèle est très adapté en eau profonde lorsqu'il y a une propagation à fond constant.

Ensuite, il était nécessaire d'évaluer la fonction de coût J à minimiser afin d'obtenir la forme optimale. Dans ce cas, celle-ci sera calculée de telle sorte que la hauteur d'eau ξ soit la minimum sur l'ensemble du domaine. Avec ce critère, la forme optimale obtenue ressemblait à la figure 1 suivante :

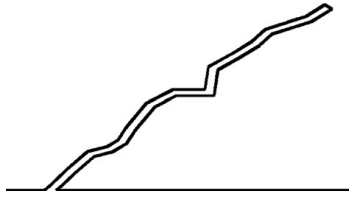


FIGURE 1 – Forme optimale minimisant une fonction de coût J pour un paramétrage donné

Afin d'être sûr de la viabilité de cette structure, il convient de représenter la hauteur d'eau ξ dans les 3 configurations de la 2 suivante :

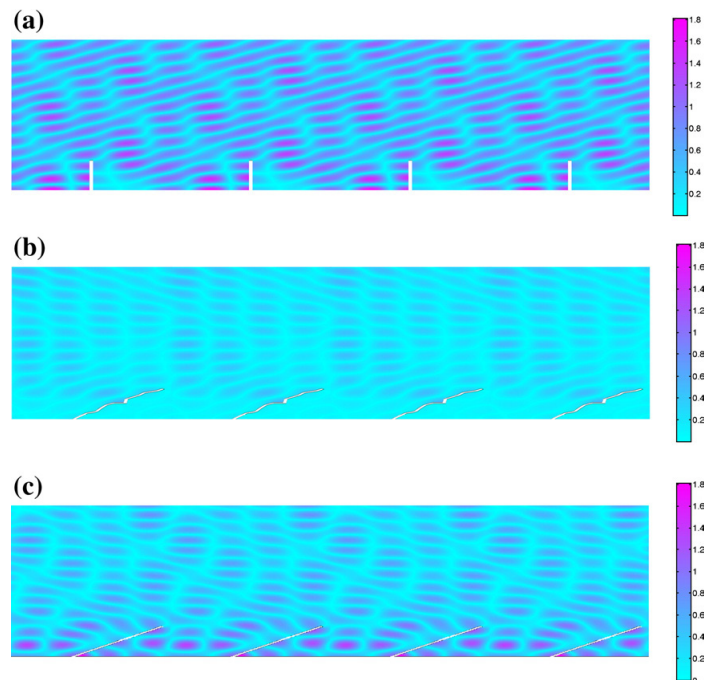


FIGURE 2 – Valeur absolue de ξ résultant de la réflexion (a) sur des structures rectangulaires perpendiculaires à la paroi, (b) sur des structures optimisées sans contrainte de faisabilité, (c) sur des structures ayant le même angle que les structures optimisées mais droites (ondes entrantes NW avec $T=2$ s et $a=0.5$ m).

Ici, on remarque bien l'effet de la structure optimale sur le domaine car la hauteur d'eau moyenne sur la configuration optimale semble nettement inférieure aux autres configurations. Il est surprenant de voir que dans le cas (c), les résultats semblent très éloignés des résultats (b) sans qu'il n'y ait eu beaucoup de changements. Avec les connaissances de la littérature actuelle, il convenait de rejeter la forme de la structure figure 1. Les travaux d'optimisation de forme se sont ensuite dirigés principalement vers des positions optimales de systèmes de protection du littoral.

2.2 Port de la Turballe

Un des grands projets d'aménagements portuaires de ces futures années est l'aménagement du port de la Turballe. Pour le dimensionnement de cet ouvrage, BRLi, bureau d'études spécialisé dans les domaines liés à l'eau, a fait appel à COOK.M & AL [5] afin de confirmer leur idée sur la meilleure configuration d'aménagement du port.

Afin d'accueillir plus de plaisanciers et réduire l'agitation à l'intérieur du port, il a été proposé la configuration figure 3 suivante :

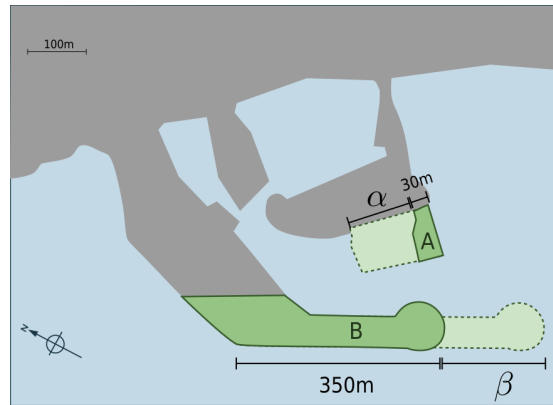


FIGURE 3 – Configurations possibles pour le port de la Turballe.

Dans cette figure, il y a deux paramétrages à gérer, à savoir les longueurs des structures A et B .

Pour gérer au mieux cette optimisation, il est nécessaire de modéliser dans l'hydrodynamique du port. Pour ce faire, il sera utilisé une nouvelle fois le modèle d'Helmholtz pour les mêmes raisons que l'utilisation dans la partie 2.1. Ensuite, il sera nécessaire de créer une fonction de coût minimisant l'agitation dans le port. Celle-ci sera élaborée de la manière suivante dans l'équation (1).

$$\mathcal{J}_n(\psi) = \frac{1}{K(\mathcal{P})} \frac{1}{|\Omega(\psi)|} \int_{\Omega(\psi)} \mathcal{E}_n(\psi, \mathbf{x}) \mathcal{P}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

La quantité $\mathcal{E}_n(\psi, \mathbf{x})$ est l'énergie de surface totale dénommée sur le domaine, associée au scénario de forçage n et à la configuration du port. La fonction $\mathcal{P}(\mathbf{x})$ est nommée fonction de poids spatial, nous permet de prioriser la minimisation de l'agitation sur certaines zones privilégiées du port comme on peut voir sur la figure ci-dessous 4 :

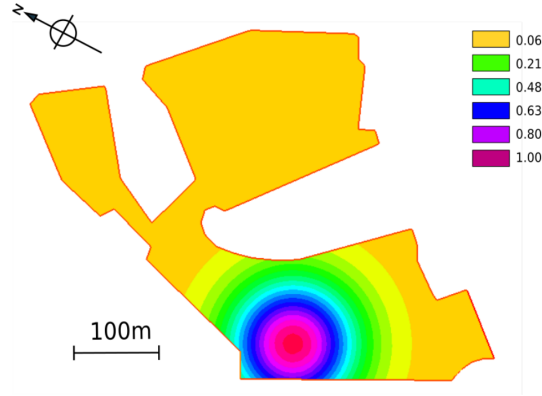


FIGURE 4 – Fonction de poids \mathcal{P} sur Ω .

Les fonction K et $|\Omega(\psi)|$ sont égaux à $K(\mathcal{P}, \Omega(\psi)) = \int_{\Omega(\psi)} \mathcal{P}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ et à la surface totale du domaine : ceci permet d'adimensionner la fonctionnelle.

La fonctionnelle cumulant les n scénarios est ensuite calculée dans l'équation (2) suivante :

$$\mathcal{J}(\psi) = \frac{\sum_{n=1}^N a_i(n) \mathcal{J}_n(\psi)}{\sum_{n=1}^N a_i(n)} \quad (2)$$

avec les $a_i(n)$ correspondant aux points une le scénario n donné.

Une fois cette paramétrisation effectuée, il ne reste plus effectuer une grille de $(\alpha, \beta) \in [0, 150] \times [0, 200]$ et calculer toutes les valeurs de la fonctionnelle pour toutes ces configurations données. De ce fait, la configuration optimale sera la configuration où le couple (α, β) donnera la fonctionnelle \mathcal{J} la plus faible. Cette solution sur la figure 5

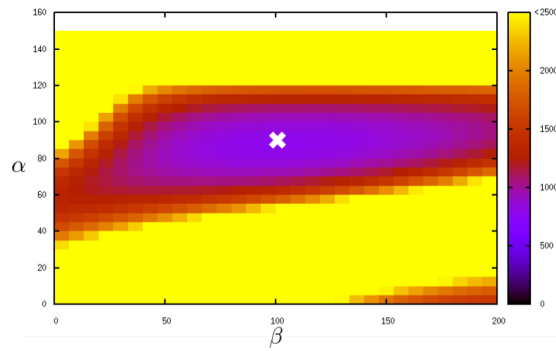


FIGURE 5 – Couple optimal de (α, β) pour la configuration du port de la Turballe.

nous montre qu'il existe un unique couple solution. Cette solution est la solution qui a été choisie par le BRLi pour dimensionner le port de la Turballe.

3 Optimisation d'emplacements de structures protection du littoral

Une nouvelle approche en terme d'optimisation de structures de protection du littoral est cette fois-ci non pas la forme mais la position optimale. On cherchera donc à limiter des facteurs comme l'agitation de la houle, l'érosion des plages etc.

3.1 Position de structure de protection optimale à la pointe de l'Espiguette

Les premiers travaux de ISÈBE & AL. [7, 8] ont permis de trouver la position optimale d'une structure de défense du littoral permettant de limiter l'érosion de la plage de Le Grau du Roi-Le Boucanet. En utilisant un modèle numérique analogue à celui de la partie 2.1, basé sur les la résolution des équations d'Helmholtz, on cherche la configuration optimale de telle sorte que la fonction de coût J limite l'érosion de la plage sur un domaine D .

Avant de définir la fonction de coût, il est nécessaire de rappeler que les observations de l'érosion par les océanographes montrent que vagues peuvent être grossièrement classées en deux catégories en fonction de leur hauteur H , inférieure ou supérieure à une valeur critique H_{lim} . En principe, celles qui sont supérieures à H_{lim} , principalement présentes lors des tempêtes, sont érosives. Elles génèrent une grande énergie mécanique. En revanche, lorsque $H < H_{lim}$, les vagues favorisent la reconstruction des plages érodées. La première classe de vagues ($H > H_{lim}$) sera appelée érosive et la deuxième classe constructive ($H < H_{lim}$).

La fonction de coût J_θ est définie selon la direction de la vague θ en tenant considération de cette hauteur limite de la manière suivante :

$$J_\theta = \frac{\int_D E_{H>H_{lim}} dS}{\int_D E_{H<H_{lim}} dS} + \left(\|U_{orb}\| - \|U_{orb}^{initial}\| \right)_+ + \left(\int_D E_{H<H_{lim}} dS - \int_D E_{H<H_{lim}^{initial}} dS \right)_+ \quad (3)$$

avec $(x)_+ = \max(x, 0)$, E l'énergie de la houle, H la hauteur d'eau, H_{lim} la hauteur d'eau limite, U_{orb} la vitesse orbitale. Cette fonctionnelle a donc été définie de telle sorte qu'elle donne une indication significative sur le niveau d'érosion de la plage.

Afin d'avoir une estimation réaliste, on calcul J comme la somme des fonctions de coûts en tenant compte dans p_θ de la probabilité qu'une vague de direction θ arrive.

$$J = \sum p_\theta J_\theta \quad (4)$$

Une fois cette fonction de coût évaluée, il ne reste plus qu'à effectuer un grand nombre de simulations sur les différentes positions possibles de la structure et prendre la position correspondant au J minimum. Les résultats de la configuration optimale sont représentés sur les Figures 6 et 7 suivante :

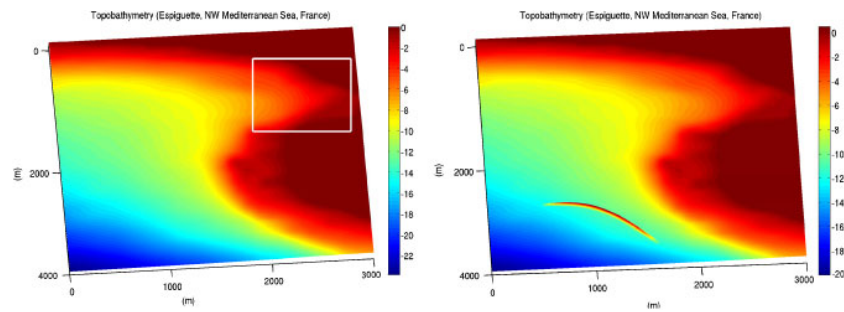


FIGURE 6 – A gauche : la bathymétrie initiale de la région D pour le calcul de la fonction de coût ; à droite : la bathymétrie modifiée avec la structure de protection optimisée.

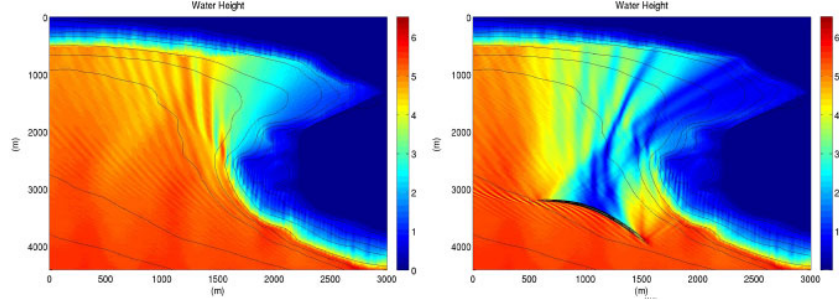


FIGURE 7 – La hauteur d'eau H dans l'ensemble du domaine : (gauche) pour la configuration initiale, (droite) pour la configuration optimisée.

Les résultats ci-dessous montrent bien que le système de protection semble bien atténuer la houle. Il s'avère qu'une grande zone derrière la structure se retrouve avec une hauteur d'eau H très faible.

3.2 Position optimale de géotube

Les travaux de [7] pouvaient s'appliquer à toute sorte de structures de protection du littoral mais étaient principalement concentrés sur les géotubes. Ces travaux ont pu alimenter et inspirer ceux de COOK.M & AL dans ses cas-test d'optimisation [3] avec la nouvelle approche de modélisation morphodynamique. Les détails de ces seront présentés plus précisément dans la partie 4.2.

4 Vers un modèle de morphodynamique par optimisation

Après avoir effectué de nombreux travaux dans l'optimisation de formes et d'emplacements de structures de protection du littoral optimales, les travaux de BOUCHETTE. F ET MOHAMMADI. B ont pris une toute autre dimension. Ces nouveaux travaux se sont concentrés sur l'optimisation de la forme du fond-marin soit la bathymétrie. C'est à partir de là que les modèles d'hydro-morphodynamiques du littoral par principe de minimisation sont nait.

4.1 Modèles hydro-morphodynamiques 2D basés sur les équations de Saint-Venant

Les tout premiers travaux sur cette nouvelle manière de modéliser la morphodynamique ont été effectués avec une modèle hydrodynamique très classique dans la modélisation hydrodynamique, à savoir le modèle Saint-Venant en 2D [9, 10].

Ces deux publications se concentraient principalement sur les développements théoriques de la méthode de modélisation morphodynamique par transport optimal.

L'avantage des travaux est qu'ils permettent de résoudre directement des modèles 2D. Cependant, il s'avère que les méthodes numériques utilisées pour ce modèles sont très lourdes. La méthode de résolution des équations de Saint-Venant est la méthode des Volumes finis et la méthode level-set est aussi utilisé pour situer la structure figure 8. Pour différencier, il faut utiliser une différenciation automatique car les modèles hydrodynamiques sont bien trop lourd pour être fait de manière analytique.

Une fois ces formalismes établis, des fonctionnelles ont été essayés pour rendre compte d'une physique réaliste. Sur la fonctionnelle ci-dessous dans l'équation (5), elle minimise l'agitation et les déplacements sableux.

$$J(\psi) = \int_{t-T}^t \int_{\Omega} (\|\nabla_{xy} \mathbf{u}\| + \rho_s g(\psi(\tau) - \psi(t-T))^2) d\tau d\Omega \quad (5)$$

avec u la vitesse, ψ la bathymétrie. Les résultats morphodynamiques obtenues avec cette fonctionnelle sur simulation autour d'un cylindre avec une bathymétrie linéaire sont obtenus figure 8

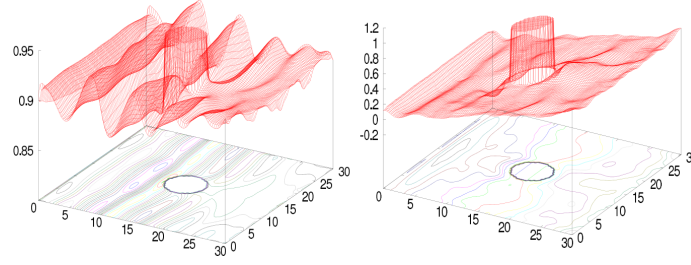


FIGURE 8 – Agitation à gauche et bathymétrie changée à droite (bathy linéaire)

La morphodynamique semble avec réagit de manière très réaliste compte-tenu de la simulation.

La conclusion de ces articles étaient qu'utiliser ce genre de méthodes pour des problèmes morphodynamiques revenait à effectuer une démarche locale analogue à d'autres modèles de type Exner. Il a donc été nécessaire d'aller vers un modèle plus simple avec critère physique plus robustes. Il convient de présenter le modèle

4.2 Modèles hydro-morphodynamiques 1D basés sur la minimisation d'énergie

Le nouveau modèle élaboré par COOK. M & AL [2] est basé sur le principe que la nature cherche à minimiser l'énergie qu'elle dépense. Cette fois-ci, la fonction de coût \mathcal{J} qui régit l'évolution du fond marin a été élaborée selon l'énergie \mathcal{E}_H des vagues.

4.2.1 Modèle hydrodynamique

L'évolution en temps du profil bathymétrique est basé sur l'hypothèse que le fond évolue afin de minimiser une certaine quantité hydrodynamique. Ainsi, un modèle hydrodynamique fournissant une description de l'état des vagues de surface est indispensable. Le modèle présenté ci-dessous détermine la hauteur significative des vagues, noté H le long du profil cross-shore. Soit $\Omega = [0, x_{\max}]$ le domaine du profil cross-shore, où $x = 0$ est un point arbitraire en eaux profondes, et x_{\max} est un point arbitraire au-delà du trait de côte. Le domaine Ω est divisé en deux sous-ensembles disjoints : la zone de shoaling Ω_S et la zone de déferlement Ω_B . La hauteur des vagues H sur Ω_S est basée sur l'équation de shoaling (6), où H_0 est la hauteur des vagues en eau profonde et K_S est un coefficient de shoaling.

$$H(x, t) = H_0(t)K_S(x, t) \quad (6)$$

Pour le déferlement dans la zone de K_B , le modèle se base essentiellement sur le critère de Munk (7).

$$H(x, t) = \gamma h(x, t) \quad (7)$$

Ce modèle est très simple et sa justification réside dans la facilité à différencier analytiquement les termes nécessaires pour la fonctionnelle. Il a tout de même été amélioré par COOK. M & AL [2] en introduisant du multi-déferlement, de la mémoire de vagues, ...

4.2.2 Modèle Morphodynamique basé sur l'Optimisation de l'Énergie des Vagues

Pour le modèle morphodynamique, on suppose que le fond varie au cours du temps afin de minimiser une fonction de coût \mathcal{J} . Nous supposons que cette fonction de coût est définie comme l'énergie potentielle des

vagues en zone de shoaling, définie pour tout $t \in [0, T]$ par l'équation (8) suivante :

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}] \quad (8)$$

où H désigne la hauteur des vagues calculée par le modèle hydrodynamique susmentionné, ρ_w est la densité de l'eau ($kg.m^{-3}$), et g désigne l'accélération gravitationnelle ($m.s^{-2}$). Dans le but de décrire l'évolution du profil bathymétrique ψ , dont l'état initial est donné par ψ_0 , nous supposons que ψ , dans son effort pour minimiser \mathcal{J} , vérifie la dynamique suivante :

$$\begin{cases} \psi(t=0) = \psi_0 \\ \psi_t = -\Upsilon \Lambda d \end{cases} \quad (9)$$

où ψ_t est l'évolution en temps du fond sableux ($m \cdot s^{-1}$), Υ est la mobilité sédimentaire ($m.s.kg^{-1}$), Λ est l'excitation du fond sableux par les vagues, et d est la direction de descente indiquant la manière dont le fond sableux varie. Dans des configurations sans contrainte, on a $d = -\nabla_{\psi} \mathcal{J}$, qui par sa définition, indique la direction d'un minimum local de \mathcal{J} par rapport à ψ comme illustré ci-dessous figure ??.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Néanmoins, des contraintes sont ajoutées au modèle pour incorporer plus de physique et fournir des résultats plus réalistes. Les forces motrices de l'évolution morphologique du profil bathymétrique sont décrites par la minimisation de la fonction de coût \mathcal{J} alors que les processus secondaires sont exprimés par des contraintes. Deux contraintes physiques ont été adoptées par la suite : (i) une contrainte de pente sableuse, qui empêche le sable de présenter des pentes irréalistes et (ii) la contrainte de stock sableux, obligeant la quantité de sable dans un bassin expérimental à rester constante au cours du temps. Cette dernière est nécessaire pour vérifier et valider le modèle numérique dans des simulations de canal à houle.

La première contrainte se traduit par :

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{\text{slope}} \quad (10)$$

où le paramètre M_{slope} représente l'angle de talus critique du sable, tandis que la deuxième s'écrit :

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad (11)$$

pour garantir que le stock sableux reste constant au cours du temps.

4.2.3 Applications avec Optimorph

Actuellement, deux principales applications ont été publiées sur ce code 1D Optimorph. La première est un cas-test en bassin à houle qui compare les résultats avec les résultats de codes de calculs comme XBeach. La seconde effectue des simulations afin de trouver la position optimale d'un géotube.

Cas-test en canal à houle : Copter Ce premier cas-test [4] compare deux simulations en canal de XBeach et Optimorph avec des données expérimentales de la configuration suivante figure 9.

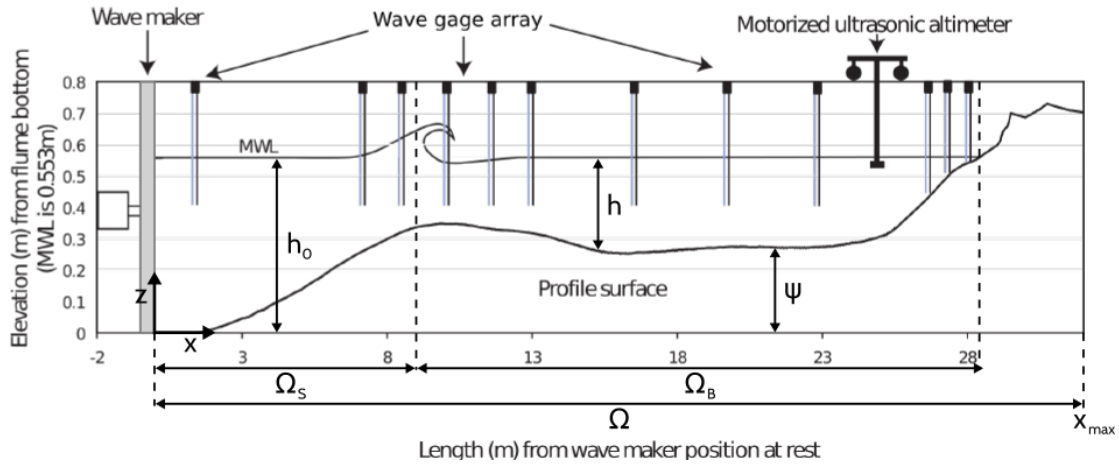


FIGURE 9 – Diagramme d'un profil cross-shore dans le cas d'un canal expérimental.

C'est une configuration très classique avec un batteur à houle qui reproduit une tempête de paramètres, la période de houle $T = 2.5 \text{ s}$ et la hauteur de vague significative $H = 135 \text{ mm}$ sur un temps total de 30 minutes. L'échelle de temps et de longueur de cette simulation sont respectivement de 1/3 et 1/10.

Les résultats comparant les simulation et les données expérimentales sont exposés ci-dessous figure 10.

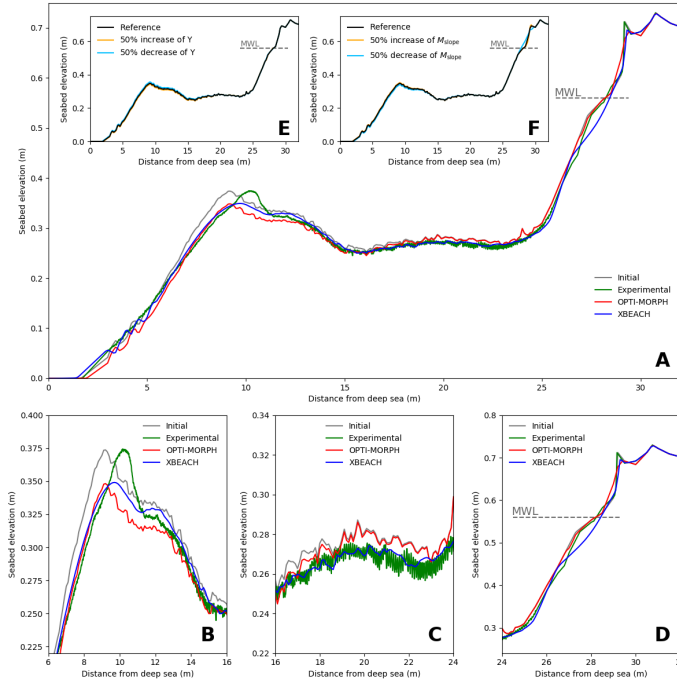


FIGURE 10 – **A.** Résultats de la simulation numérique calculée sur le fond marin initial (gris) en utilisant le module morphodynamique XBeach (bleu) et le modèle Opti-Morph (rouge). Ils sont comparés aux données expérimentales acquises lors du projet COPTER (vert). Le niveau moyen de l'eau est noté MWL et est fixé à 0.56m. **B.** Vue zoomée du banc de sable, situé à l'intérieur de la plage. en vue du banc de sable, situé entre 6m et 16m. **C.** Vue zoomée du plateau, situé entre 16m et 24m. **D.** Vue zoomée sur le littoral, situé entre 24m et 32m. **E.** Analyse de robustesse du paramètre de mobilité. Le profil de référence de référence est représenté en noir. Le profil orange (resp. bleu clair) est le résultat d'une augmentation (resp. diminution) de 50% du paramètre de mobilité, tous les autres paramètres restant inchangés. **F.** Analyse de robustesse du paramètre de pente maximale du sable M_{slope} . Le profil de référence est représenté en noir. Le profil orange (resp. bleu clair) est le résultat d'une augmentation (resp. diminution) de 50% de M_{slope} , avec tous les autres paramètres restant les mêmes.

Les résultats de ces simulations se sont révélés très bons comparé aux autres modèles numériques. Le principal défaut était en amont de la simulation : c'est de là que l'idée de rendre compte d'une meilleure physique en essayant d'ajouter un courant est née. Un second défaut était en près du MWN comme on peut voir sur la figure **D**.

Bien que cette simulation ne soit pas parfaitement corrélée avec les données expérimentales, le modèle s'est avéré très robuste et beaucoup plus rapide que les modèles classiques.

Des simulations longs-termes ont été effectuées sur des durées de 2 à 6 jours et les résultats ont montrés que pour une journée de forçage, il était nécessaire d'effectuer 90 minutes de simulation sur un ordinateur classique. C'est 2 à 3 fois moins que les modèles à résolution classique de type XBeach.

Position optimale de géotube La seconde application [3] compare plusieurs configurations de géotubes sur une plage linéaire afin de trouver la configuration idéale qui limitera les déplacements sableux. La simulation vise à recréer les conditions réelles d'une tempête de 20 jours avec une hauteur de vague significative de vague de $H = 2\text{ m}$ et de période courte $T_0 = 2\text{ s}$. La configuration de la simulation est la suivante figure 11 :

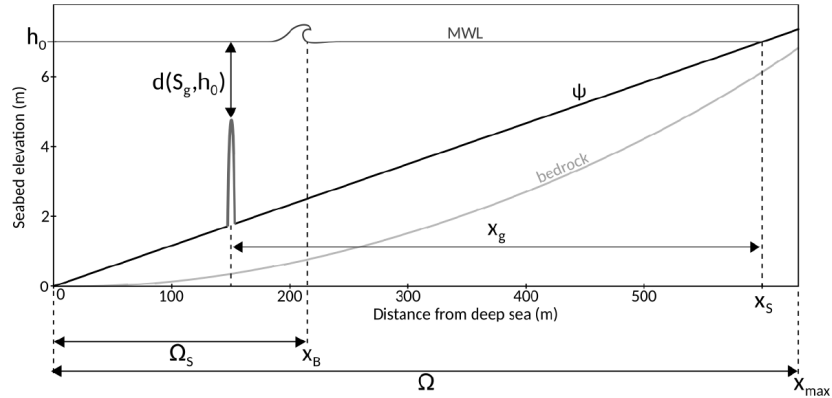


FIGURE 11 – Configuration de la simulation des géotubes.

Plusieurs types de fonctions coût \mathcal{J} sont ensuite évaluées pour limiter au mieux certains paramètres comme l'érosion de la plage. Par exemple, les résultats présents figure 12 ci-dessous :

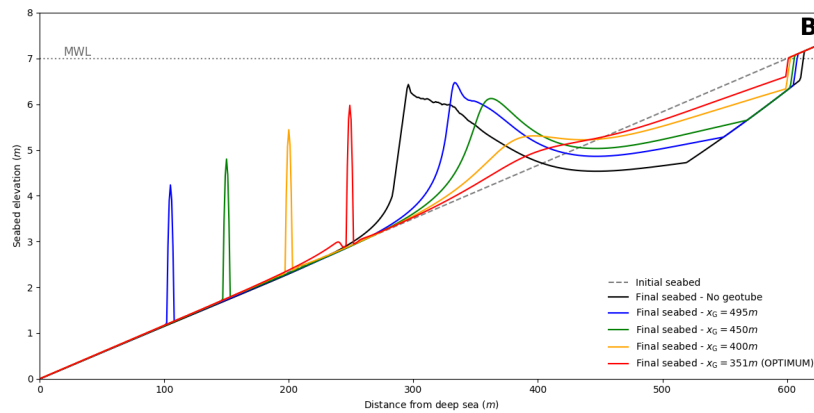


FIGURE 12 – Profils finaux du fond marin produits par le modèle morphodynamique Opti-Morph avec des positions variables de géotubes sur le profil cross-shore.

nous montrent que la position optimale d'un géotube est à 351 m de la côté afin de limiter l'érosion de la plage. D'autres choix stratégiques de fonctions coût \mathcal{J} ont été fait dans l'article [3]. L'avantage de ce code est qu'il laisse la liberté à l'utilisateur de paramétrer ses propres fonctions de coût \mathcal{J} , ce qui lui permet d'obtenir des configurations optimales selon ses critères qui peuvent être : pratiques, économiques,...

5 Perspectives de la modélisation hydro-morphodynamique par calcul optimal

Les travaux de COOK. M & AL se sont terminés en décembre 2021 à la soutenance de thèse. Ils ont laissés place à DUPONT .R & AL qui a repris les développements théoriques et numériques du modèle hydro-morphodynamique. Aucun de ces travaux n'a encore été publiés mais plusieurs axes ont pu être avancés notamment.

- La justification théorique du choix de la fonctionnelle \mathcal{J} à l'aide de certains exemples dans les travaux de NEWTON
- La justification numérique du choix de la meilleur fonctionnelle
- La convergence en pas de temps du modèle

- L'élargissement du panel de simulations pour un grand nombre de paramétrages en périodes de vagues, types de bathymétries, forçages,...



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Références

- ¹J. BERKHOFF, « Computation of Combined Refraction — Diffraction », en, COASTAL ENGINEERING, 20 (cf. p. 3).
- ²M. COOK, F. BOUCHETTE, B. MOHAMMADI et N. FRAYSSE, « Opti-Morph User Guide », en, 50 (cf. p. 2, 8).
- ³M. COOK, F. BOUCHETTE, B. MOHAMMADI et N. FRAYSSE, « Application of Opti-Morph : Optimized beach protection by submerged geotextile tubes », en, 26 (cf. p. 2, 7, 11, 12).
- ⁴M. COOK, F. BOUCHETTE, B. MOHAMMADI, S. MEULÉ et N. FRAYSSE, « Opti-Morph, a new platform for sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization », en, 18 (cf. p. 2, 10).
- ⁵M. COOK, F. BOUCHETTE, B. MOHAMMADI, L. SPRUNCK et N. FRAYSSE, « Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis », en, China Ocean Engineering **35**, 802-813 (2021) (cf. p. 4).
- ⁶D. ISEBE, P. AZERAD, B. MOHAMMADI et F. BOUCHETTE, « Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact », en, Coastal Engineering **55**, 35-46 (2008) (cf. p. 2, 3).
- ⁷D. ISEBE, P. AZERAD, F. BOUCHETTE, B. IVORRA et B. MOHAMMADI, « Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection », en, International Journal for Numerical Methods in Engineering **74**, 1262-1277 (2008) (cf. p. 2, 6, 7).
- ⁸D. ISÈBE, P. AZÉRAD, F. BOUCHETTE et B. MOHAMMADI, « Design of Passive Defense Structures in Coastal Engineering », en, International Review of Civil Engineering (IRECE) **5**, 75 (2014) (cf. p. 6).
- ⁹B. MOHAMMADI et F. BOUCHETTE, « Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the Value at Risk of the bed characteristics », en, Computers & Fluids **89**, 78-87 (2014) (cf. p. 7).
- ¹⁰B. MOHAMMADI et A. BOUHARGUANE, « Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters », en, Computers & Fluids **40**, 291-298 (2011) (cf. p. 7).



2.2 2022: Théorie de Hadamard



Quelques notes

Gradient de forme au sens de Hadamard

Nous allons utiliser l'approche décrite dans [? ?]...

Nous considérons $\nabla_{\psi} H$ au sens de Hadamard suivant la définition :

$$\nabla_{\psi} H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \vec{n}) - H(\psi)] \right)$$

où \vec{n} est la normale à la forme ψ .

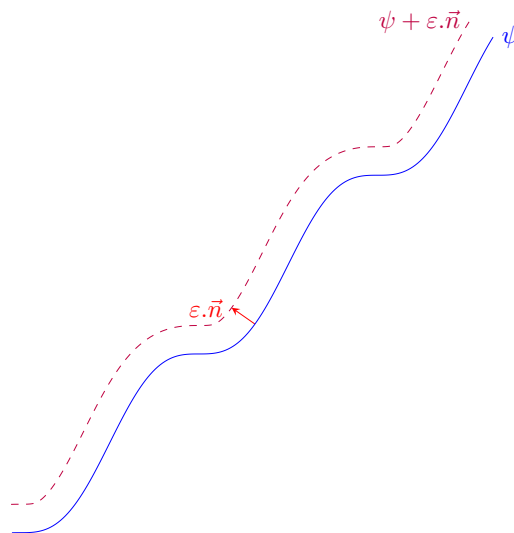


FIGURE 1 – Illustration de ψ et $\psi + \varepsilon \vec{n}$ avec la fonction $\psi : x \rightarrow \cos(x) + x$

A l'ordre 1 nous pouvons considérer l'approximation suivante :

$$\nabla_{\psi} H \approx \frac{1}{\varepsilon} [H(\psi) + \varepsilon \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} - H(\psi)] \quad (1)$$

ainsi, nous avons l'égalité :

$$\boxed{H_{\psi} \approx \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}} \quad (2)$$

illustrons ce développement sur des exemples simples.

Dans la suite, pour simplifier, nous considérons la relation $H = \psi^2$ décrivant la hauteur d'eau de la houle.

Forme plate

La forme plate $\psi = \{(x, y) \in R^2 \mid y - c = 0\}$ déformée de $\varepsilon \vec{n}$ est donnée par $\psi + \varepsilon \vec{n} = \{(x, y) \in R^2 \mid y - c - \varepsilon = 0\}$.

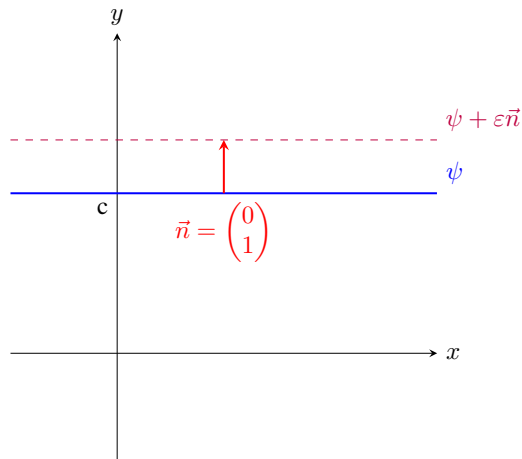


FIGURE 2 – Illustration de ψ et $\psi + \varepsilon \vec{n}$ avec la fonction $\psi : x \rightarrow c$

Soit :

$$\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - c = 0\}$$

$$H = \psi^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - c^2 = 0\}$$

alors, on a d'une part :

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi} H &\approx \frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \vec{n}) - H(\psi)] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\cancel{\psi^2} + 2\psi\varepsilon + \underbrace{\varepsilon^2}_{\rightarrow 0} - \cancel{\psi^2}] \\ &= 2\psi \end{aligned}$$

d'une autre part :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} = 2\psi \nabla_X(\psi) \cdot \vec{n} = 2\psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\psi$$

et donc

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} = H_{\psi} = 2\psi}$$

(3)

Forme linéaire avec \vec{n} normalisé

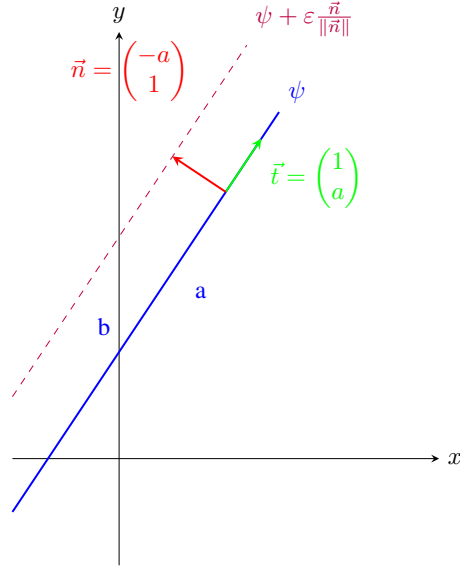


FIGURE 3 – Illustration de ψ et $\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ avec la fonction $\psi : x \rightarrow ax + b$

La forme linéaire $\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - ax - b = 0\}$ déformée de $\varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ est donnée par $\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. on sait que le point $A(0, b)$ est contenu sur la droite. Le point $A' = A + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ est donc contenu sur la nouvelle droite translaté et a pour coordonnées : $A' = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -a\varepsilon \\ b\|\vec{n}\| + \varepsilon \end{pmatrix}$. On en déduit :

$$\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = ax + b'$$

avec :

$$b' = b + \frac{\varepsilon}{\|\vec{n}\|} (a^2 + 1) = \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b$$

on en déduit l'équation :

$$\begin{aligned} \psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} &= ax + b' \\ \psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} &= ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b \end{aligned}$$

Vérifions l'égalité (1) pour $H = \psi^2$. D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi} H &\approx \frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}) - H(\psi)] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [(ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b)^2 - (ax + b)^2] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\varepsilon^2 (a^2 + 1) + 2\varepsilon(ax + b)\sqrt{a^2 + 1}] \\ &= \underbrace{\varepsilon(a^2 + 1)}_{\rightarrow 0} + 2\psi\sqrt{a^2 + 1} \\ &= 2\psi\sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

De l'autre part, nous avons :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} = 2\psi \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{2\psi}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = 2\psi \frac{(1 + a^2)}{\sqrt{1 + a^2}} = 2\psi\sqrt{a^2 + 1}$$

L'égalité : $\boxed{H_\psi = \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}}$ est donc vérifiée.

De plus, si on prends $a = 0$, on retrouve bien $\nabla_\psi H \approx 2\psi$.

Forme linéaire avec \vec{n} normalisé avec $H = \cos(\psi)$

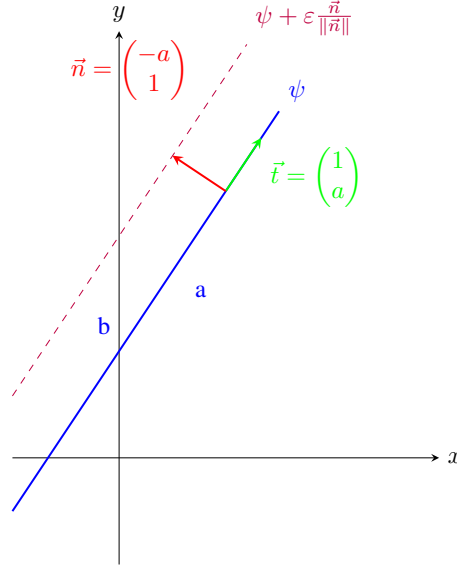


FIGURE 4 – Illustration de ψ et $\psi + \varepsilon \vec{n}$ avec la fonction $\psi : x \rightarrow ax + b$

La forme linéaire $\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - ax - b = 0\}$ déformée de $\varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ est donnée par $\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b$.

Vérifions l'égalité (1) pour $H = \cos(\psi)$. D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \nabla_\psi H &\approx \frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}) - H(\psi)] \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} [\cos(ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b) - \cos(ax + b)] \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} [\cos(ax + b) \underbrace{[\cos(\varepsilon \sqrt{a^2 + 1}) - 1]}_{\rightarrow 1 - \varepsilon^2(a^2 + 1)} - \sin(ax + b) \underbrace{\sin(\varepsilon \sqrt{a^2 + 1})}_{\rightarrow \varepsilon \sqrt{a^2 + 1}}] \\
 &\approx \underbrace{-\cos(ax + b) \varepsilon (a^2 + 1)}_{\rightarrow 0} - \sin(ax + b) \sqrt{a^2 + 1} \\
 &= -\sin(\psi) \sqrt{a^2 + 1}
 \end{aligned}$$

De l'autre part, nous avons :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} = -\sin(\psi) \nabla_X \psi = -\sin(\psi) \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = -\frac{\sin(\psi)}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = -\sin(\psi) \frac{(1 + a^2)}{\sqrt{1 + a^2}} = -\sin(\psi) \sqrt{a^2 + 1}$$

L'égalité : $\boxed{H_\psi = \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}}$ est donc vérifiée.

Numérique

Dans la suite, on va comparer cette approximation de H_ψ numérique avec la version de H_ψ analytique dans Optimorph. On a donc besoin de :

- La valeur de ψ
- Une expression de $\nabla_\psi H$

On doit simplement calculer via la formule :

$$H_\psi \approx \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}$$

on pose : $\overrightarrow{\nabla_X H} = \begin{pmatrix} \frac{dH}{dx} \\ \frac{dH}{d\psi} \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$ et on a donc :

$$\begin{aligned} H_\psi &\approx \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} \\ &= \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left[-\frac{dH}{dx} d\psi + \frac{dH}{d\psi} dx \right] \\ &= \frac{dH}{\|\vec{n}\|} \left[\frac{dx^2 - d\psi^2}{d\psi dx} \right] \end{aligned}$$

et donc :

$$H_\psi \approx = \frac{dH(dx^2 - d\psi^2)}{d\psi dx \sqrt{dx^2 + d\psi^2}} \quad (4)$$

en utilisant ces résultats, on n'obtient pas de corrélation entre la solution analytique et numérique comme on peut voir dans l'annexe 1. En essayant quelques solutions, on arrive au formalisme suivant :

on pose : $\overrightarrow{\nabla_X H} = \begin{pmatrix} -\frac{dH}{dx} \\ \frac{dH}{d\psi} \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$. Ici, on ne trouve pas de justification pour ce " - " étrangement. Et on a :

$$\begin{aligned} H_\psi &\approx \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} \\ &= \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left[\frac{dH}{dx} d\psi + \frac{dH}{d\psi} dx \right] \\ &= \frac{dH}{\|\vec{n}\|} \left[\frac{dx^2 + d\psi^2}{d\psi dx} \right] \\ &= \frac{dH \sqrt{dx^2 + d\psi^2}}{d\psi dx} \end{aligned}$$

et donc :

$$H_\psi \approx = \frac{dH \sqrt{dx^2 + d\psi^2}}{d\psi dx} \quad (5)$$

Cette équation nous permet d'obtenir une corrélation entre la solution analytique et numérique comme on peut voir dans l'annexe 2. On peut essayer de quantifier cette erreur avec la partie suivante :

Vérification de la solution numérique sur un cas simple

On peut vérifier cette approximation en calculant numériquement la solution du problème . On calcul l'erreur pour des points correspondant à un pas spatial $\Delta x = [10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1]$ et on obtient la courbe suivante :

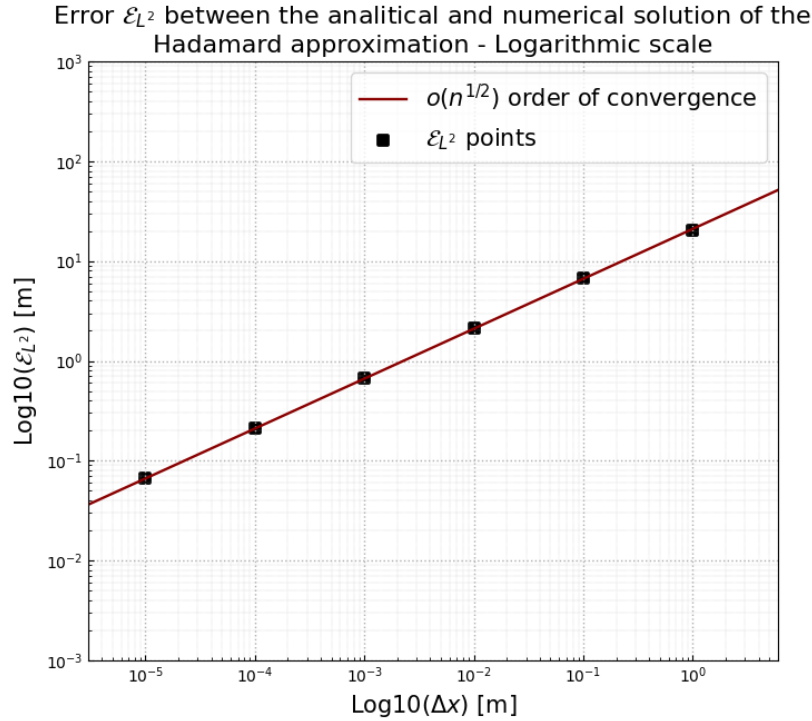


FIGURE 5 – Erreur L^2 et ordre de convergence pour une comparaison entre la solution analytique du problème simple avec $H = \cos(\psi)$

Les sources d'erreurs pour ce calcul sont les suivantes :

- L'approximation dans le calcul du vecteur \vec{n} . Elle est nulle dans notre cas car ψ est linéaire
- Le calcul du gradient par différences finis

le premier point peut être amélioré via des méthodes de lissages comme par exemple la méthode de Savitsky-Golay [? ?]. Le second point également en augmentant l'ordre du développement de Taylor. Cependant, ceci serait trop coûteux pour un résultat surement moindre.

Vérification de la solution numérique sur OptiMorph

En implémentant l'équation :

$$H_\psi = \frac{dH \sqrt{dx^2 + d\psi^2}}{d\psi dx} \quad (6)$$

dans OptiMorph, on peut comparer les différentes valeurs de H_ψ et obtenir par exemple la courbe suivante :

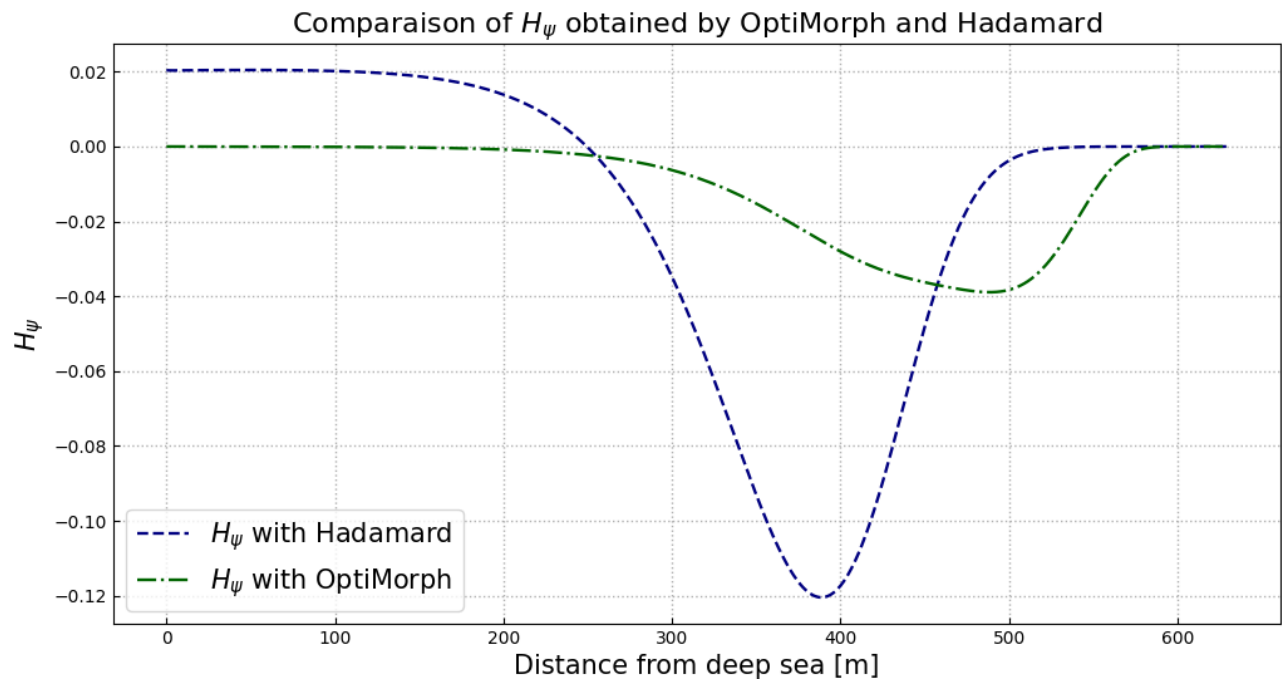


FIGURE 6 – Comparaison de H_ψ avec ma méthode d'OptiMorph et celle d'Hadamard

Ici, on arrive à une approximation de H_ψ trop loin de ce que l'on désire.

Annexe

Code associé à l'équation 4

```
from matplotlib.pyplot import *
a,b = -2,2
n = 200
x = linspace (-1,1,n)

psi = a*x + b
H = cos(psi)

dH = H[1:]-H[:-1]
dpsi = psi[1:]-psi[:-1]
dx = x[1:]-x[:-1]

H_psi_num = dH*(dx**2-dpsi**2)/(dx*dpsi)/(dx**2+dpsi**2)**0.5
H_psi_anal = -sin(psi)*(a**2+1)**0.5

plot (x ,H_psi_anal,label="$H_\psi$ analytical")
plot (x[:-1],H_psi_num, label ="$H_\psi$ numerical")
legend()
grid('on')
xlabel("x")
ylabel('$H_\psi$')
title('Comparaison of $H_\psi$ between analytical and numerical methods')
legend()
savefig('approx_1.png')
show()
```

ce qui nous renvoie la figure ci-dessous :

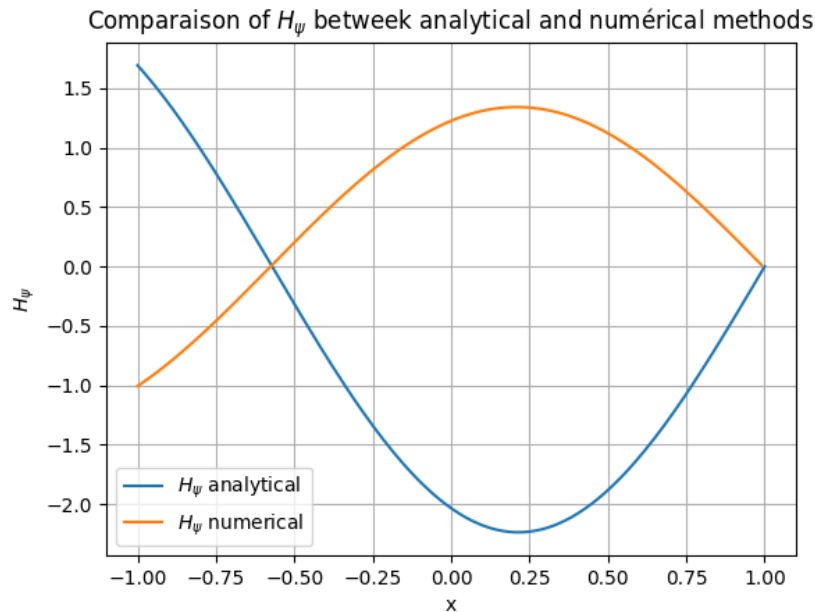


FIGURE 7 – Figure obtenue avec le code 1 ci-dessus via l'équation 4

Code associé à l'équation 5



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



```

from matplotlib.pyplot import *
a,b = -2,2
n = 200
x = linspace (-1,1,n)

psi = a*x + b
H = cos(psi)

dH = H[1:]-H[:-1]
dpsi = psi[1:]-psi[:-1]
dx = x[1:]-x[:-1]

H_psi_num = dH*(dx**2+dpsi**2)**0.5/(dx*dpsi)
H_psi_anal = -sin(psi)*(a**2+1)**0.5

plot (x ,H_psi_anal,label="$H_{\psi}$ analytical")
plot (x[:-1],H_psi_num, label ="$H_{\psi}$ numerical")
legend()
grid('on')
xlabel("x")
ylabel('$H_{\psi}$')
title('Comparaison of $H_{\psi}$ between analytical and num rical methods')
legend()
savefig('approx_2.png')
show()

```

ce qui nous renvoie la figure ci-dessous :

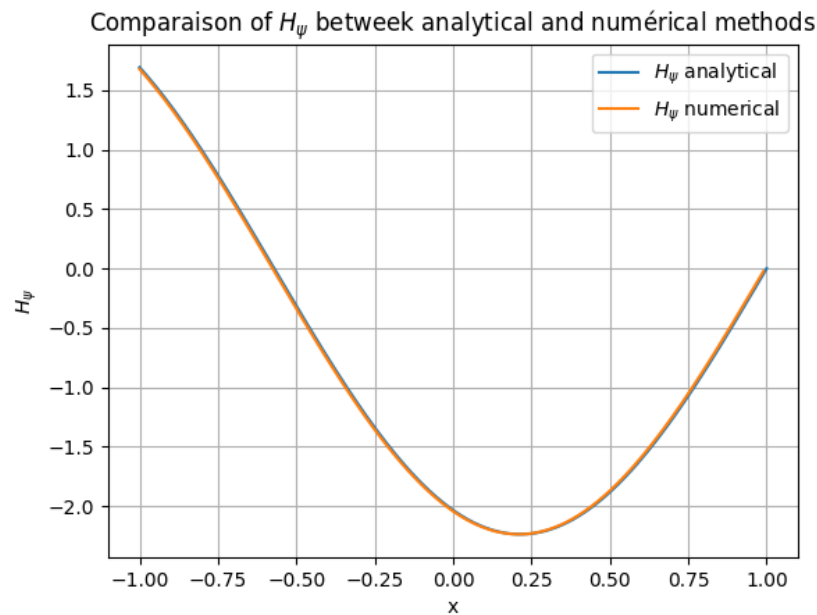


FIGURE 8 – Figure obtenue avec le code 1 ci-dessus via léquation 5

2.3 2022: Lien entre le Lagrangien et l'Optimisation

Table des matières

1		2
1.1	Introduction	2
1.2	Approche par la mécanique analytique Lagrangienne	3
1.2.1	Equation d'Euler Lagrange	3
1.2.2	Identité de Beltrami	4
1.2.3	Applicatoin, problème de Brachistochrone :	5
1.3	Approche par transport optimal	6
1.3.1	Exemple de la trajectoire d'une particule se déplaçant uniformément dans l'espace par l'approche Lagrangienne	6
1.3.2	Exemple de la trajectoire d'une particule se déplaçant uniformément dans l'espace par l'approche de transport optimal	7
1.4	Justification de notre approche de minimisation de l'énergie des vagues	9
1.4.1	Problème de résistance minimale de Newton	9
1.4.2	Analogie entre un système [flux d'air-avion] et un système [flux d'eau-bathymétrie]	11
1.5	Conclusion	12



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Chapitre 1

1.1 Introduction

Dans cette thèse, un nouveau formalisme sera introduit. Celui-ci repose sur un principe mathématique basé sur le transport optimal. Cette approche cherche à résoudre des problèmes physique via une méthode d'optimisation. Dans notre cas d'étude, on cherchera à étudier l'évolution de la bathymétrie ψ en fonction du temps.

Dans l'histoire, il a existé de nombreux problèmes classiques comme celui de Brachistochrone [3], celui du problème de Dido [4] qui ont pu être résolus par des méthodes d'optimisation. Ces problèmes peuvent être traités avec la méthode d'Euler-Lagrange qui consiste à résoudre l'équation d'Euler-Lagrange pour obtenir la solution optimale. Cette approche présentée à gauche sur la Figure 1.1 a l'avantage de permettre la connaissance de tout l'état transitoire entre un état initial A et un état final B .

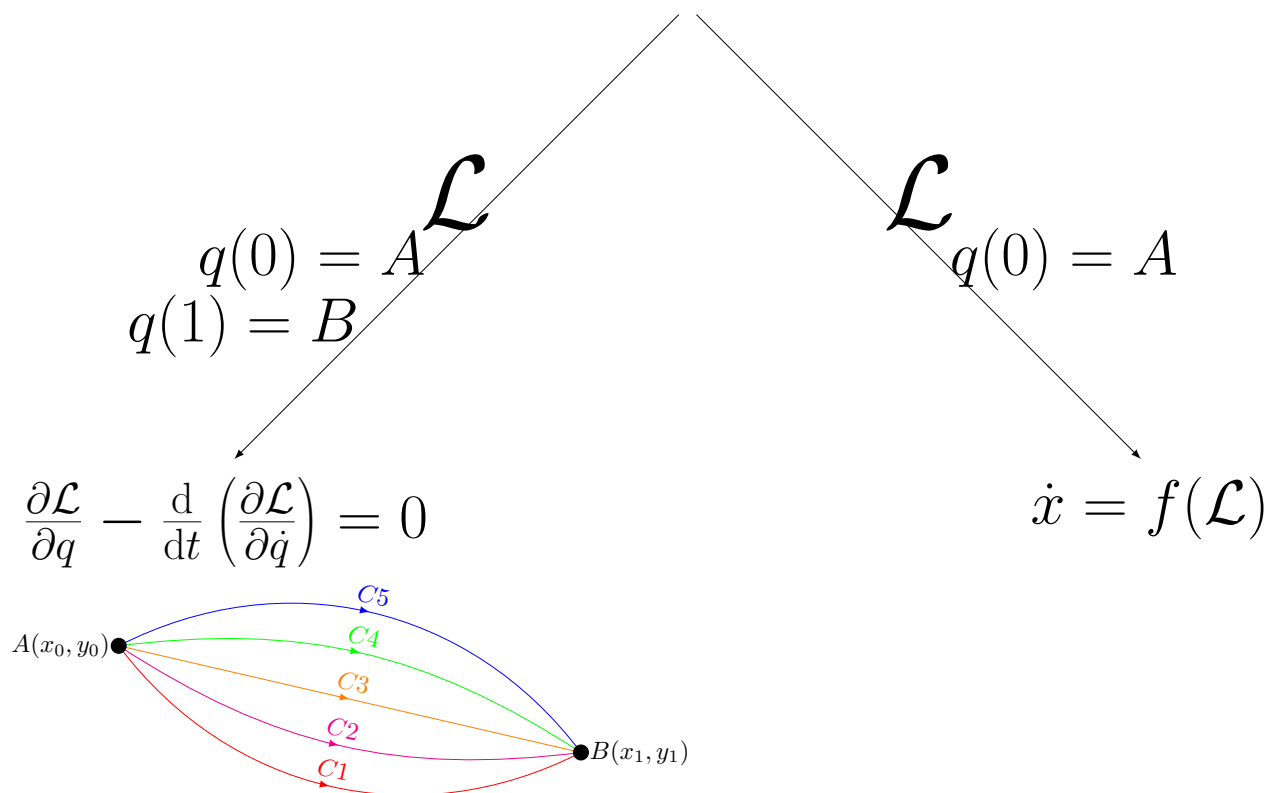


FIGURE 1.1 – Deux approches différentes

Cette approche extraite de la mécanique analytique classique nécessite tout de même de connaître une fonctionnelle \mathcal{L} pour en déduire l'état de transition entre A et B . Cette fonctionnelle sera choisie au cas-par cas en fonction du problème. Typiquement sur l'exemple ci-dessous, on peut exhiber une fonctionnelle minimisant le temps de parcours d'une particule pour se déplacer de A à B .

Dans l'approche sur la Figure 1.1 à droite, on ne connaît seulement l'état initial A et on ne connaît pas la position du point B .

Cette fois-ci, on cherche à trouver une fonctionnelle \mathcal{L} à minimiser de telle sorte qu'on puisse trouver un ou des candidats B' . Dans cette approche, on ne peut pas avoir la certitude d'arriver en B . Cependant, à chaque pas spatial, on aura une solution sera de telle sorte qu'elle ait minimisé une certaine quantité (frottement de l'air, énergie des vagues etc)

On peut illustrer cette approche avec les précédents qui ont précédés cette thèse. On partait d'un point A initiale qui était une bathymétrie initiale ψ_0 . À chaque pas de temps, on modifiait ψ vers un état qui était l'état minimisant une fonctionnelle J qui ici était l'énergie d'une vague. C'est l'approche qui a été adoptée dans les derniers travaux de *M. Cool & al* dans [5]. Si on avait voulu effectuer cette manipulation avec l'approche de Lagrange, il aurait été nécessaire de connaître l'état final ψ_f de la simulation.

Dans cette partie, on expliquera à l'aide d'exemples classiques comme le problème de résistance minimal de Newton, la justification d'utiliser l'approche de transport optimal (de droite) ainsi que le choix de notre fonctionnelle.

1.2 Approche par la mécanique analytique Lagrangienne

Afin de comprendre la nouvelle approche annoncée dans l'introduction ci-dessus, il est nécessaire de comprendre l'approche déjà existante de Lagrange. Il convient de savoir que la mécanique analytique est une branche de la mécanique classique. Celle-ci est constituée d'une formulation très mathématisée. La mécanique analytique s'est avérée un outil très important en physique théorique.

Contrairement à la mécanique d'Isaac Newton qui s'appuie sur le concept de point matériel, la mécanique analytique elle, se penche sur les systèmes arbitrairement complexes, et étudie l'évolution de leurs degrés de libertés dans ce qu'on appelle un espace de configuration ou espace de paramétrisation. Ce sont les paramètres q de notre problème.

Les lois du mouvement sont quant à elles déduites d'un principe variationnel qui, appliqué à une grandeur appelée action, donne le principe de moindre action. En substance, le principe de moindre action énonce que parmi toutes les trajectoires possibles pour relier deux points de l'espace de configuration, celle qui est effectivement parcourue par le système est celle qui donne une valeur minimale à l'action.

L'action S , est une grandeur fondamentale de la physique théorique, ayant la dimension d'une énergie multipliée par une durée, ou d'une quantité de mouvement multipliée par une distance. Elle s'exprime donc en $J.s$.

L'action caractérise l'état d'un système et son évolution, c'est une grandeur fonctionnelle \mathcal{L} , qui prend en argument la trajectoire q du système et la décrit globalement par un scalaire.

Pour résoudre le principe de moindre action, il convient de faire appel à un formalisme mathématique de minimisation à savoir l'équation d'Euler Lagrange.

1.2.1 Equation d'Euler Lagrange

La mécanique analytique est basée sur un principe physique à savoir le principe de moindre action mais aussi d'un principe mathématique qui résout le minimum de l'action avec l'équation (1.1) de Euler-Lagrange.

On pose E un espace vectoriel normé, $[t_0, t_1]$ un intervalle réel, et \mathcal{G} l'espace affine des fonctions $q : [t_0, t_1] \rightarrow E$ de classe C^1 telles que $q(t_i) = q_i$, où q_0, q_1 sont deux vecteurs fixés de E .

Le vecteur dérivé d'une fonction $q \in \mathcal{G}$ en un point $t \in [t_0, t_1]$ est noté $\dot{q}(t)$.

On se donne par ailleurs une fonction $\mathcal{L} : [t_0, t_1] \times E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Soit J la fonctionnelle définie sur \mathcal{G} par :

$$J(q) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

Pour toute fonction $q \in \mathcal{G}$ stationnaire pour J , $t \mapsto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}$ est dérivable et

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (1.1)$$

Démonstration :

Le principe de moindre action stipule que le chemin $q^*(t)$ emprunté par le système est celui qui optimise l'intégrale d'action, c'est-à-dire tel que

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q_1^*, \dots, q_n^*, \dot{q}_1^*, \dots, \dot{q}_n^*, t) dt = 0 \quad (1.2)$$

On différencie des trajectoires voisines, dans l'espace des configurations, en introduisant un paramètre ϵ tel que $q(t) = q(t, \epsilon)$. La trajectoire optimale est définie par $q^*(t) = q(t, 0)$, qui est le chemin solution que l'on cherche. Un chemin voisin du chemin optimal est alors défini par

$$\begin{aligned} q_1(t, \epsilon) &= q_1(t, 0) + \epsilon \eta_1(t) \\ &\vdots \\ q_n(t, \epsilon) &= q_n(t, 0) + \epsilon \eta_n(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$

où les $\eta_i(t)$ sont des fonctions arbitraire du temps, indépendantes, qui s'annulent aux points extrêmes du chemin (en t_1 et t_2) et sont dérivables jusqu'à l'ordre 2. On recherche donc la solution $q(t, 0) \equiv q^*(t)$ pour laquelle

$$\delta \mathcal{S} \equiv \left(\frac{d\mathcal{S}}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} d\epsilon = 0 \quad (1.4)$$

qui se traduit par :

$$\frac{d\mathcal{S}}{d\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \epsilon} \right) dt = 0 \quad (1.5)$$

Or,

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \epsilon} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial \epsilon} dt = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial \epsilon} \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \epsilon} dt \quad (1.6)$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\mathcal{S}}{d\epsilon} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \frac{\partial q}{\partial \epsilon} dt = 0 \quad (1.7)$$

La condition de stationarité (1.5) est alors équivalente à :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \left(\frac{\partial q}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} dt = 0 \quad (1.8)$$

Ainsi,

$$\delta \mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt = 0 \quad (1.9)$$

en ayant défini le déplacement infinitésimal δq par :

$$\delta q \equiv \left(\frac{\partial q}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=0} d\epsilon \quad (1.10)$$

Les fonctions $\left(\frac{\partial q}{\partial \epsilon} \right) = \eta(t)$, ou δq , étant arbitraires, sauf aux extrémités, et continues par hypothèse, l'équation (1.9) est vérifiée, sur tout le chemin, si et seulement si

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0 \quad (1.11)$$

qui sont les équations d'Euler-Lagrange. La notation δ est utile pour définir des variations intégrales lors de la manipulation de familles paramétriques de chemins variables tels que définis par l'équation (1.3).

1.2.2 Identité de Beltrami

Un corollaire de l'équation (1.1) d'Euler-Lagrange est le cas particulier où la fonction \mathcal{L} est indépendante de t . On appelle ce corollaire l'identité de Beltrami : elle sert dans des problèmes classiques comme le problème de Brachistochrone [3] qui cherche à minimiser le temps de parcours entre deux points d'une particule dans un champ de pesanteur. L'identité de Beltrami est la suivante :

$$\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} = C \quad (1.12)$$

avec C une constante.

Démonstration :

En supposant q deux fois dérivable, dérivons le membre de gauche de l'identité de Beltrami :

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{q} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} - \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right) \dot{q} = 0$$

ce qui montre donc, par intégration, l'équation (1.12). Une application directe de cette identité dans la partie suivante.

1.2.3 Applicatoin, problème de Brachistochrone :

Le problème de Brachistochrone [3] vise à trouver la trajectoire pour laquelle une particule soumise à un champ gravitationnel met le moins de temps possible à aller du point A au point B .
On élabore la paramétrisation du problème ci-dessous Figure 1.2.

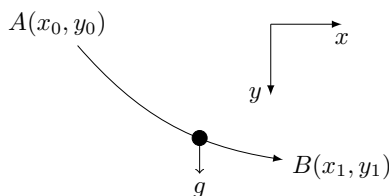


FIGURE 1.2 – Paramétrisation du problème de Brachistochrone

La particule va du point A au point B pendant le temps suivant :

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v} \quad (1.13)$$

avec $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} = \sqrt{1 + y'^2} dx$.

On trouve v de manière triviale en posant un problème de chute de particule dans l'espace. Celle-ci subit uniquement la force gravitationnelle soit $my(t)'' = mg$ d'où $y(t)' = gt + A$ et donc $y(t) = g\frac{t^2}{2} + At = B$. En posant les conditions initiales $y(t=0)' = 0$ et $y(t=0) = 0$, on arrive rapidement à $t = \sqrt{\frac{2y(t)}{g}}$ et donc en reprenant l'expression de $y'(t)$, on arrive à une vitesse :

$$v = \sqrt{2gy} \quad (1.14)$$

En posant $T = \frac{I}{\sqrt{2g}}$, on arrive à l'expression :

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y') dx \quad (1.15)$$

avec donc

$$F(y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} \quad (1.16)$$

Chercher le minimum de T revient à chercher le minimum de I qui vérifie l'équation (1.1). Or, dans ce cas, F n'est pas fonction de x et donc on a l'identité de Beltrami (équation (1.12)) qui est vérifiée et donc :

$$\left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F \right) = \frac{y''^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} - \sqrt{\frac{1 + y''^2}{y}} = \frac{-1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} \quad (1.17)$$

On a donc avec l'équation (1.17) :

$$\sqrt{y(1 + y'^2)} = C \quad (1.18)$$

ce qui nous donne une équation de cycloïde. La solution est bien connue, on la retrouve par substitution avec :

$$y(t) = \frac{1}{2}C^2(1 - \cos(t)) = C^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right). \quad (1.19)$$

et donc

$$\begin{aligned} y'^2 &= \frac{C^2}{y} - 1 \\ y' &= \sqrt{\frac{C^2 - y}{y}} = \cot\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

et

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \int \tan\left(\frac{t}{2}\right) \frac{dy}{dt} dt \quad (1.21)$$

avec

$$\frac{dy}{dt} = C^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right). \quad (1.22)$$

Ici, on choisit $x_0 = 0$,

$$\begin{aligned}
 x(t) &= C^2 \int \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) dt \\
 &= \frac{1}{2} C^2 \int (1 - \cos(t)) dt \\
 &= \frac{1}{2} C^2 (t - \sin(t))
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Ce qui nous donne la solution suivante :

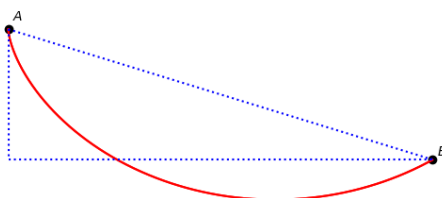


FIGURE 1.3 – Courbe solution de Brachistochrone

1.3 Approche par transport optimal

La seconde approche que nous avons introduite dans la partie 1.1 est basée sur le transport optimal. Celle-ci se base sur un principe d'optimisation qui dirigera le chemin d'une quantité à travers le temps.

Dans les travaux précédents de [5], on part du postulat que *la nature s'adapte de telle sorte que l'énergie dissipée soit minimale*. Ceci entraîne donc le fait qu'on peut trouver une bathymétrie ψ satisfaisant les conditions minimales d'énergies de vagues. Le formalisme mathématique découlant de cette phrase est le suivant.

Par une méthode de descente du gradient,

$$\psi^{n+1} = \psi^n - dt \mathcal{J}_{\mathcal{H}} \tag{1.24}$$

avec $\mathcal{J}_{\mathcal{H}}$ l'énergie d'une vague sur un domaine donnée. On peut alors déterminer l'évolution de la bathymétrie ψ .

Pour comprendre cette approche, on prendra un problème simple dans la partie suivante. On commencera par exposer le résultat par l'approche classique Lagrangienne puis ensuite par notre approche.

1.3.1 Exemple de la trajectoire d'une particule se déplaçant uniformément dans l'espace par l'approche Lagrangienne

Prenons l'exemple d'une particule qui se déplace uniformément dans un espace \mathbb{R}^2 à une vitesse constante v . Celle-ci partira du point $A(x_0, y_0)$ pour arriver jusqu'au point $B(x_1, y_1)$. On cherche à trouver la trajectoire optimale de cette particule afin qu'elle mette le moins de temps possible pour aller du point A au point B .

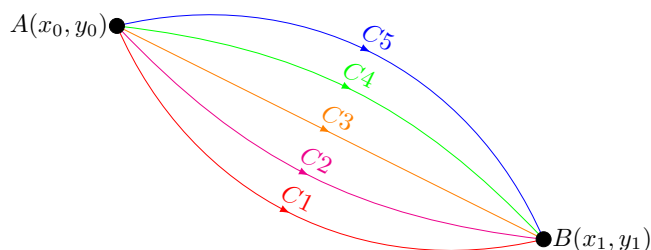


FIGURE 1.4 – Paramétrisation de l'exemple simple avec plusieurs trajectoires possibles

Pour cela, on utilise une méthode variationnelle (on aurait pu utiliser le principe de Fermat). On définit le temps que la particule met à aller de A à B de la manière suivante :

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v} \quad (1.25)$$

avec donc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2} dx$.

De manière analogue au problème de Brachistochrone [3], on pose $T = \frac{I}{v}$ avec donc

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(y, y') dx \quad (1.26)$$

où $F(y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Le minimum de ce problème est donc la solution de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\mathcal{G} = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad (1.27)$$

Or, dans notre cas on peut utiliser l'identité de Beltrami car F n'est pas une fonction de x . On a donc :

$$\left(y' \frac{\partial F}{\partial y'} - F \right) = cte \quad (1.28)$$

ce qui nous donne donc :

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \sqrt{1 + y'^2} = cte$$

soit

$$\frac{y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{1 + y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} = cte$$

soit

$$\frac{-1}{\sqrt{1 + y'^2}} = cte$$

soit

$$\sqrt{1 + y'^2} = cte$$

soit

$$y'^2 = cte$$

et donc

$$y' = cte \quad (1.29)$$

La solution de cette équation différentielle du premier ordre est assez triviale, on trouve rapidement une solution de la forme :

$$y(x) = ax + b$$

ce qui représente la trajectoire rectiligne de la particule. Dans ce cas-précis, la solution exacte est la suivante :

$$y(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + \frac{y_0 x_1 - y_1 x_0}{x_1 - x_0}$$

1.3.2 Exemple de la trajectoire d'une particule se déplaçant uniformément dans l'espace par l'approche de transport optimal

Pour la seconde approche, on utilisera la notion de transport optimal. On reprends l'exemple d'une particule qui se déplace uniformément dans un espace \mathbb{R}^2 à une vitesse constante v . Celle-ci partira du point $A(x_0, y_0)$ pour arriver jusqu'au point inconnu B' que l'on ne connais pas. On cherche à trouver la trajectoire optimale de cette particule de telle sorte qu'elle minimise une certaine fonctionnelle F . Pour ce problème, on partira de la solution à savoir le vecteur de descente d afin de remonter à la fonctionnelle.

Le problème ici revient donc à trouver une fonctionnelle F de telle sorte que la particule parcourt le chemin de A à B de manière uniforme.

On pars du problème :

$$\begin{cases} \dot{x} &= d \\ x(0) &= A \\ x(1) &= B \end{cases}$$

on sait que \vec{d} est un vecteur unitaire traduisant la direction de A à B . Il est donc de la forme :

$$\vec{d} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \left(\frac{\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}}{\frac{y_1 - y_0}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}}} \right)$$

Si on pose $J = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$, on a rapidement :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial (x_0 - x_1)} = \frac{x_0 - x_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} \\ \frac{\partial J}{\partial (y_0 - y_1)} = \frac{y_0 - y_1}{\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}} \end{cases}$$

on aura donc bien $\vec{d} = -\nabla J$.

Pour aller plus loin, on peut généraliser dans \mathbb{R}^n en posant les distances projetées sous la forme :

$$q_i = x_0^i - x_1^i \text{ avec } i = 1, \dots, n$$

et on pose la norme :

$$\|\vec{AB}\| = \left(\sum_{i=1}^n q_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a donc \vec{d} de la forme :

$$\vec{d} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \begin{pmatrix} \frac{-q_1}{\|\vec{AB}\|} \\ \vdots \\ \frac{-q_n}{\|\vec{AB}\|} \end{pmatrix}$$

Si on calcul la dérivée partielle de la norme, on obtient :

$$\frac{\partial \|\vec{AB}\|}{\partial q_i} = \frac{q_i}{\|\vec{AB}\|}$$

Il convient donc de poser une fonctionnelle $J = \|\vec{AB}\|$, on aura bien :

$$\nabla J = \nabla \|\vec{AB}\| = -\vec{d}$$

Pour qu'une particule parcourt le point A à B , il convient donc de choisir une fonctionnelle F de la forme $F = \|\vec{AB}\|$ ou bien $F = \|\vec{AB}\|^2$. Ceci est très logique. On cherche à minimiser le temps de parcours entre les deux points à une vitesse constante. On cherche donc à minimiser la distance entre ces deux points.

Cet exemple nous montre qu'il est possible pour des cas-simples de remonter à la fonctionnelle (et donc intégrer dans \mathbb{R}^2 voir même \mathbb{R}^n en généralisant). L'inconvénient étant que pour des cas plus complexes comme le problème de Brachistochrone : il est difficile de remonter à une fonctionnelle de cette manière.

Cette approche est donc très utile quand on a **une idée précise de la fonctionnelle** comme on a pu voir dans les travaux précédents où la fonctionnelle est l'énergie des vagues sur un domaine défini. On justifiera le choix de cette fonctionnelle dans la partie suivante 1.4.

1.4 Justification de notre approche de minimisation de l'énergie des vagues

Dans cette partie, on s'intéressera à la justification du choix de la fonctionnelle $\mathcal{J}_{\mathcal{H}}$ étant l'énergie des vagues. Son expression est :

$$\mathcal{J}_{\mathcal{H}} = \int_0^T \mathcal{E}_{\mathcal{H}} dt \quad (1.30)$$

avec T le temps de simulation et $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ l'énergie d'une vague.

Pour justifier ce choix, on partira d'un problème d'optimisation analogue à savoir le problème de résistance minimale de Newton. Ensuite, on justifiera l'analogie entre ce problème et le notre.

1.4.1 Problème de résistance minimale de Newton

Le problème que nous allons présenter ci-dessous est très analogue à un problème d'optimisation de formes de coque de bateau. En effet, Newton a écrit que ses travaux pourraient servir dans l'industrie naval. Il a écrit dans son livre *Book 2 of the Principia* :

If in a rare medium, consisting of equal particles freely disposed at equal distances from each other, a globe and a cylinder described on equal diameter move with equal velocities in the direction of the axis of the cylinder, (then) the resistance of the globe will be half as great as that of the cylinder I reckon that this proposition will be not without application in the building ships.

Newton a émis dans le postulat ci-dessus que si chaque particule a frappé le corps au plus une fois, alors la résistance effective du corps peut être exprimée (dans les unités appropriées) par :

$$F(x, y, y') = \int_0^R \frac{x}{1 + y'^2} dx \quad (1.31)$$

Cette fonctionnelle a été trouvée par Newton à partir de considérations géométriques trouvables dans son livre à la *Proposition 34 of Book 2 of the Principia*.

Cette approche rejoint notre approche dans la mesure où il a un état initial A qui ici est la configuration la plus simple de son solide de révolution. Il ne connaît pas l'état final de son solide de révolution mais il va chercher à minimiser une certaine quantité : ici l'équation (1.31) afin d'obtenir la forme optimale de telle sorte que le solide subisse le moins de contacts possibles avec l'air.

Une fois la fonctionnelle en place, il ne reste plus qu'à la minimiser par l'équation d'Euler-Lagrange pour obtenir les solutions de cette forme optimale.

Nos travaux s'inscrivent dans ceux de Newton dans la mesure où Newton cherche à trouver la forme optimale d'un volume de tel sorte qu'il subisse le moins de résistance possible. En effet, notre approche, elle, cherche à trouver de même une forme optimale de telle sorte que la résistance de notre système (ici vagues et frottements) soit minimisée.

On pars de la paramétrisation suivante Figure 1.5 :

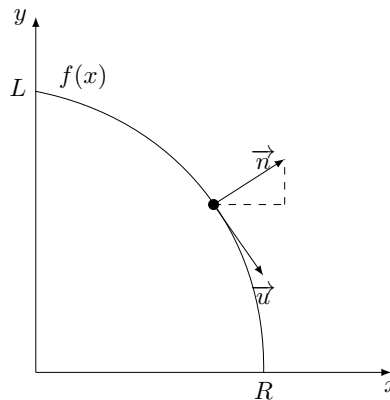


FIGURE 1.5 – Paramétrisation du problème de Newton

avec donc $y(0) = L$ et $y(R) = 0$ et $y' \leq 0$ et $y'' \geq 0$.

On peut proposer une approche calculatoire pour retrouver l'équation (1.31), on prends \vec{u} et \vec{n} deux vecteurs unitaires formant

un repère orthonormé selon le sens de la vitesse de la particule. On trouve un vecteur colinéaire à \vec{n} avec donc les coordonnées

$$\begin{pmatrix} dx \\ f' dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dx \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Avec Taylor au premier ordre, on a le déplacement en y : $dy = f(x + dx) - f(x) = dx f'(x)$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix}$ est donc un bon candidat. Il ne reste plus qu'à le normaliser et on obtient :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \\ \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \end{pmatrix}$$

On trouve facilement le vecteur :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \end{pmatrix}$$

Si on estime que chaque particule touche le solide, alors la quantité subis par particules est :

$$I = \vec{f} \cdot \vec{n} = m \vec{a} \cdot \vec{n} = ma \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

si on suppose que les champs d'accélération sont colinéaires au vecteur normal \vec{n} . Pour obtenir la force totale, il ne nous reste plus qu'à intégrer sur la surface totale $S = 2\pi x dx$ et on obtient :

$$J = I.S = 2\pi m a x dx \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = 2\pi m a \int_0^R \frac{x}{\sqrt{1+y'^2}} dx$$

ce qui revient à minimiser F si l'on retire les constantes et on simplifie la minimisation au dénominateur par croissance de la fonction $t \rightarrow \sqrt{t}$:

$$F = \int_0^R \frac{x}{1+y'^2} dx$$

On cherche donc à minimiser F avec l'équation (1.1) de Euler-Lagrange. On a donc :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{2xy'}{(1+y'^2)^2} \right) = 0 \quad (1.32)$$

ce qui nous donne :

$$2xy' = C (1+y'^2)^2 \quad (1.33)$$

ce qui n'est pas trivial à résoudre, même numériquement. On peut introduire une nouvelle variable $u = -y'$ et ajouter un multiplicateur de Lagrange $\lambda(x)$ dans la fonctionnelle ce qui nous donnerait :

$$\mathcal{H}[y, u, \lambda] = \int_0^R \left(\frac{x}{1+u^2} + \lambda (y' + u) \right) dx. \quad (1.34)$$

Le reste de ma démonstration sera donné par [2]. La résolution étant seulement numérique, on ne s'intéressera pas à essayer de résoudre ce problème via une approche de transport optimal.

Les formes obtenues par résolution de ce problème sont devenues des formes très utilisés dans l'industrie comme dans l'armement. Trouver une forme de telle sorte que celle-ci minimise la résistance est donc une approche qui fonctionne.

Dans le cas du naval, il serait intéressant de trouver la forme de la coque d'un navire optimal de telle sorte que celui-ci minimise la traînée.

La résistance appliqué sur la coque d'un bateau serait donc :

- Les vagues
- Les frottements sur la coque

Il convient donc de faire une analogie afin de minimiser le fond ψ .

1.4.2 Analogie entre un système [flux d'air-avion] et un système [flux d'eau-bathymétrie]

À la fin du XIX^{ème} siècle sont apparues les premières souffleries. Les premiers tests cherchaient à analyser les performances d'avions tels que les planeurs.

Les souffleries aussi bien réelles que virtuelles (par simulations CFD) sont devenues des indicateurs clés pour définir les performances aérodynamiques d'engins comme des avions, des voitures etc. Il est intéressant de déterminer les coefficients de trainée C_d et de portance C_l afin d'évaluer les performances aéronautiques.

Dans le cas d'un mobile (avion, véhicule), on considère que l'effet de l'air en mouvement sur le modèle à l'arrêt est le même que sur le modèle en mouvement dans une masse d'air fixe.

Si on part du postulat de Newton qui explique cherche à trouver la forme optimale d'un bateau de telle sorte que celui-ci minimise la résistance. Alors on se retrouve dans le système Figure 1.6 suivant :

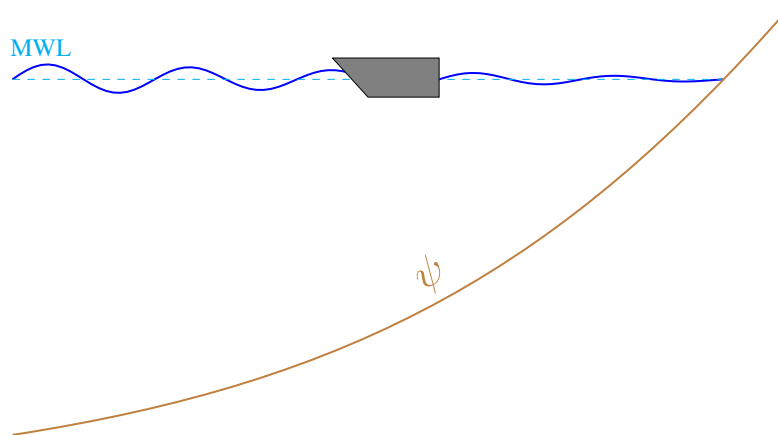


FIGURE 1.6 – Exemple d'une forme de coque résistance aux vagues et aux frottements

Comme évoqué précédemment, on peut effectuer un bilan des forces résistantes sur le bateau et on arrive rapidement aux **mouvements des vagues** et aux **frottements sur la coque**.

Dans notre étude, on considère que l'effet de l'eau sur le modèle à l'arrêt (bathymétrie) est le même que le modèle en mouvement dans le cas d'une masse d'eau fixe.

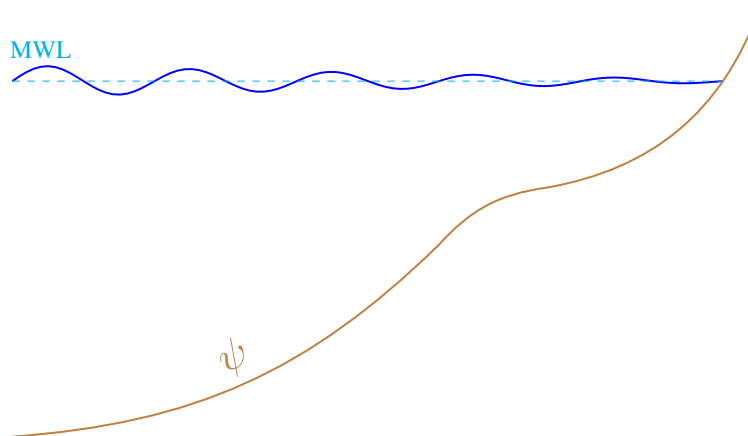


FIGURE 1.7 – Exemple d'une forme de bathymétrie ψ résistance aux vagues et aux frottements

Par analogie, on cherche donc à trouver la bathymétrie ψ optimale Figure 1.7 qui cherche à minimiser les **mouvements des vagues** et **frottements de le fond**.

1.5 Conclusion

Il a été évoqué deux méthodes bien différentes afin de régler des problèmes d'optimisation. La plus connue, celle découlant de la mécanique analytique de Lagrange, fait appelle à un état initial et un état final. Notre approche elle, basée sur certaines applications de Newton, fait appel à un seul état initiale et suppose que l'état final sera celui qui pourra satisfaire une quantité (le moins de frottements possibles, le moins de résistance,...). Newton a effectué des travaux sur l'optimisation de forme de bateau qui est un problème analogue à l'optimisation de la forme du fond marin. Ceci justifie le choix de notre approche qui cherche à minimiser la résistance sur notre fond sableux ψ .



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Bibliographie

- [1] D. APUSHKINSKAYAG, *Calculus of Variations Summer Term, Lecture 8, Universität des Saarlandes*, 2016.
- [2] P. AMIOT ET L. MARLEAU, *Cours mécanique analytique, Université Laval*, 2021.
- [3] A. JAMESON AND J. VASSBERG, *Studies of alternative numerical optimization methods applied to the Brachistochrone problem*, 2000.
- [4] B. MOHAMMADI, *Optimisation et apprentissage mathématique, Livret questions de cours et exercices, page 7, Université Montpellier*.
- [5] MEGAN COOK, *Thèse : Calcul optimal pour la modélisation de la dynamique naturelle des plages sableuses et la conception d'ouvrages de défense du littoral à faible impact anthropique*, 2021.



2.4 2021-2023: Carnet de recherche



Compte rendu scientifique

Semaine 66 : 13/02/23-17/02/22

OPTIXBEACH

L'objectif de rendre OPTIMORPH comme un code morpho générique permettant de s'accoler à n'importe quel modèle hydro a été rempli. Il convient donc de tester plusieurs codes d'hydrodynamique comme XBEACH. L'avantage de ce code de calcul est qu'il nous permet de récupérer des grandeurs intéressantes :

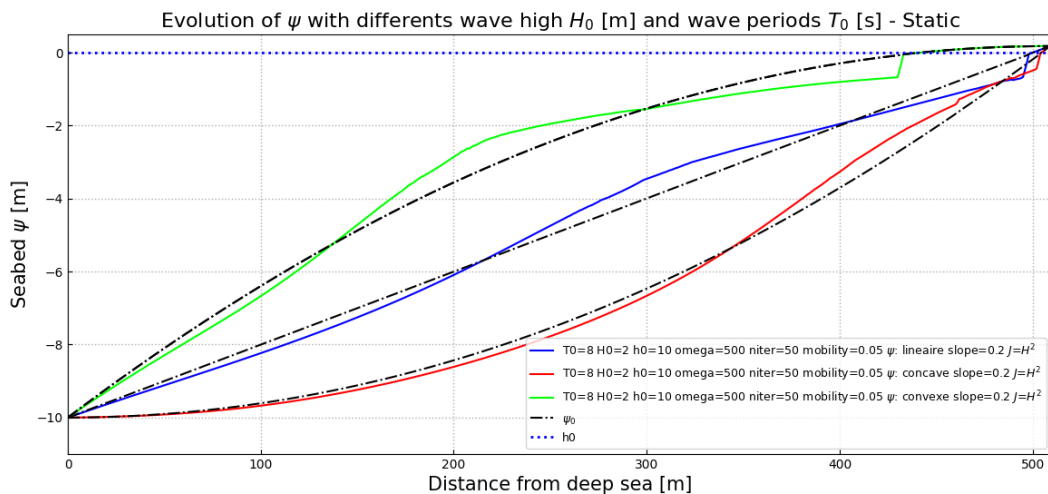
- u : le courant
- τ : la contrainte au fond.

Grâce à ces grandeurs et notre programme de derivation de Hadamard, on va pouvoir tester une multitude de fonctionnelles.

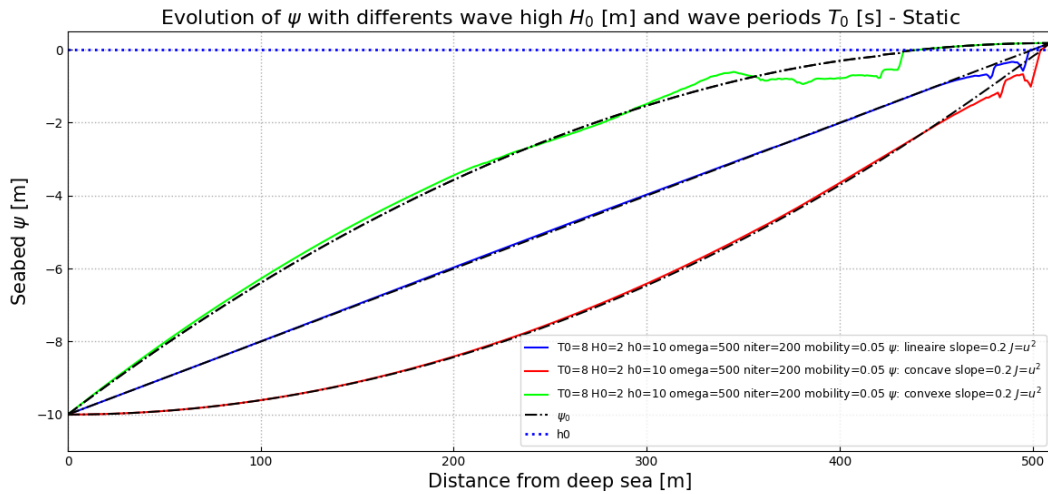
Différentes fonctionnelles

Pour montrer la réaction de ψ avec ces différentes fonctionnelles, on se placera dans un cas où $H_0 = 2\text{ m}$, $T_0 = 8\text{ s}$ et différentes bathymétries.

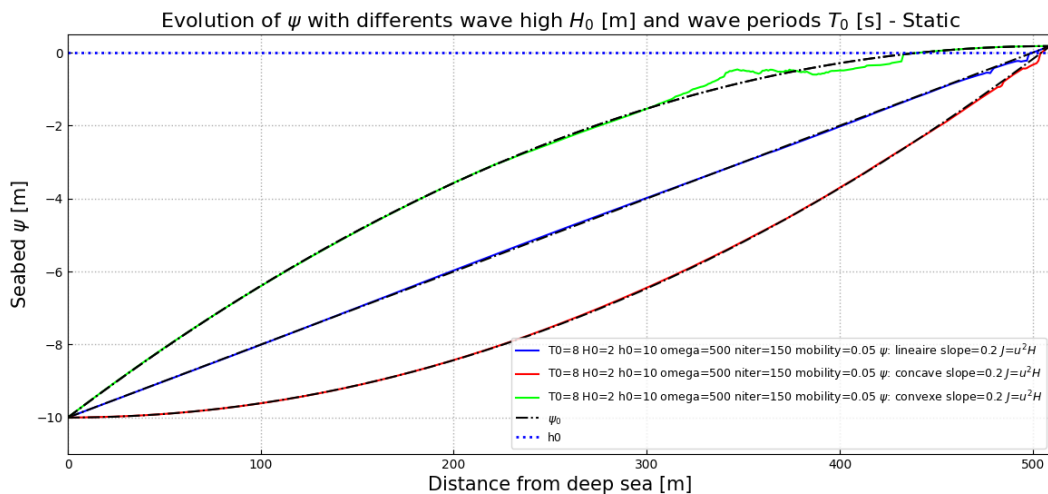
$$\mathcal{J} = H^2$$



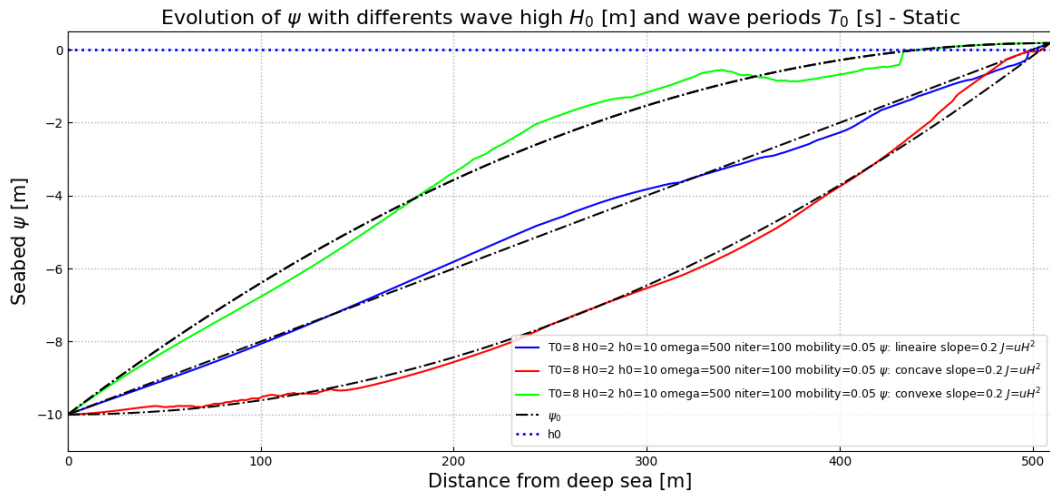
$$\mathcal{J} = u^2$$



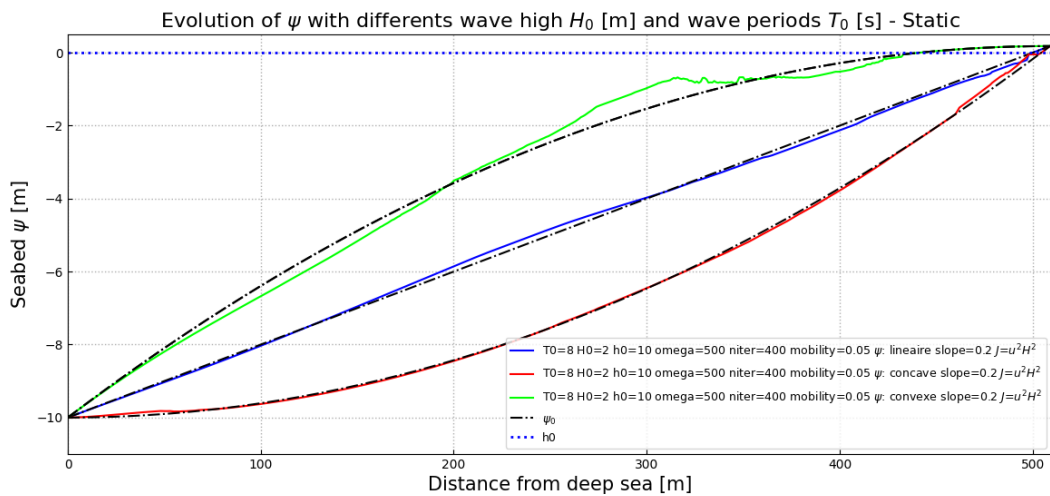
$$\mathcal{J} = u^2 H$$



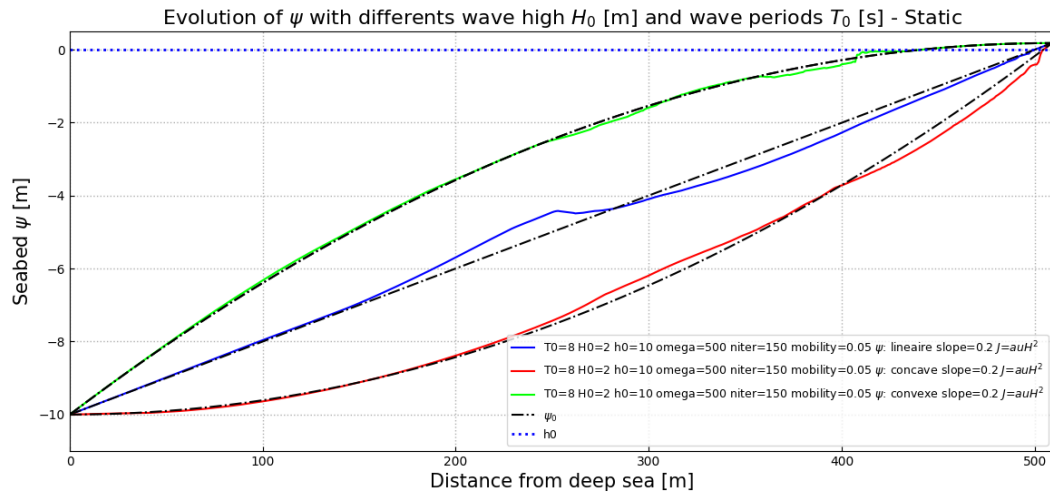
$$\mathcal{J} = uH^2$$



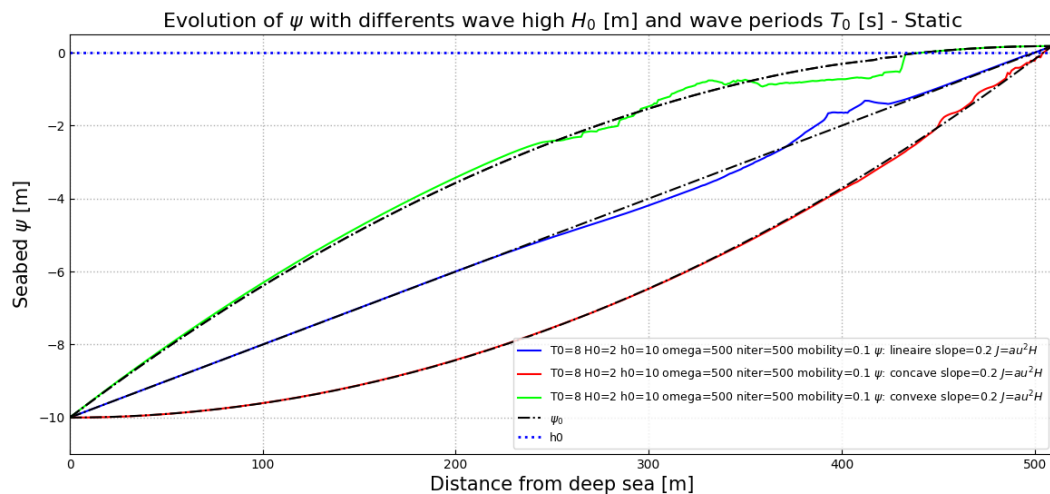
$$\mathcal{J} = u^2H^2$$



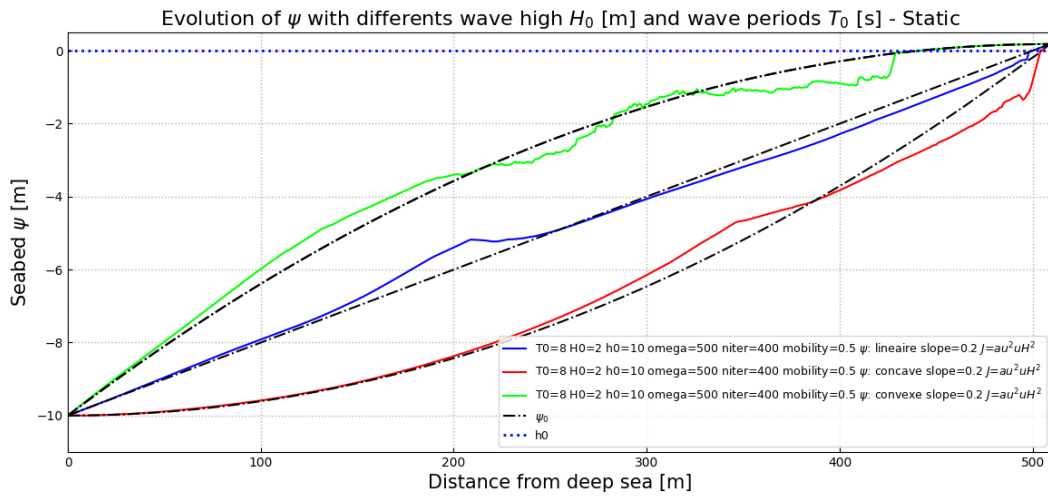
$$\mathcal{J} = \tau H^2$$



$$\mathcal{J} = \tau^2 H$$



$$\mathcal{J} = \tau^2 u H^2$$



Discussion

Les fonctionnelles produisant les meilleurs résultats sont les fonctionnelles avec un terme en H^2 . Il semblerait que la meilleur reste toujours la fonctionnelle en $\mathcal{J} = H^2$.

Compte rendu scientifique

Semaine 64-65 : 30/01/23-10/02/22

La semaine a été concentrée principalement sur les tests du modèle OPTISWAN : modèle couplé OptiMorph et Swan avec le calcul de H_ψ via Hadamard.

Plan de calculs

Des scripts ont été mis au point afin de pouvoir lancer à la chaîne n calculs sur le cluster.

Statique

Pour les premiers essais, les calculs ont été lancés **avec un forçage statique** : le forçage H_0 reste constant sur la durée totale de la simulation. **La fonction d'atténuation verticale est $\Upsilon = 1/\cosh(kh)$** . Ces calculs ont été lancés sur les permutations suivantes :

- $T_0 = [2, 6, 8, 12, 16]$: période de vague T_0
- $H_0 = [0.5, 1, 2, 3, 4]$: Hauteur de vague au large
- $h_0 = [10, 20, 50, 100]$: Profondeur de fermeture
- $\Omega = [500, 1000, 2000]$: Longueur du domaine
- $niter = [500, 1000, 2000]$: Nombre d'itérations
- $\Lambda = [0.01, 0.005]$: Mobilités
- Type de bathymétrie = $[0, 1, 2, 3]$: Linéaire / Concave / Convexe / 1 bosse
- Pente maximale $[0.2]$: Pente maximale.

Ces calculs ont ensuite été lancés avec **un fonction d'atténuation verticale Υ à base d'exponentiels**.

Dynamique

Ensuite, ces mêmes calculs ont été lancés avec un forçage **dynamique** basé sur une gaussienne décentrée.

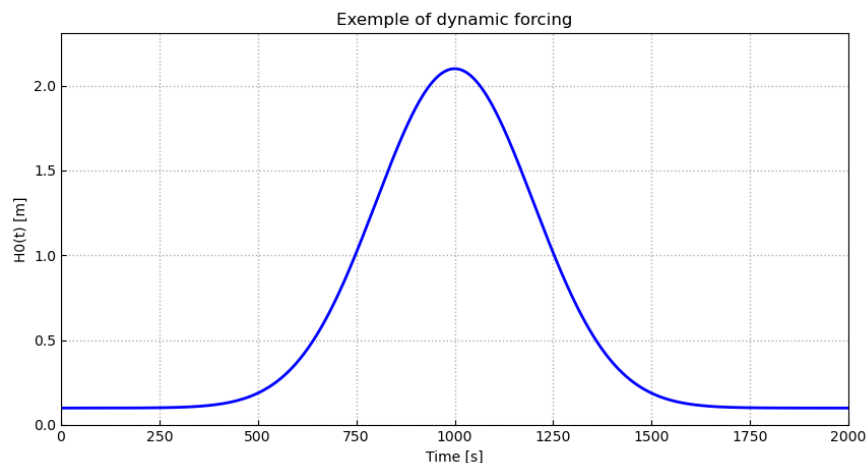


FIGURE 1 – An example of forcing $H_0(t)$

Résultats

Résultats attendus

Pour obtenir des résultats réalistes, on s'attend à avoir certaines caractéristiques à savoir :

1. Formation d'une barre au point de déferlement et le décaissement de pied de berme.
2. En stationnaire : pour une grosse houle, la barre est plus au large.
3. En stationnaire : pour une petite houle, la barre est plus au bord.
4. En dynamique : pour une grosse houle sur une barre déjà existante, elle part au large.
5. En dynamique : pour une petite houle longue sur une barre déjà existante, elle s'engraisse.

Résultats obtenus

1. Formation d'une barre au point de déferlement et le décaissement de pied de berme

Nos simulations produisent bien une barre qui se forme au point de déferlement. De plus, on a bien un décaissement de pied de berme. Par contre, ces barres ne sont pas très réalistes.

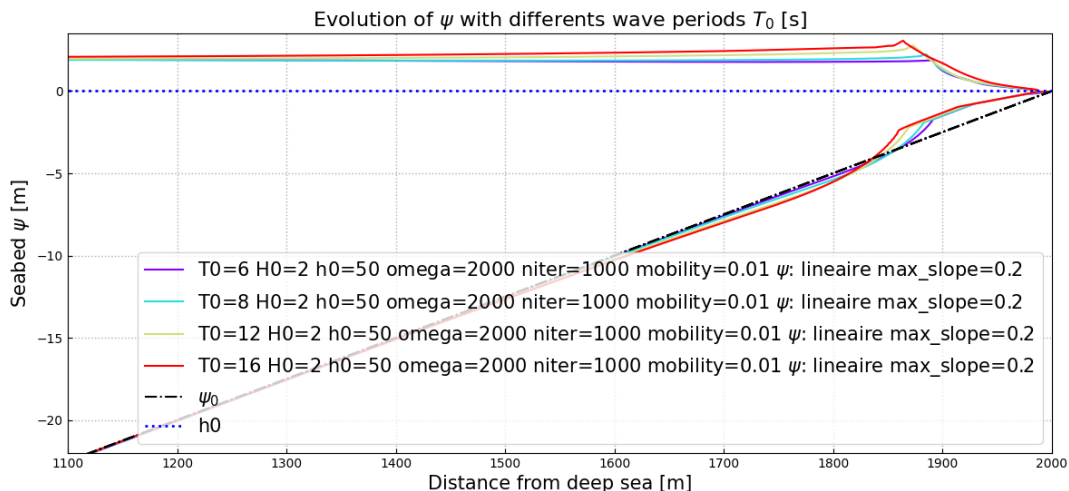


FIGURE 2 – Evolution des bathymétries en fonction de différentes périodes de vagues T_0 .

2-3. En stationnaire : pour une grosse houle, la barre est plus au large ; pour une petite houle, la barre est plus au bord

Plus on a une houle de grande taille, plus le déferlement se fait tôt et plus la barre se forme au large. Inversement, moins la houle est grande, plus tard le déferlement se fait et donc la barre se forme proche du bord.

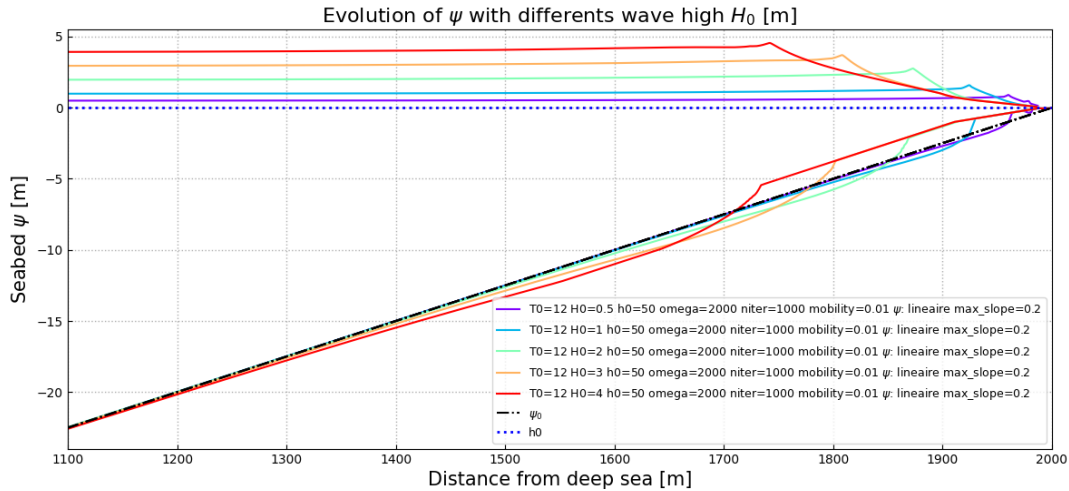


FIGURE 3 – Evolution des bathymétries en fonction de différentes hauteurs de vagues H_0 .

4. En dynamique : pour une grosse houle sur une barre déjà existante, elle part au large

Lors de grosses houles : par exemple dans des événements de tempêtes, on remarque que les barres se déplacent vers le large. Dans notre simulation ci-dessous, celles-ci s'affaissent juste sans se déplacer.

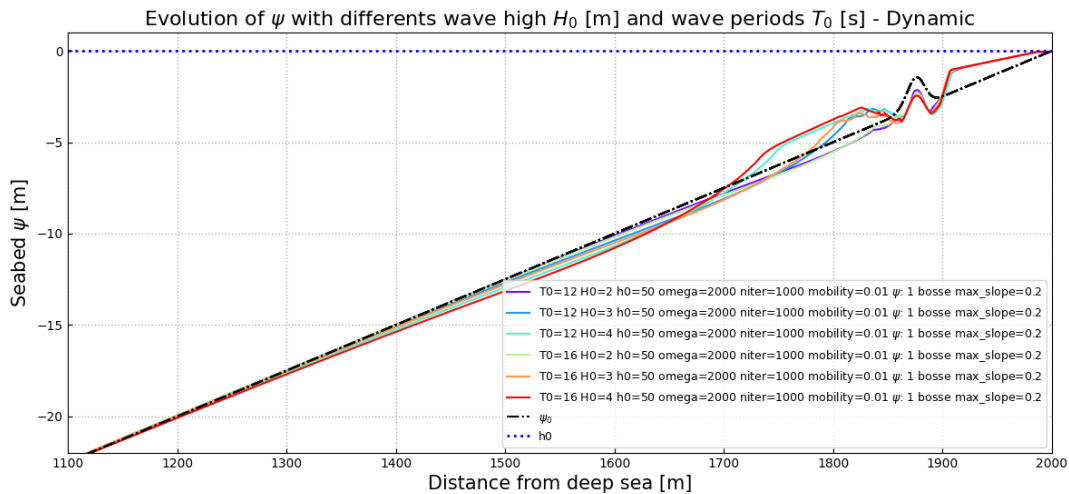


FIGURE 4 – Evolution des bathymétries en fonction de différentes hauteurs de vagues H_0 et périodes de vagues T_0 - fortes houles en dynamique.

Cependant, une barre se forme tout de même avant la petite barre.

5. En dynamique : pour une petite houle longue sur une barre déjà existante, elle s'engraisse

Lors de petites houles, on remarque que les barres grossissent en amont grâce à l'apport de sable qui se heurte à ces barres. Dans notre simulation ci-dessous, celles-ci s'affaissent juste sans grossir. Par contre, une petite accrétion se forme au niveau du bord.

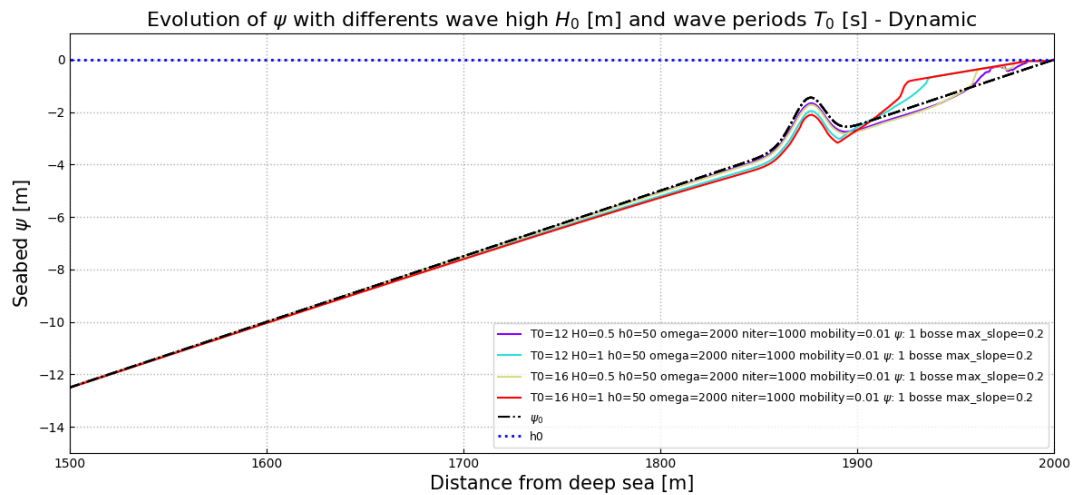


FIGURE 5 – Evolution des bathymétries en fonction de différentes hauteurs de vagues H_0 et périodes de vagues T_0 - faibles houles en dynamique.

Comparaison avec les données expérimentales LIP1B

Pour tester notre modèle OPTISWAN, on compare à des données bien connues de la littérature, à savoir LIP 1B.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



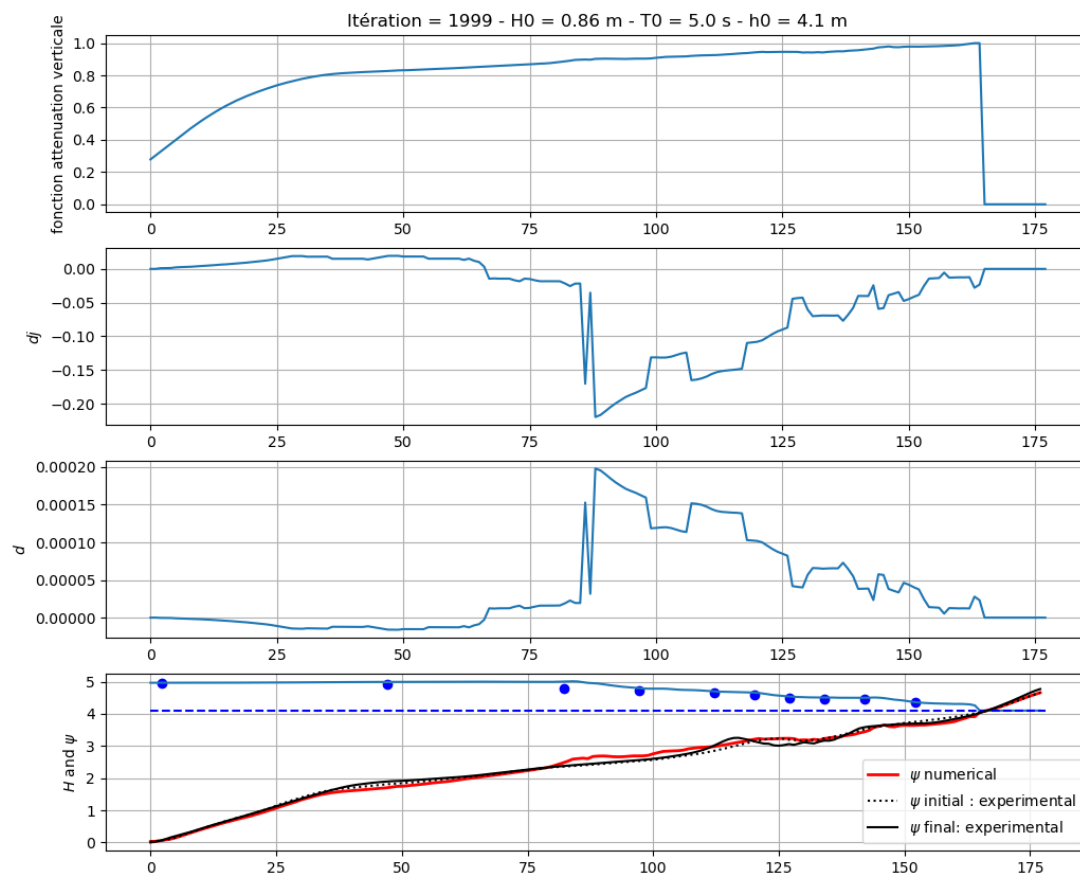


FIGURE 6 – Évolution de la bathymétrie sur la simulation LIP1B avec le modèle hydro SWAN

On remarque que la partie hydrodynamique générée par SWAN est très proche des données expérimentales (les points bleu). La morpho, elle, reste très éloignée des données expérimentales.

Également on peut tester OptiMorph avec le dernier modèle hydrodynamique (M. Dupont) : on obtient les

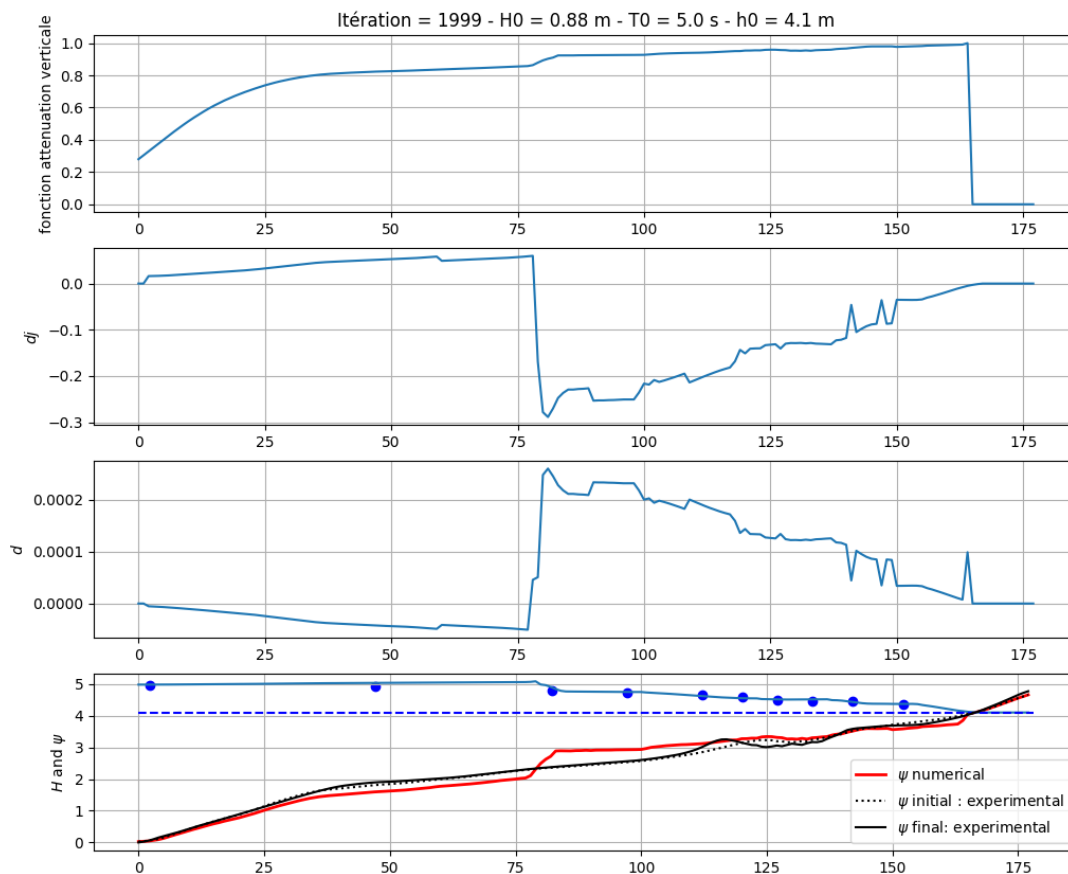


FIGURE 7 – Évolution de la bathymétrie sur la simulation LIPB avec le modèle hydro shoaling réglé par M. Dupont

De même, on remarque que l'hydrodynamique est non loin des points expérimentaux. Cependant, la morpho reste toujours très loin de la réalité.

Différentes fonctions d'excitations

Fonction Υ proposée par M. Mohammadi :

$$\Upsilon = (\cosh(kh) - 1)(1 - \exp(-50 \left(\frac{x}{n}\right)^2))$$

Ce qui nous donne pour une bathymétrie linéaire et une période de $T0 = 6 s$:

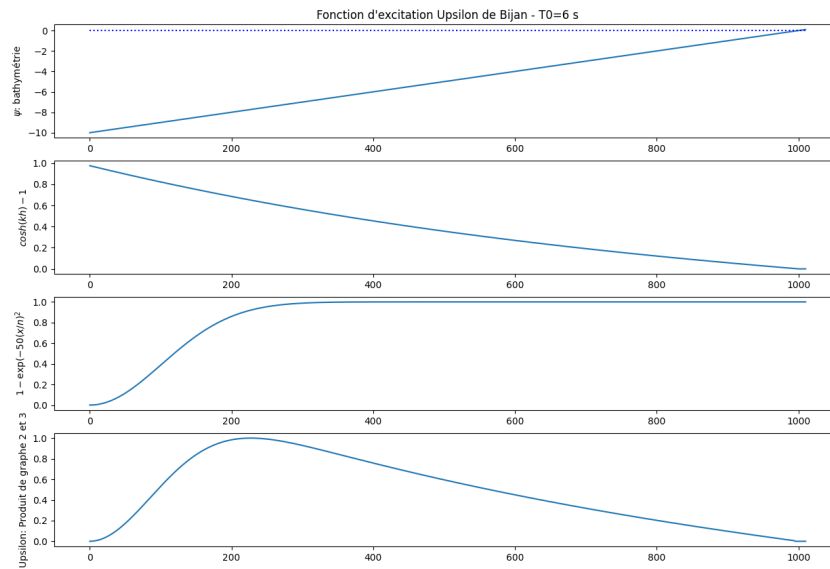


FIGURE 8 – Fonction d’excitation de M. Mohammadi avec une bathymétrie linéaire et une période de $T_0 = 6$ s

et avec une bosse :

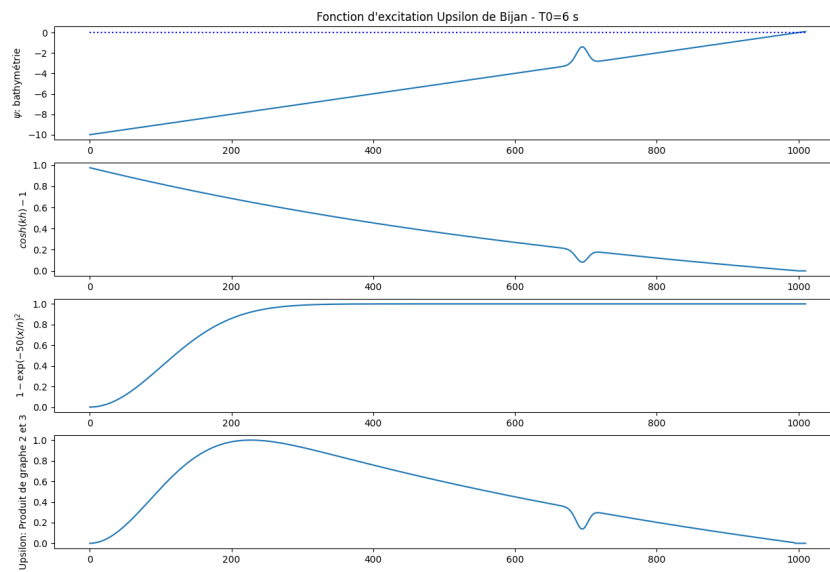


FIGURE 9 – Fonction d’excitation de M. Mohammadi avec une bathymétrie à 1 barre et une période de $T_0 = 6$ s

On remarque que l’excitation se fait dans le mauvais sens. Par exemple lorsqu’on a une barre, l’excitation du sable devient plus faible alors qu’elle devrait être plus forte.

Fonction Υ de Mme Cook :

$$\Upsilon = \frac{1}{\cosh(kh)}$$

Ce qui nous donne pour une bathymétrie linéaire et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$:

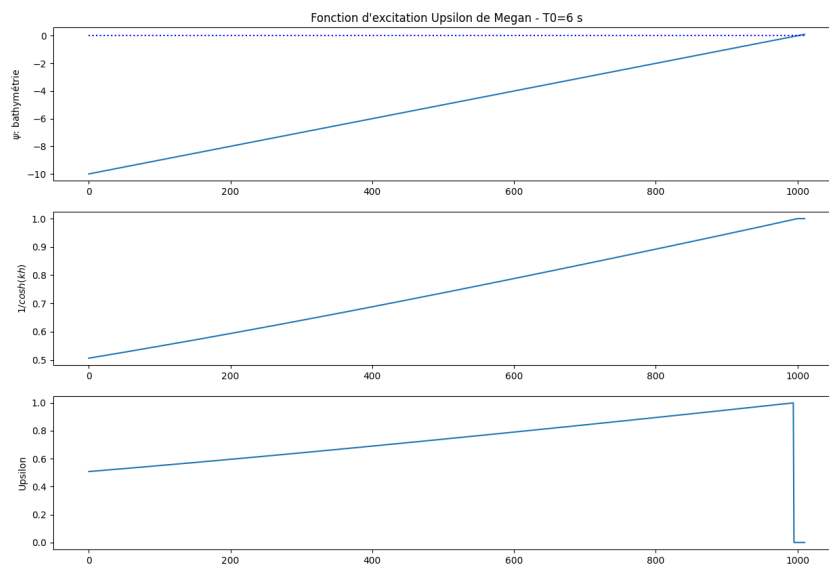


FIGURE 10 – Fonction d'excitation de Mme Cook avec une bathymétrie linéaire et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$

et avec une bosse :

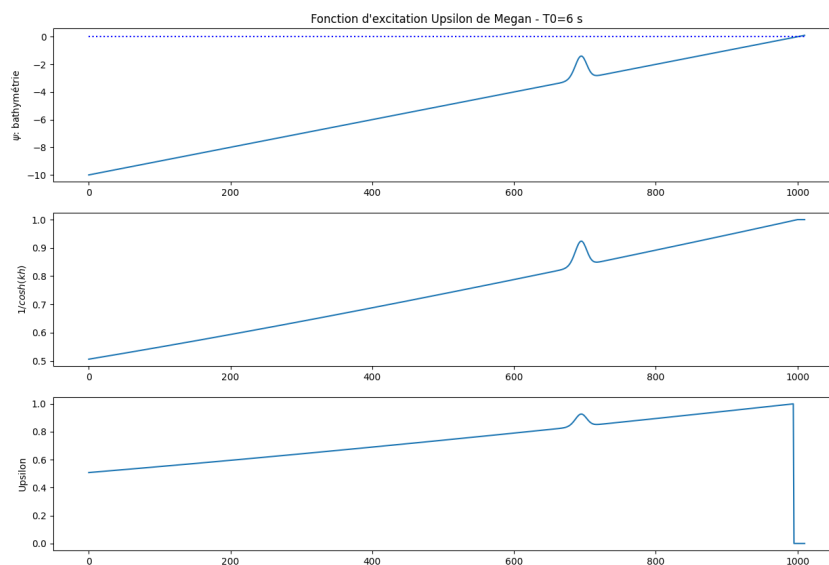


FIGURE 11 – Fonction d'excitation de Mme Cook avec une bathymétrie à 1 barre et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$

Fonction Υ de M. Dupont (inversion de celle de M. Mohammadi) :

$$\Upsilon = (\cosh(kh) - 1)(1 - \exp(-50 \left(\frac{x}{n}\right)^2) + \text{inversion des valeurs}$$

Ce qui nous donne pour une bathymétrie linéaire et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$:

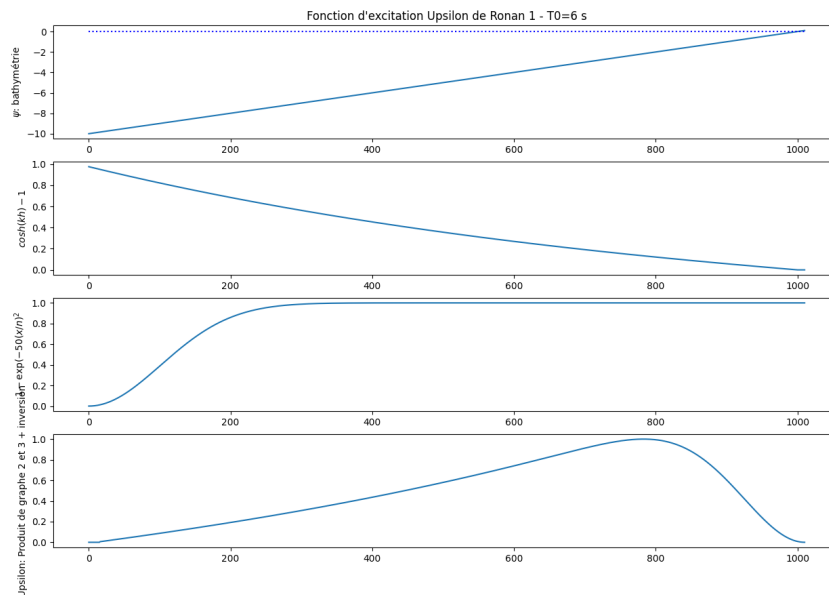


FIGURE 12 – Fonction d'excitation de Mme Cook avec une bathymétrie linéaire et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$

et avec une bosse :

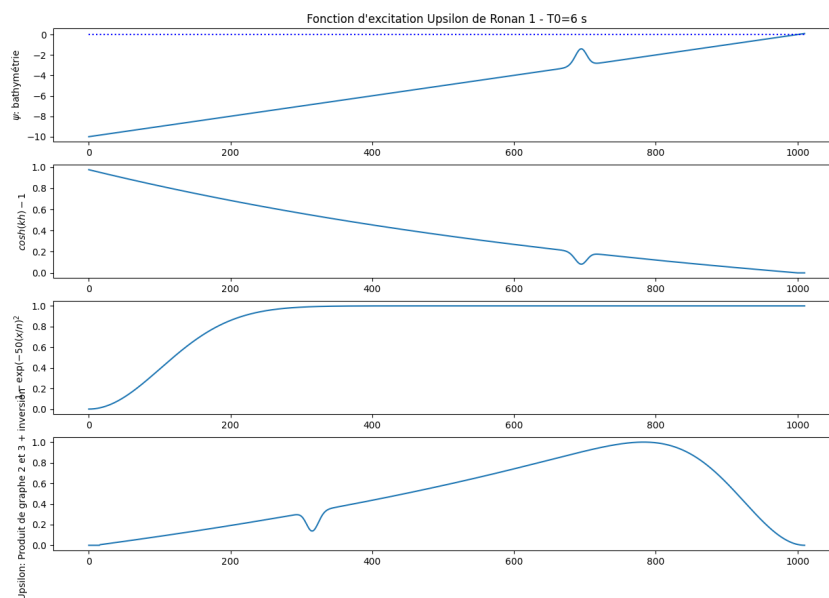


FIGURE 13 – Fonction d'excitation de Mme Cook avec une bathymétrie à 1 barre et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$

Fonction Υ de M. Dupont 2 (correction de celle de M. Mohammadi) :

$$\Upsilon = \frac{1}{\cosh(kh)} \left(1 - \exp\left(-50 \left(\frac{x}{n}\right)^2\right) \right)$$

Ce qui nous donne pour une bathymétrie linéaire et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$:

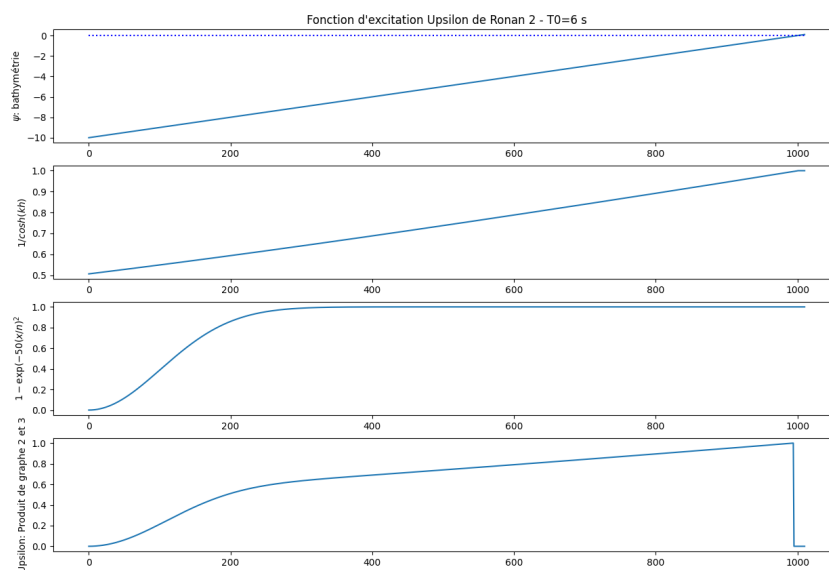


FIGURE 14 – Fonction d'excitation de Mme Cook avec une bathymétrie linéaire et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$

et avec une bosse :

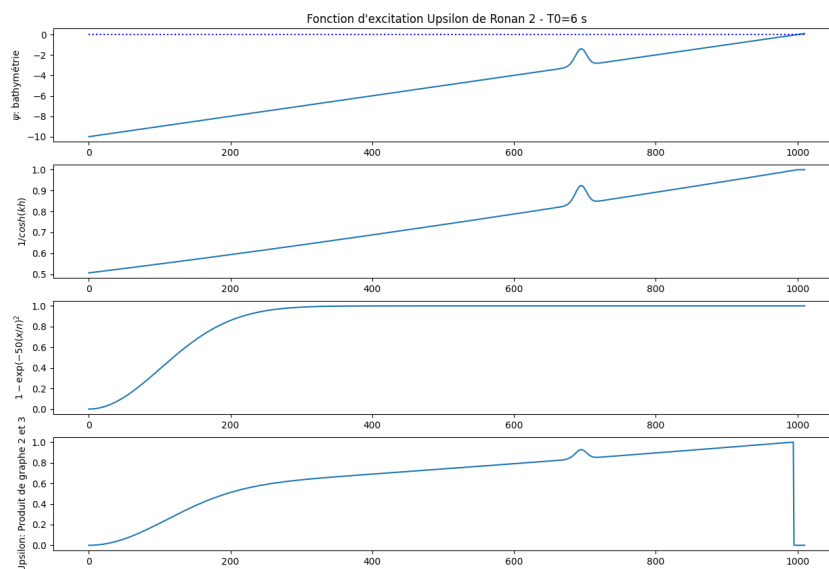


FIGURE 15 – Fonction d'excitation de Mme Cook avec une bathymétrie à 1 barre et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$

Superposition de toutes ces fonctions d'atténuations

Ce qui nous donne pour une bathymétrie linéaire et une période de $T_0 = 6 \text{ s}$:

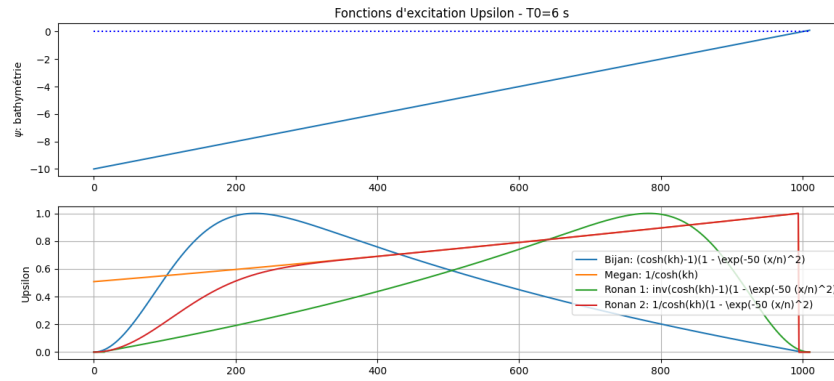


FIGURE 16 – Toutes les fonction d'excitation avec une bathymétrie linéaire et une période de $T_0 = 6$ s

et avec une bosse :

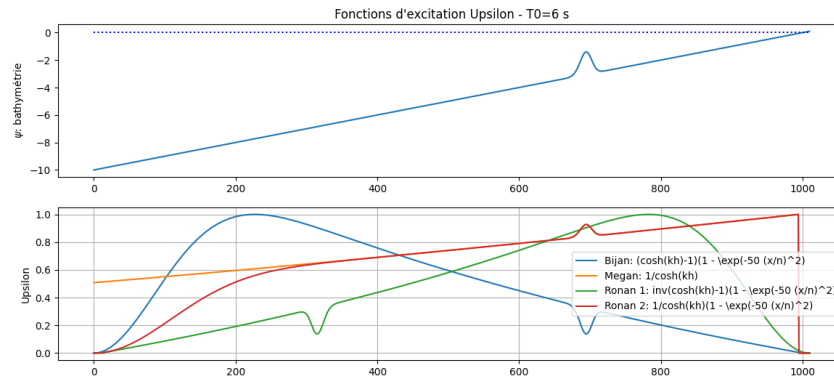
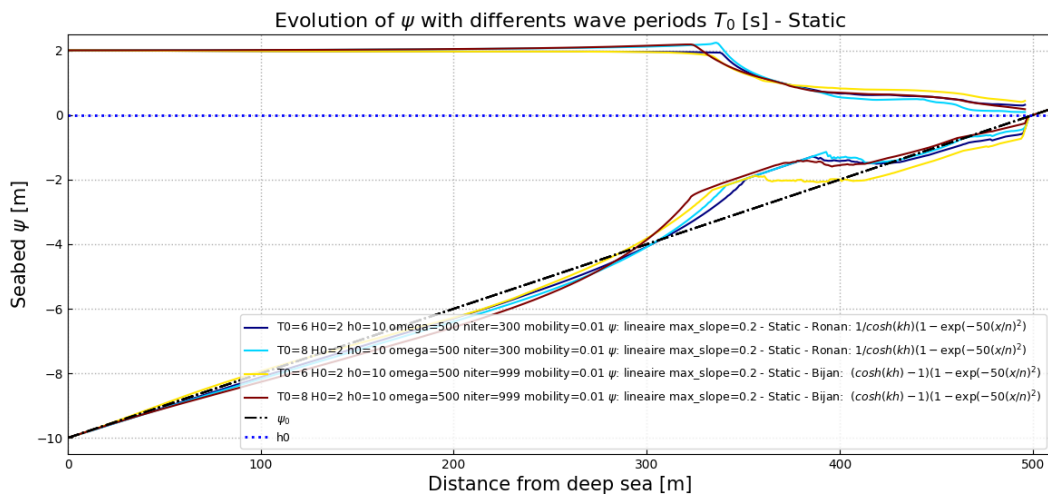
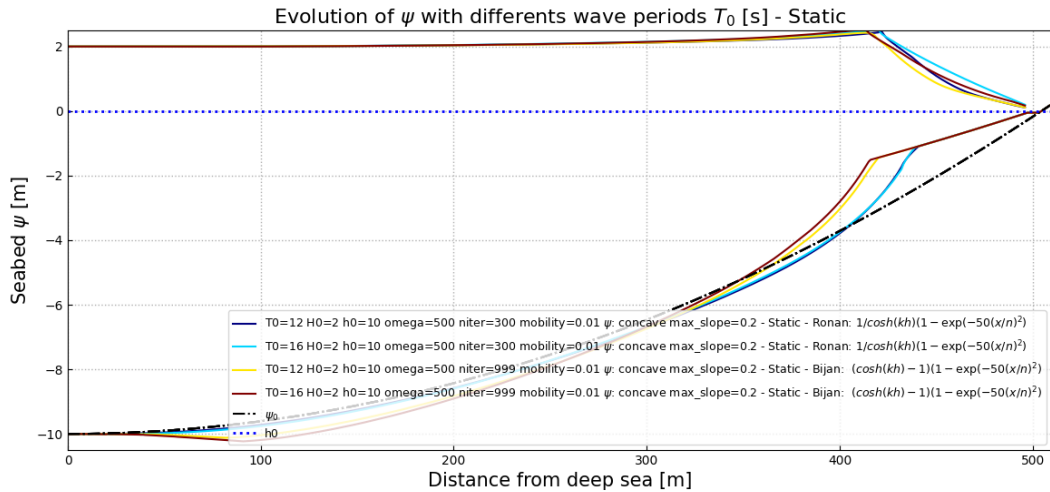
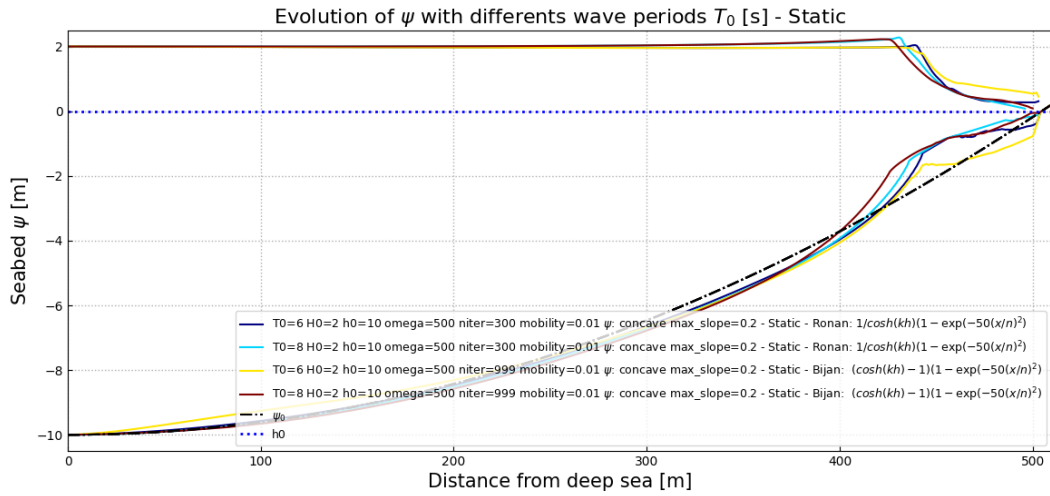
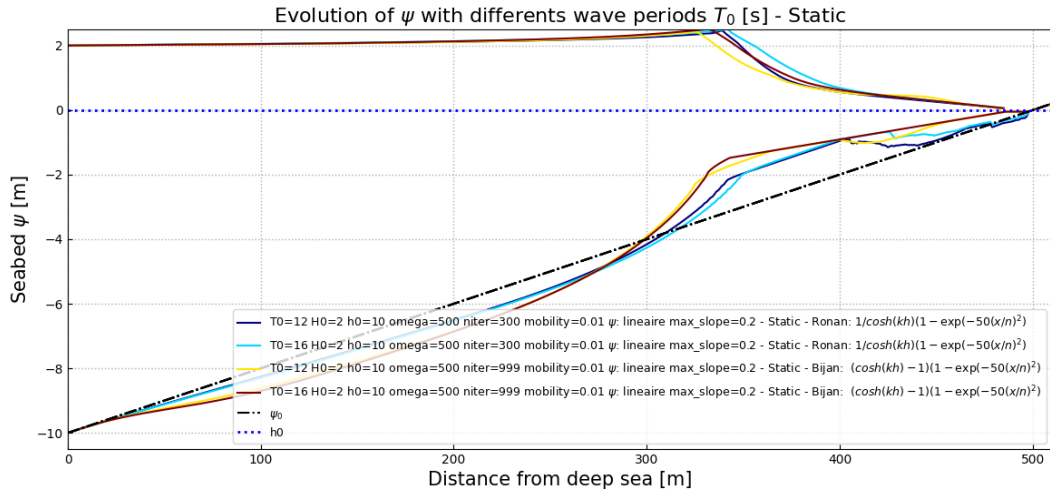
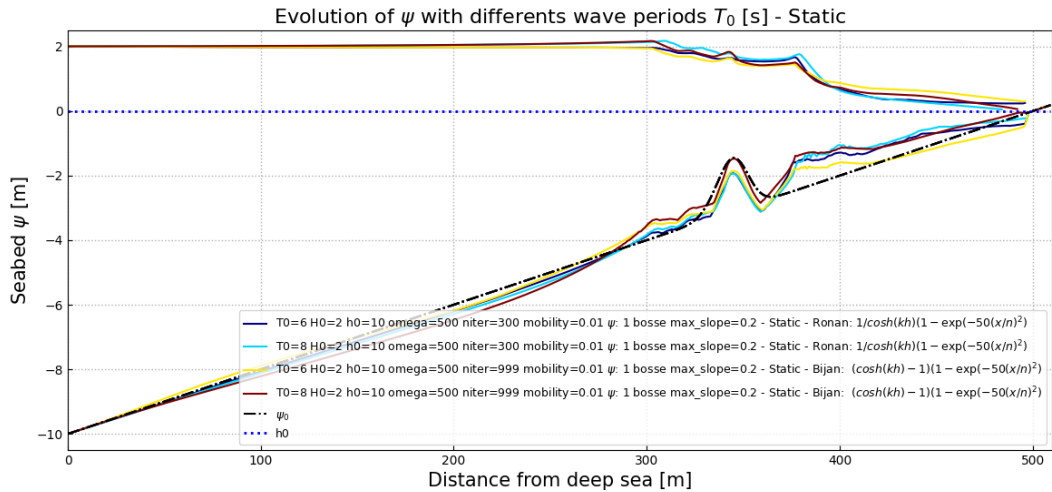
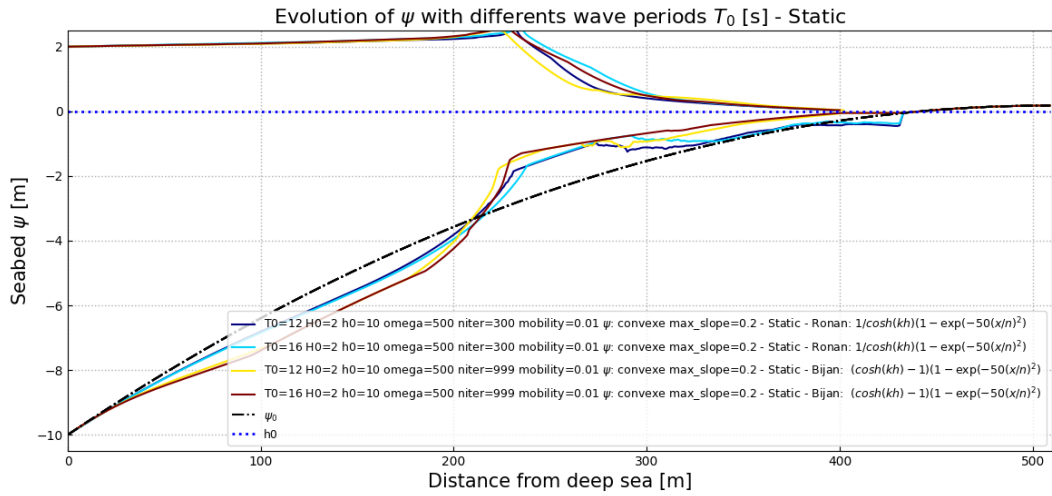
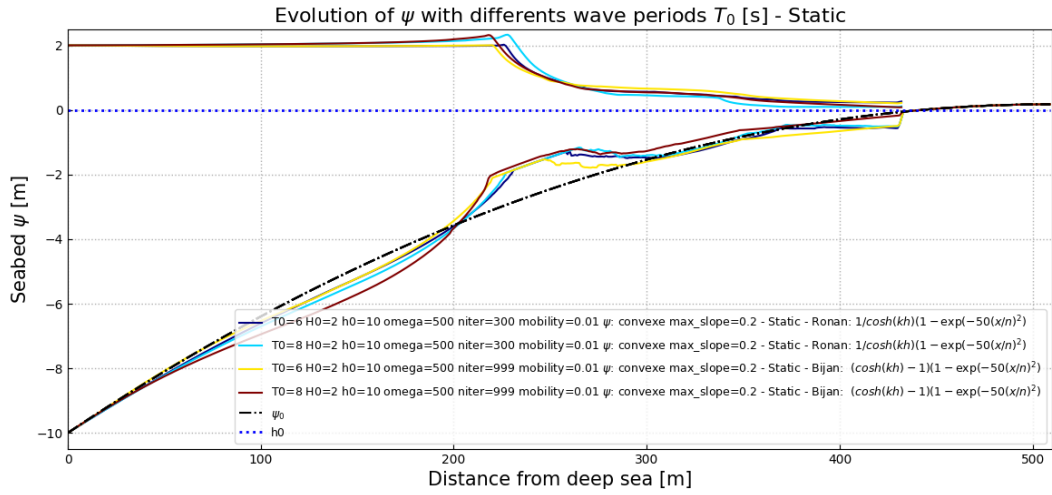


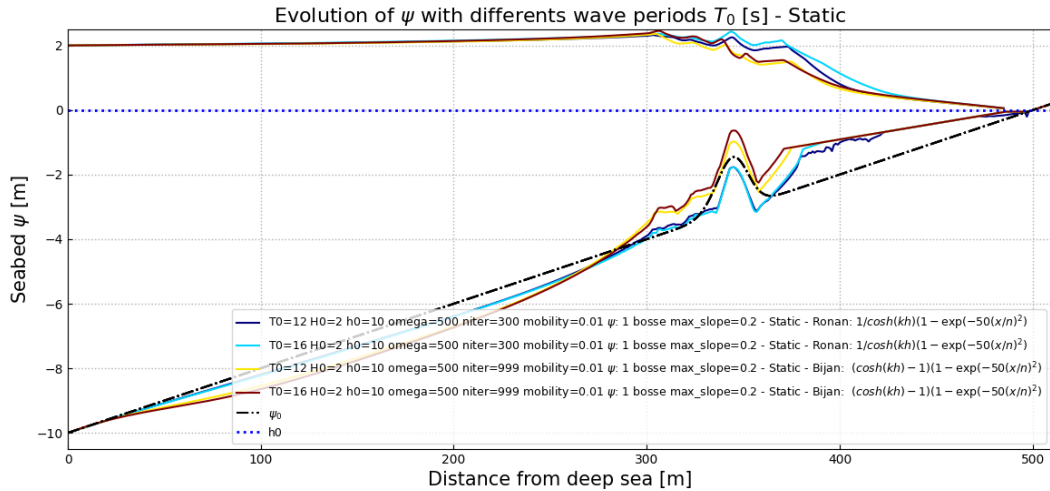
FIGURE 17 – Toutes les fonctions d'excitation avec une bathymétrie à 1 bosse et une période de $T_0 = 6$ s

Quelques résultats réalistes









Discussion

Au vu des résultats présentés précédemment, on observe que les résultats obtenus ne sont pas exactement les résultats que nous attendions. En effet, il semble que les déplacements morphodynamiques sur les barres existantes ne sont pas ceux que nous souhaitons. Pour cause, on peut dégager les hypothèses suivantes :

- Notre modèle manque d'une physique : par exemple un courant, une vorticité qui pourrait justifier que nos barres ne se déplacent pas, même en fortes conditions
- Certains termes de notre équation de descente nécessitent toujours d'être fixés au vu des disparités des résultats. En effet, la fonction d'atténuation verticale Υ peut produire des résultats morpho sensiblement différents en fonction de son implémentation (Cf : compte-rendu précédent).

Quelques idées en vrac pour obtenir des résultats plus proches de la réalité :

- Transformer le problème 1D en 2Dv et ajouter un transport selon le courant ? L'inconvénient d'ajouter un transport en 1D est que cela déplace toute la colonne entière de sable.

Compte rendu scientifique

Semaine 63 : 23/01/23-27/01/23

Les travaux de cette semaine se sont principalement concentrés sur **la contrainte sableuse, le couplage de OPTIMORPH avec SWAN**. SWAN est un code de calcul à résolution de phase qui permet de sortir directement un $H_s(x)$ ainsi qu'un $Tm01(x)$.

Contrainte sableuse par projection

Grâce aux développements mathématiques de M. Mohammadi, la contrainte de conservation sableuse fonctionne à la perfection. Il y a conservation du sable au cours du temps.

Tests avec le modèle hydrodynamique de M. Dupont + contrainte sableuse par projection

Différents résultats

Différents tests ont été effectués avec ce modèle morpho plus robuste. Pour une simulation à $T_0 = 6$ s, on obtient les résultats suivants :

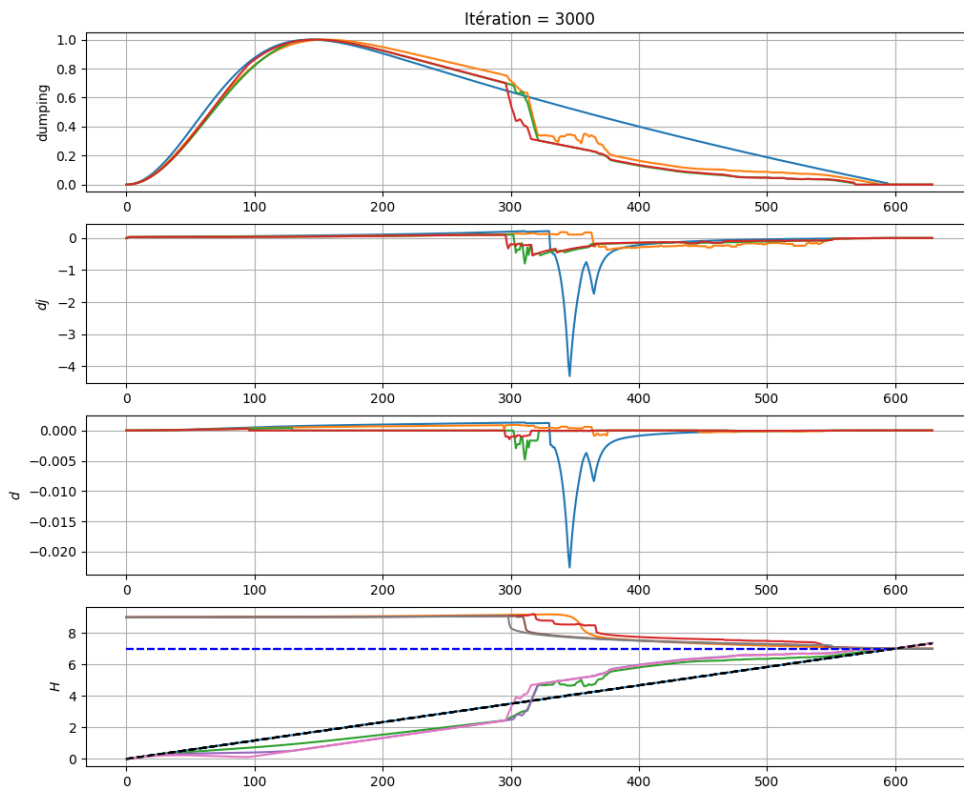


FIGURE 18 – Différentes itérations pour période $T_0 = 6$

on remarque que la fonction d'atténuation verticale "ne pic" pas au bon endroit. En changeant cela, on obtient la figure suivante :

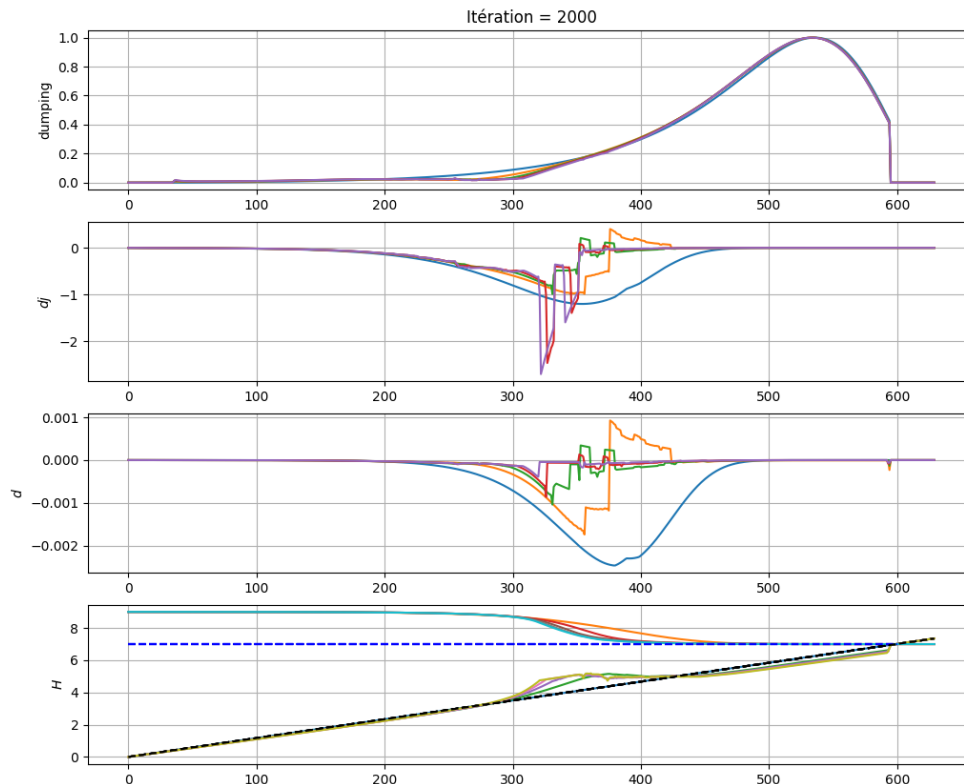


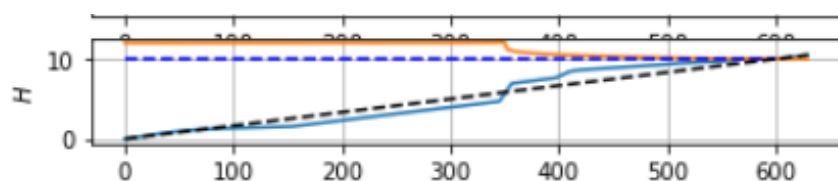
FIGURE 19 – Différentes itérations pour période $T_0 = 6$

Cette bathymétrie de sortie est beaucoup plus réaliste. La fonction d'atténuation joue donc un rôle majeur dans la forme de la bathymétrie finale.

Vers une solution stable avec plusieurs types de fonctionnelles

En gardant ce même modèle hydrodynamique, on essaie de lancer des calculs sur un grand nombre d'itérations (10 000) avec différentes fonctionnelles :

$$\mathcal{J} = H^2 :$$



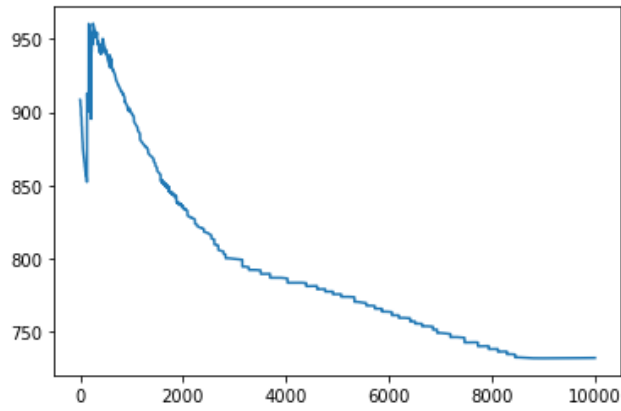


FIGURE 20 – Historique de J au fil des itérations

$$\mathcal{J} = H^2 H_x^2 :$$

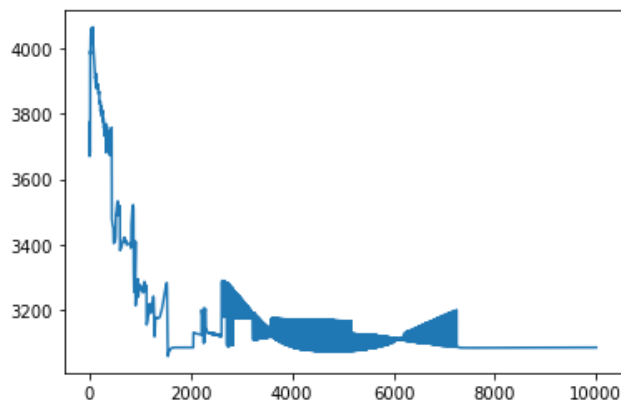
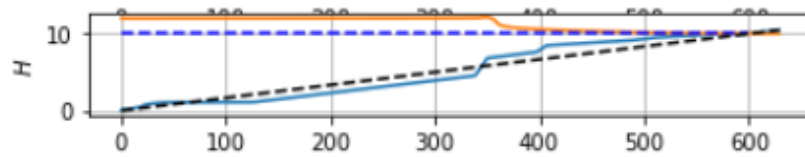
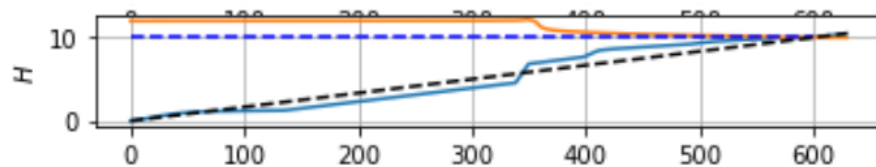


FIGURE 21 – Historique de J au fil des itérations

$$\mathcal{J} = H^2 + H_x^2 :$$



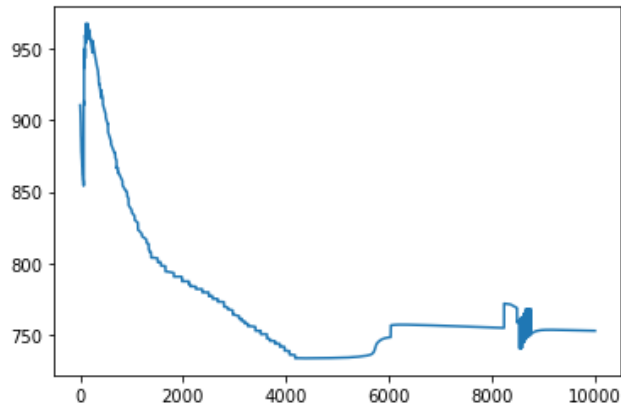


FIGURE 22 – Historique de J au fil des itérations

On remarque que les 3 cas semblent tendre vers une solution stable identique.

Couplage OPTIMORPH + SWAN

Le couplage OPTIMORPH s'effectue. Les grandeurs de SWAN qui sont insufflées dans OPTIMORPH sont les suivantes :

- H_s
- $Tm0(x)$ puis calcul de $k(x)$ à partir de cette valeur.

Test à une période de vague variable sur le domaine

On regarde dans un premier temps s'il y a un changement significatif entre le fait d'avoir $Tm01 = CTE$ ou $Tm01(x)$ variable.

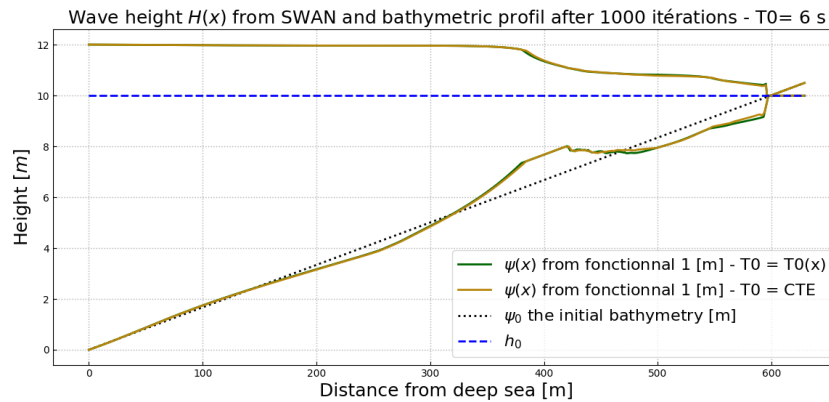


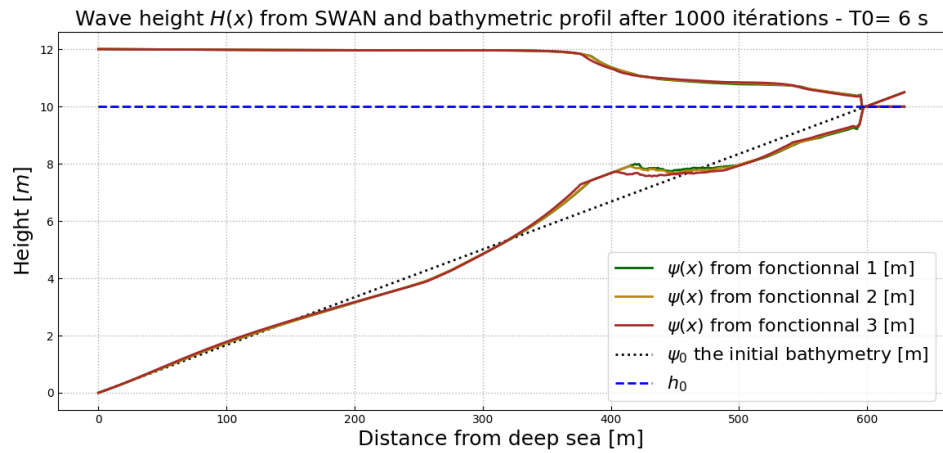
FIGURE 23 – Différents résultats avec $Tm01 = CTE$ ou $Tm01(x)$ variable.

Test avec différentes manières de calculer $J = H^2$

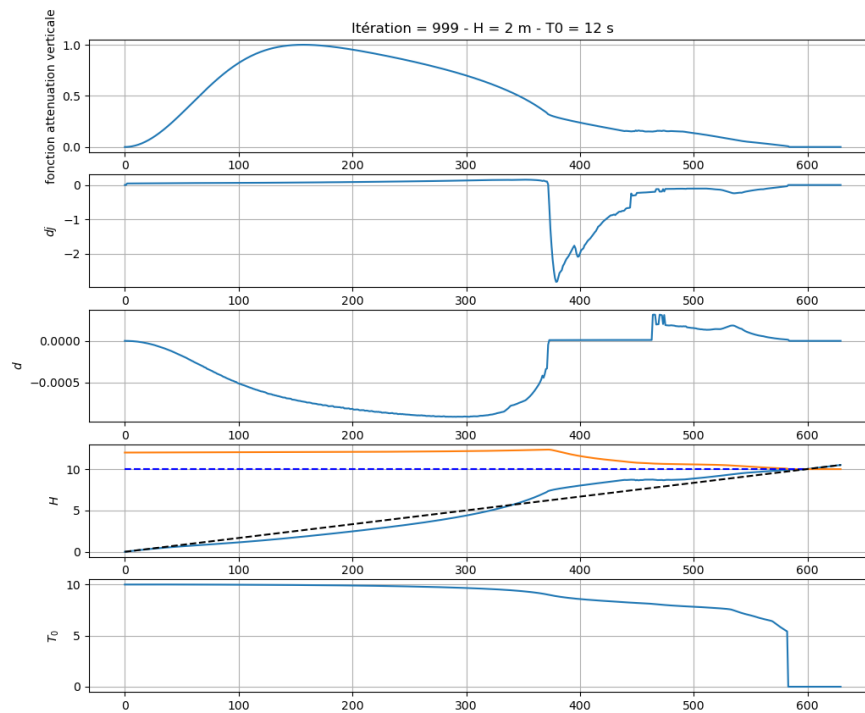
On peut maintenant essayer de calculer \mathcal{J} avec 3 manières numériques différentes :

- $\mathcal{J} = H_\psi H$
- $\mathcal{J} = \frac{1}{2}(H^2)_\psi$
- $\mathcal{J} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(H^2)_\psi + H_\psi H \right)$

et on obtient la figure suivante :



Différents résultats



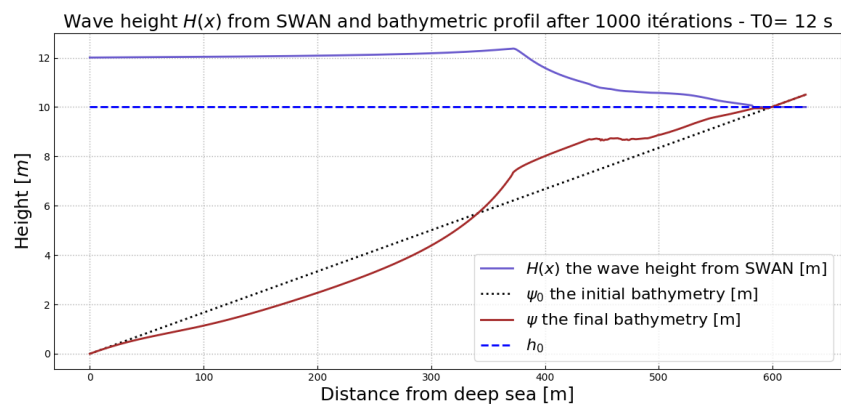
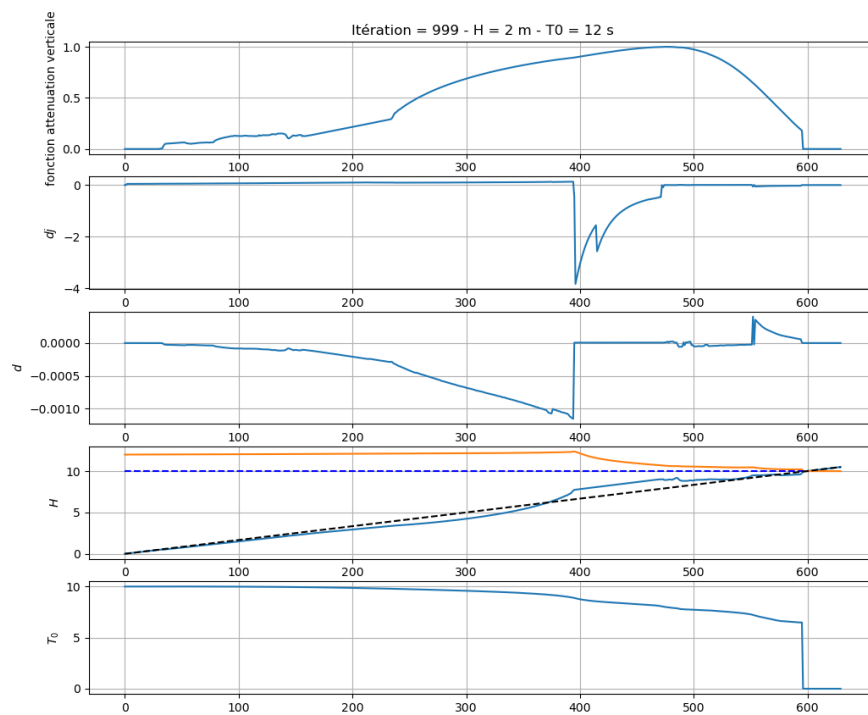


FIGURE 24 – Période de vague à $T_0 = 12$ s



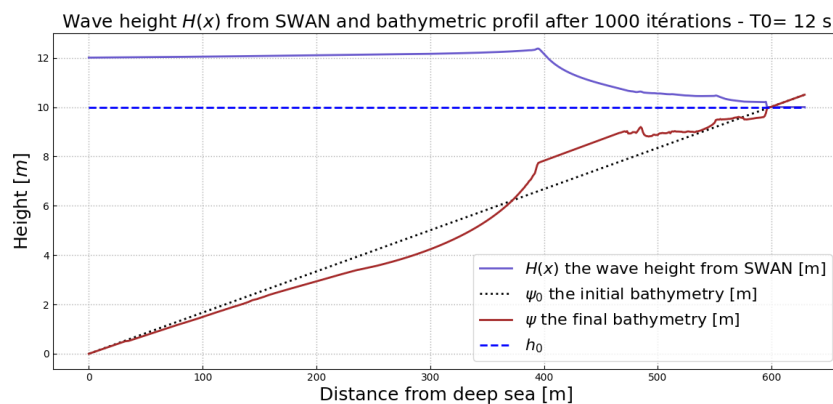
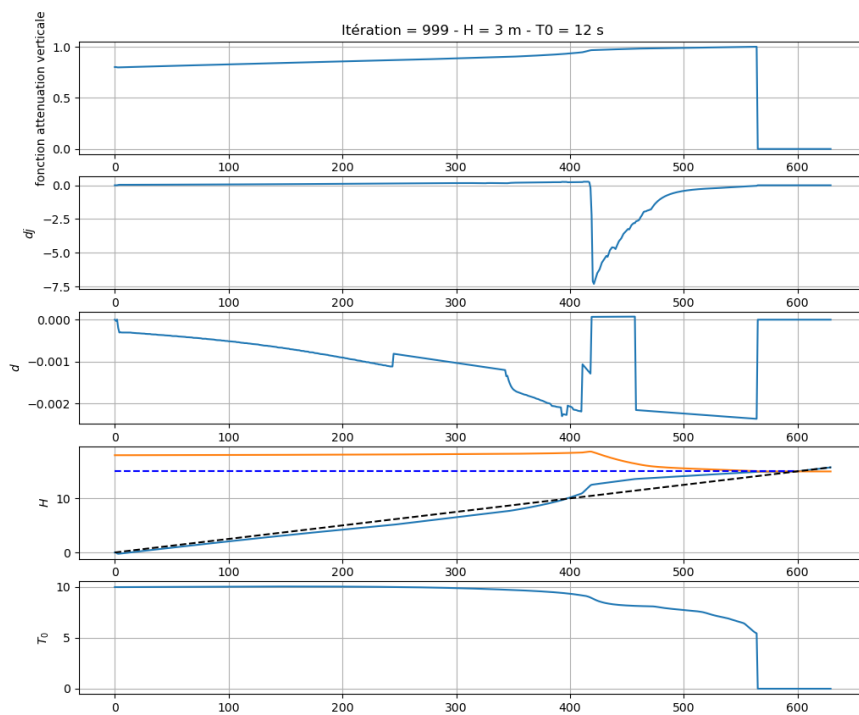


FIGURE 25 – Période de vague à $T_0 = 12$ s avec atténuation de vague plus réaliste

En augmentant la période de vague, on remarque que les résultats sont "moins jolis" étant donné que la simulation est plus morphogène. Encore une fois, on voit l'intérêt de bien calibrer la fonction d'atténuation verticale.



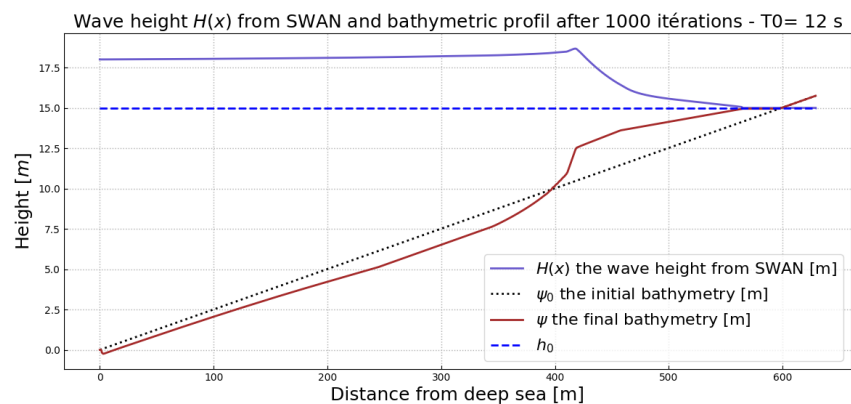
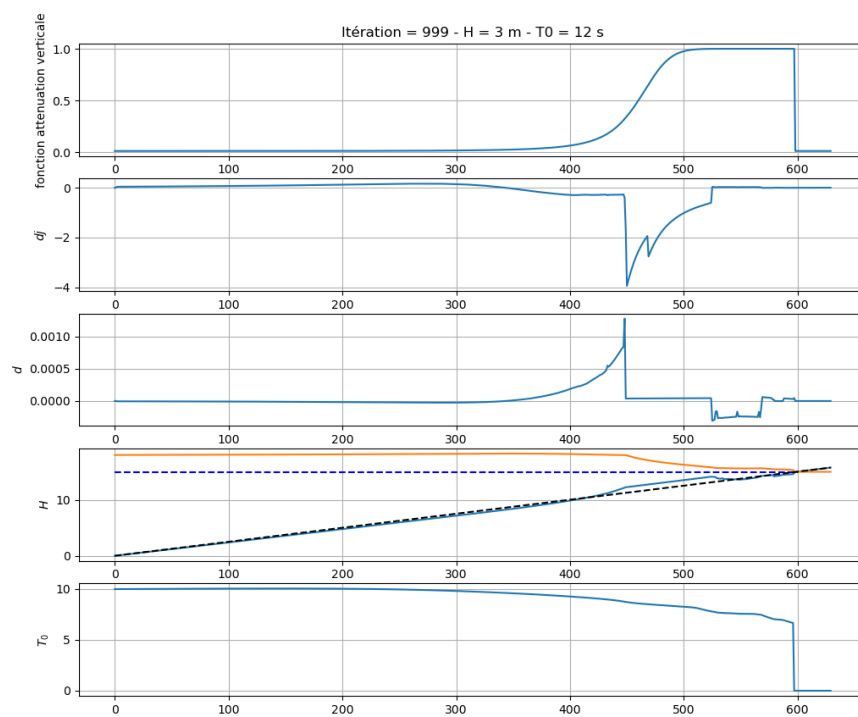


FIGURE 26 – Période de vague à $T_0 = 12$ s avec la fonction d'atténuation de base Cf Mégan : $1/\cosh(kh)$



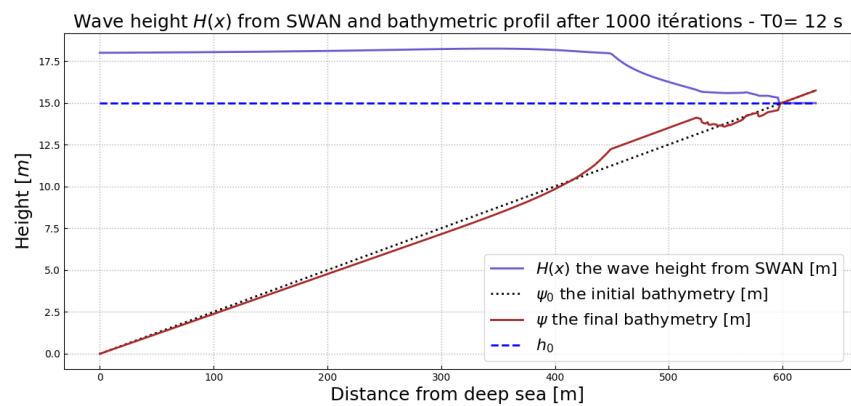


FIGURE 27 – Période de vague à $T_0 = 12$ s avec atténuation de vague plus réaliste

Compte rendu scientifique

Semaine 61-62 : 09/01/23-20/01/23

China Ocean Engineering

Toujours en attente de reviewer.

Cours HAT002T

Les 12h ont été données sur les TP suivants :

- Séries temporelles synthétiques
- Volumes finis appliqués à Saint-Venant
- Approfondissement + modèle hydro simple : shoaling.

Les supports sont trouvables sur le lien ci-dessous :

<https://fr.overleaf.com/read/yvcnyrnnvyvf>



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Travaux avant les vacances de Noël

Voir S57.

Tests de M. Mohammadi : fonction plus robuste pour calculer H_ψ via Hadamard

Les tests de M. Mohammadi ont montrés que dans certains cas, où la pente de ψ était très faible (ordre de grandeur $1e-8$), la fonction qui calcul la dérivée via Hadamard n'arrivait plus à effectuer ces calculs correctement. Les essais ont été effectués sur des fonctions définies qui permettent d'obtenir un résultat analytique. Par exemple, avec une pente de 0, on obtient le résultat suivant :

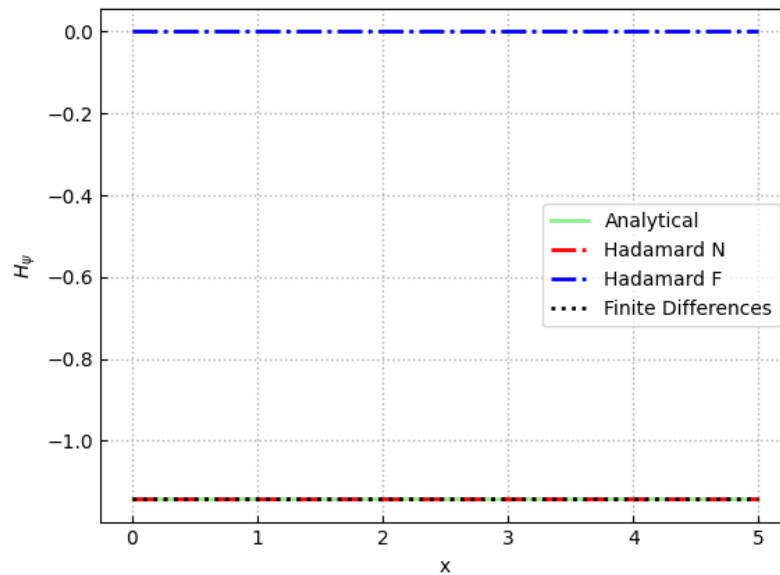


FIGURE 28 – Résultats des différentes fonctions de Hadamard pour une pente nulle

```
def Dif_finite(psi, H1):
    Hp = interpolate.interpld(psi, H1)
    epsdf=1.e-4
    H_psi_dif = zeros(len(H1))
    H_psi_dif[-1]= (Hp(psi[-1])-Hp(psi[-1]-epsdf))
    H_psi_dif[0]=(Hp(psi[0]+epsdf)-Hp(psi[0]))
    for i in range(1,len(psi)-1):
        if psi[i]+epsdf>max(psi):
            H_psi_dif[i] = (Hp(psi[i])-Hp(psi[i]-epsdf))
        elif psi[i]-epsdf<min(psi):
            H_psi_dif[i] = (Hp(psi[i]+epsdf)-Hp(psi[i]))
        else:
            H_psi_dif[i] = (Hp(psi[i]+epsdf)-Hp(psi[i]-epsdf))/2
    return H_psi_dif/epsdf

def Dif_Hadamard_NN (psi, H):
    n=np.size(H)
    dx=1
    H_psi_num=np.zeros(n)
```

```

epsL=1.e-30
epsdf=1.e-4
finite_index = []
for i in range(1,n-1):
    dH = (H[i+1]-H[i-1])
    dy = (psi[i+1]-psi[i-1])
    t_x = dx / (dx**2+dy**2)**0.5
    t_y = dy / (dx**2+dy**2)**0.5
    n_x = - t_y
    n_y = t_x

    dHdx=dH/dx
    if(abs(dy)>epsL):
        dHdy=dH/dy
    elif (abs(dy)<=epsL):
        print(i,dy,"degrade to finite differences calling hydro(psi+eps)")
    finite_index.append(i)
    dHdy = 0

H_psi_num[i] = dHdx * n_x + dHdy * n_y

if finite_index!=[]:
    for i in finite_index:
        dH = (H[i+1]-H[i-1])
        dy = (psi[i+1]-psi[i-1])
        t_x = dx / (dx**2+dy**2)**0.5
        t_y = dy / (dx**2+dy**2)**0.5
        n_x = - t_y
        n_y = t_x
        dHdx=dH/dx
        Df = Dif_finite(psi, H)
        H_psi_num[i] = dHdx * n_x + Df[i] * n_y

H_psi_num[0] = 2*H_psi_num[1] - H_psi_num[2]
H_psi_num[n-1] = 2*H_psi_num[n-2] - H_psi_num[n-3]

# return lim_pente(H_psi_num)
return H_psi_num

```

cette fonction a ensuite été implémentée dans une boucle itérative de descente en ajoutant des perturbations pour voir la robustesse de la fonction.

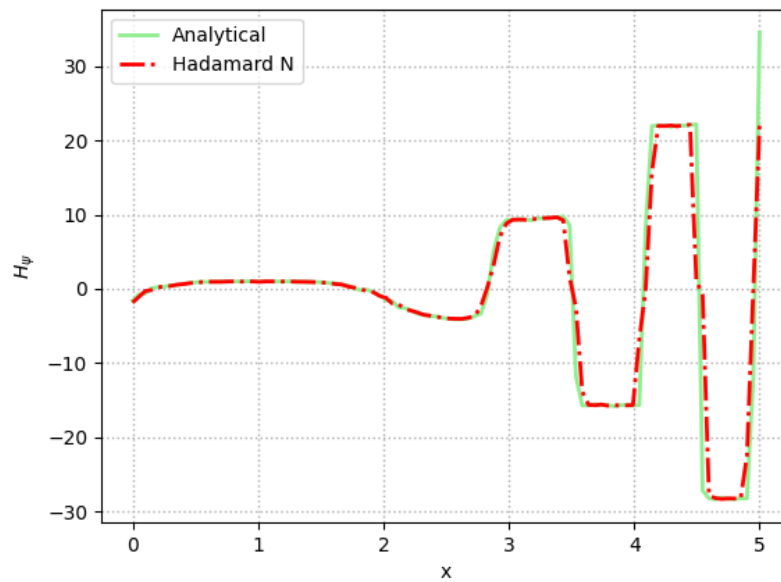


FIGURE 29 – Résultat de la fonctions Hadamard de M. Mohammadi pour une descente de 100 itérations avec des perturbations

Les résultats de descente sont très similaires aux résultats analytiques. Les différences entre ce programme et celui qui est implémenté dans Optimorph sont :

- La fonction hydro dans ce programme est définie de manière analytique
- Le calcul de différences finis est également fait de manière analytique via la fonction hydro.

Il nous convient donc de remplacer ces 2 points par :

- L'hydrodynamique de Optimorph
- Un calcul de différences finis en utilisant une interpolation de H sur ψ .

Une fois ces deux points remplacés, on obtient un "MINI OPTIMORPH" qui est lancé **SANS CONTRAINTES / PROJEC-TIONS**. Celui-ci explose quand lorsqu'on arrive vers des pentes de ψ négatives :

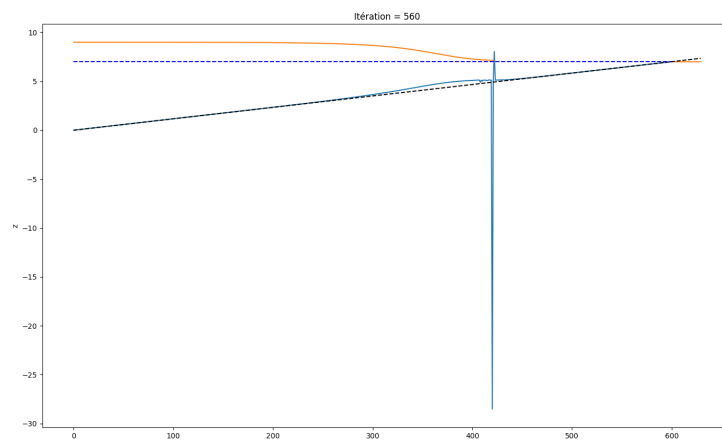


FIGURE 30 – Résultat de la descente avec Hadamard sur un Optimorph sans contraintes

mais une fois qu'on ajoute un limiteur en sortie de Hadamard sur H_{ψ} , on obtient un résultat perturbé qui pourtant n'explose pas :

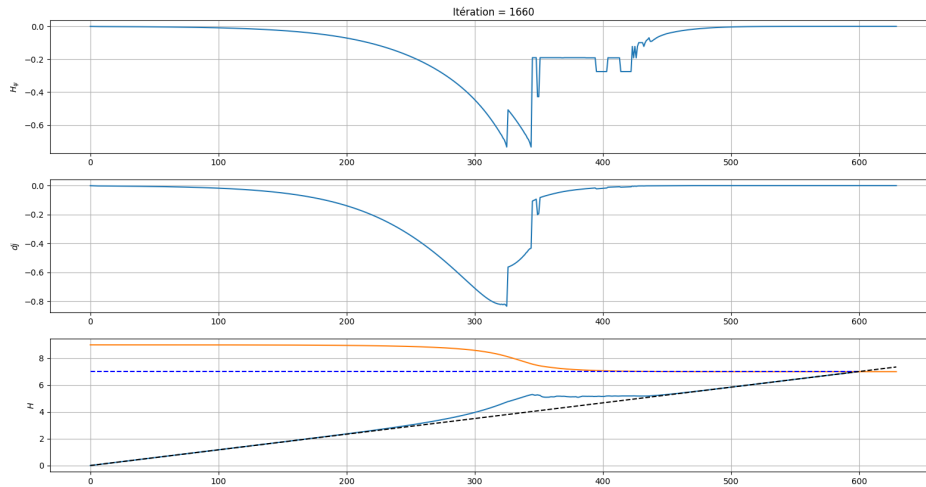


FIGURE 31 – Résultat de la descente avec Hadamard sur un Optimorph sans contraintes + limiteur

Une étape un peu brutale serait de directement remplacer fonction de Hadamard qui a servi aux travaux de la S57 par la nouvelle. En effectuant ceci, on obtient le résultat suivant :

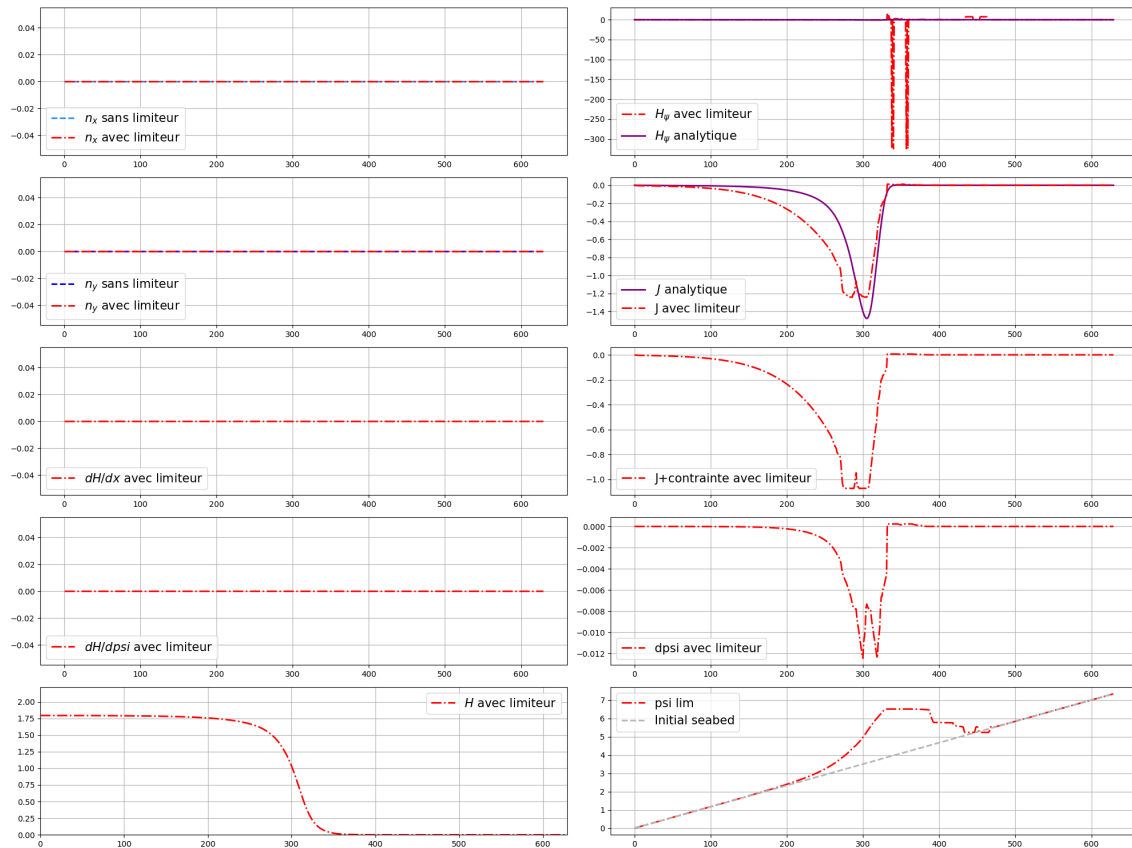


FIGURE 32 – Résultat de la descente avec Hadamard sur un Optimorph AVEC contraintes + limiteur

Etrangement, le flag de pente à $1e-30$ s'active dans cette fonction et les calculs deviennent vite très longs. De plus, le morpho se retrouve comme enfermée dans une pente à 0 sur une certaine plage donnée. Il nous convient donc de :

- Travailler directement sur la version "MINI OPTIMORPH" pour implémenter les contraintes une par une et voir les "bugs" associés.

Tests de robustesse du modèle avec perturbations sur H

Pour tester la robustesse de notre modèle, on essaie d'ajouter des perturbations sur H . Le calcul semble bien se dérouler comme on peut voir sur la figure ci-dessous :

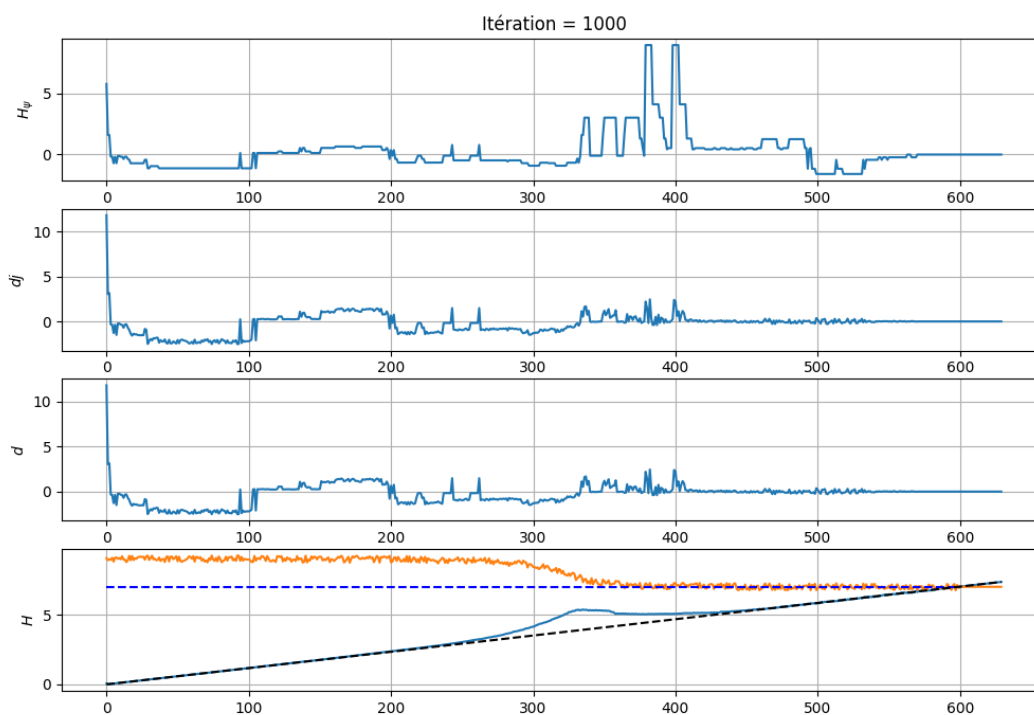


FIGURE 33 – Résultat de la descente avec Hadamard sur un Optimorph SANS contraintes + PERTURBATIONS

Ceci est encourageant mais on observe qu'il subsiste quelques soucis. Comme aucune contrainte n'est implémentée, on observe que la conservation sableuse ne se réalise pas. On a un ajout de sable de l'ordre de 105%.

Ajout des contraintes dans le MINI-OPTIMORPH

Contrainte de pente

On ajoute simplement la fonction de contrainte de pente. Aucun soucis. RAS.

Contrainte sableuse

Dans le code de Mégan, cette contrainte était présente à deux endroits :

- en projections
- en pénalisation

on ajoute dans un premier temps la projection avec le procédé de Gram-Schmidt. Les résultats de cet ajout sont moindres : on a toujours une perte de sable de l'ordre de 105% pour le résultat suivant :

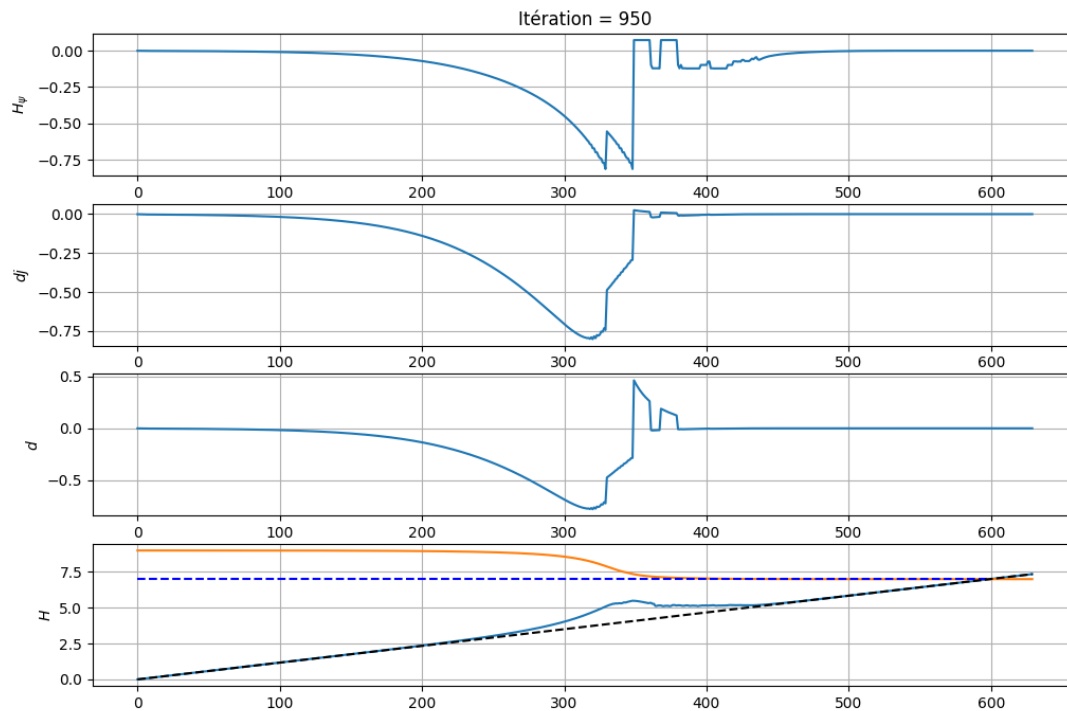


FIGURE 34 – Résultat de la descente avec Hadamard sur un Optimorph AVEC contraintes SABLEUSE

On essaie la pénalisation de Mégan : que nous avons jugés comme **fausse** :

```
if self.getC("sand") == 1:
    err = 1.00
    d = d * (1 + beta * (psi - err*psi0) / intpsi0 * dx)
```

et on obtient une conservation sableuse de l'ordre de 99.999% ainsi que le résultat suivant :

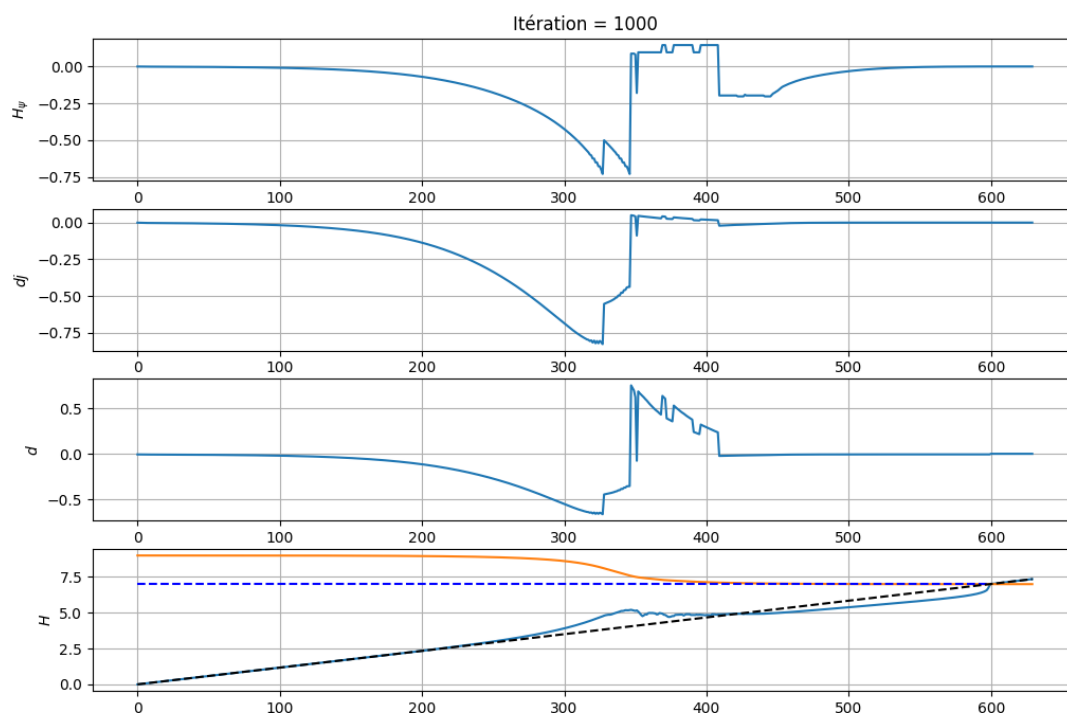


FIGURE 35 – Résultat de la descente avec Hadamard sur un Optimorph AVEC contraintes SABLEUSE

cependant, cette fausse de lévigation est créer exclusivement du fait que on ajoute à d une valeur positive sur l'ensemble du vecteur. Et comme le coefficient d'excitation est fort proche de la côté, cela creuse à ce niveau là.

Les résultats morpho en accrétion reposaient seulement sur cette pénalisation.

Debug du dernier modèle avec $T_0 > 6$

En faisant des plot successif sur le dernier modèle, on vérifie chacune des quantités et on remarque une anomalie sur le calcul de la moyenne glissante H_w :

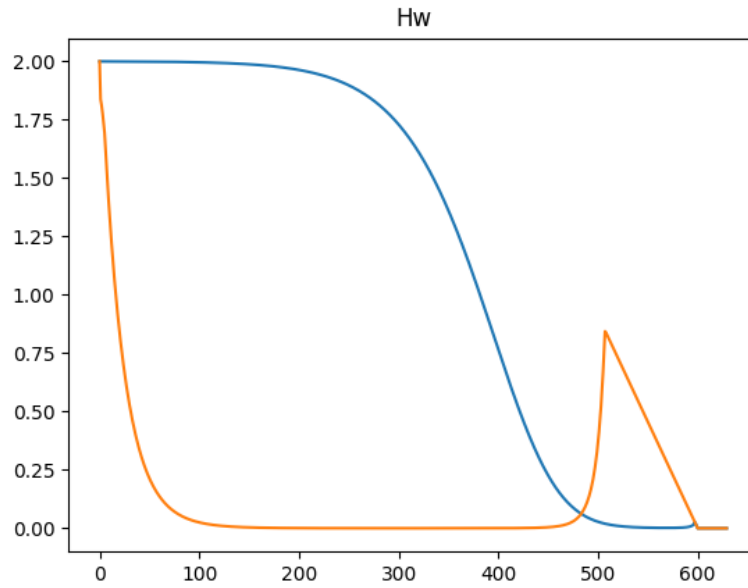


FIGURE 36 – En bleu Hw pour $T_0=2$ s et en orange pour $T_0=6$ s

Il semblerait que ce calcul de moyenne glissante ne rende pas le résultat désiré. Voir le code pour toutes les quantités successives.

En reprenant la formule de H^w :

$$H_0^w(x, t) = \frac{1}{\int_{x-X}^x w(x-y)dy} \int_{x-X}^x w(x-y)H(y)K(y)dy. \quad (1)$$

Si on simplifie avec une fenêtre de 1, on remarque qu'il y a un calcul itératif du Hw . Globalement on peut simplifier ça de la manière suivante :

$$H_0^1 = Ks^1 H_0^0$$

$$H_0^2 = Ks^1 H_0^1 = Ks^1 Ks^0 H_0^0$$

...

$$H_0^{n+1} = H_0^0 \prod_{i=0}^n Ks^i$$

or, dans le cas où $T_0 = 2$ s, le Ks ressemble à ça :

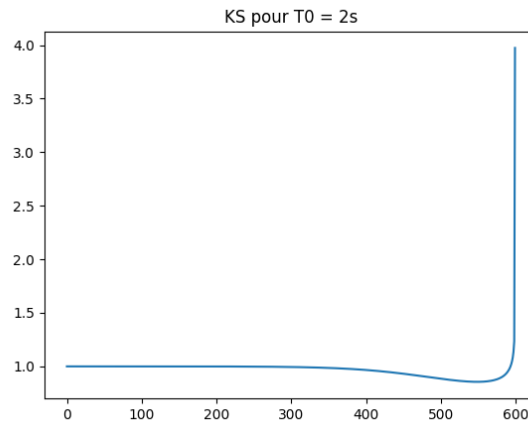


FIGURE 37 – En bleu KS pour $T_0=2$ s

et dans le cas où $T_0 = 8$ s :

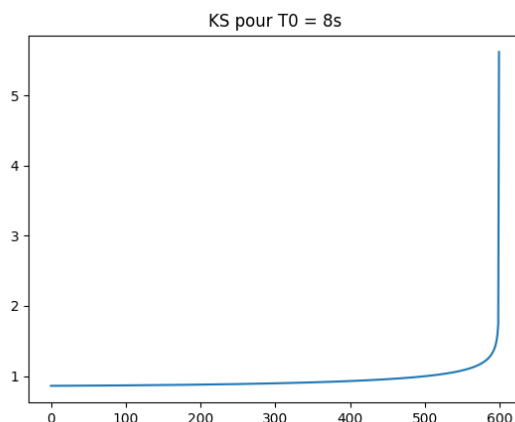


FIGURE 38 – En bleu KS pour $T_0=8$ s

on en déduit donc que très rapidement, la valeur de H se retrouve à tendre vers 0 (car on multiplie successivement $0.8 * 0.8 * 0.8 * \dots$). On suspecte donc un "bug" sur le calcul du KS . En corrigeant on obtient cet affichage :

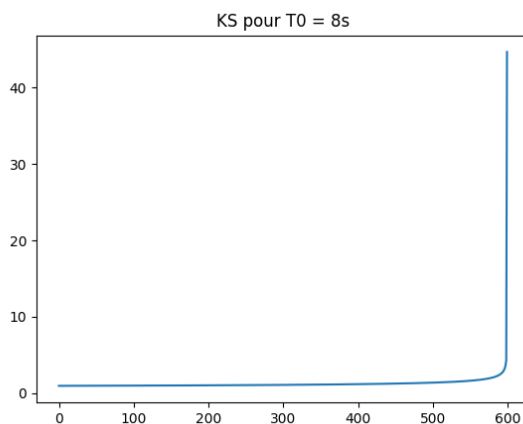


FIGURE 39 – En bleu KS pour $T_0=8$ s

cependant celui-ci se retrouve toujours à tendre très rapidement vers 0 car les premières valeurs sont les suivantes : $[0.973 \ 0.973 \ 0.973 \ 0.973 \ 0.974 \ 0.974 \ 0.974 \ 0.974 \ 0.974 \ 0.975]$. En faisant le produit de toute cette liste, on arrive très rapidement à 0 également.

Modèle a moyenne glissante sur KS et déferlement non linéaire

Ayant démontré précédemment que le dernier modèle de Mégan n'est pas viable sur certaines configurations à cause des itérations sur KS , on essaie de faire une moyenne glissante sur ces KS . Puis au lieu d'un déferlement linéaire selon le critère de Munk, on essaie de rendre celui-ci un peu plus physique à l'aide de fonctions bien choisies (trigonométriques). Un essai de ce nouveau modèle peut nous donner l'affichage suivant pour une période de $T_0 = 10$ s :

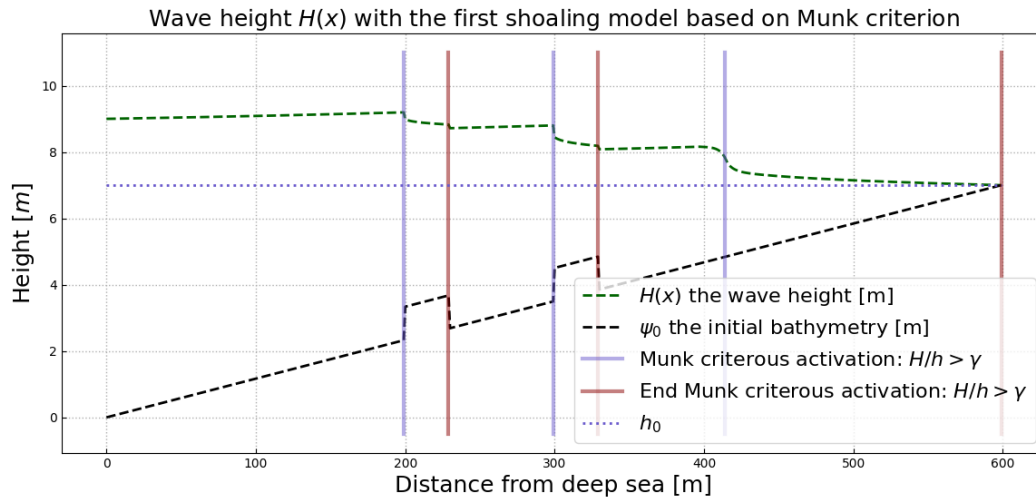


FIGURE 40 – Modèle a moyenne glissante sur K s et déferlement non linéaire pour $T_0=8$ s

On essaie donc ce "nouveau modèle" dans la descente du MINI OPTIMORP pour une période de vague $T_0 = 12$ s. On obtient le graphique suivant :

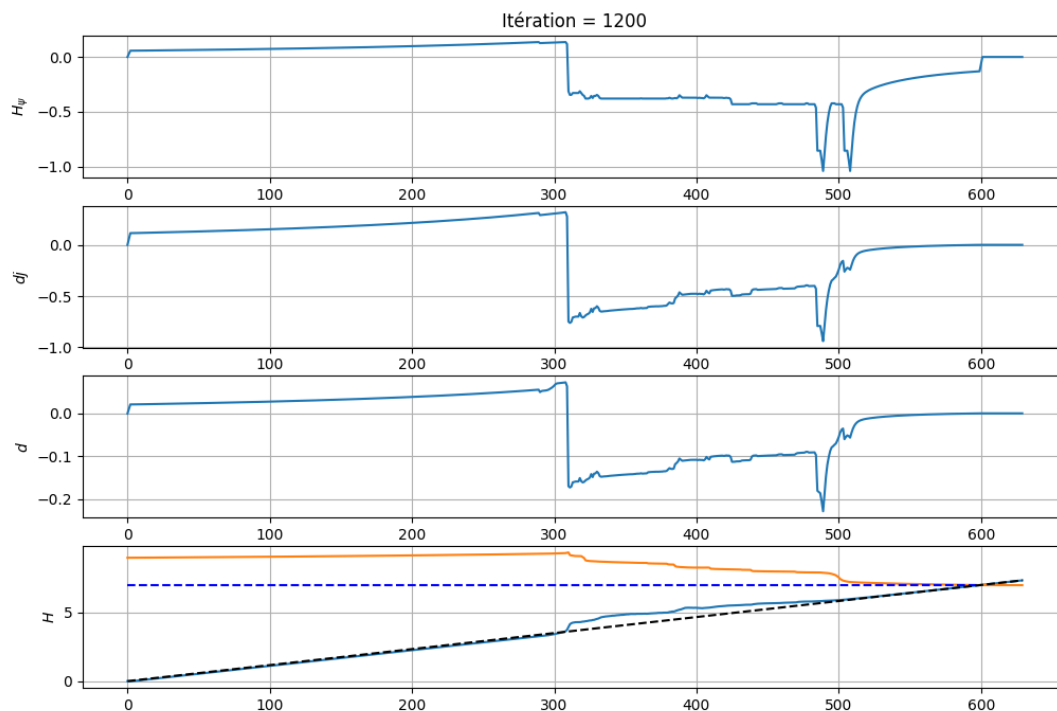


FIGURE 41 – MINI OPTIMORP pour une simulation à $T_0=12$ s et $H_0 = 2$ m

les résultats de ce modèle sont physiquement très peu encourageant. En effet, celui-ci n'hésite pas d'une belle curve lisse comme on avait avec le modèle de Mégan. Donc celui-ci ne rends pas une barre curve lissée. Cependant, essayer des simulations avec un **vrai modèle hydrodynamique** pourra donner des résultats intéressants. Ce modèle hydro n'étant pas réaliste, il est normal que la morpho ne la soit pas non plus.

Compte rendu scientifique

Semaine 59-60 : 26/12/22-06/01/23

Vacances



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 57-58 : 12/12/22-23/12/22

Les dernières semaines se sont concentrés principalement sur l'implémentation du gradient par Hadamard.

Problème de H_ψ

Observations

Lors de nos calculs, on a remarqué qu'en implémentant la dérivée d'Hadamard :

$$H_\psi = n_x \frac{dH}{dx} + n_\psi \frac{H}{d\psi}, \quad (2)$$

on remarque que le terme $n_\psi \frac{H}{d\psi} \gg n_x \frac{dH}{dx}$. De plus, c'est le terme $\frac{H}{d\psi}$ qui nous pose problèmes. Dans certaines conditions, le terme $d\psi$ peut tendre vers 0 et donc créer des instabilités numériques. La solution permettant d'éviter les instabilités numériques serait donc de traiter le problème à la source :

- à l'aide de limiteurs, de bornes, on posera des bornes physiques de telle sorte que le terme $\frac{H}{d\psi}$ ne tende pas vers l'infini.

Quand $\frac{H}{d\psi} \notin [-3, 0], \frac{H}{d\psi} = 0$

La première idée est donc de trouver un intervalle permettant de limiter les explosions de ce terme. On va donc couper les valeurs sortant de l'intervalle $[-3, 0]$. Cet intervalle est choisit arbitrairement pour le moment. Il est issue d'observations sur un cas particulier.

On effectue toujours la même simulation de référence :

- Une batymétrie linéaire
- Une tempête de plusieurs jours
- L'avant dernier modèle hydro



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



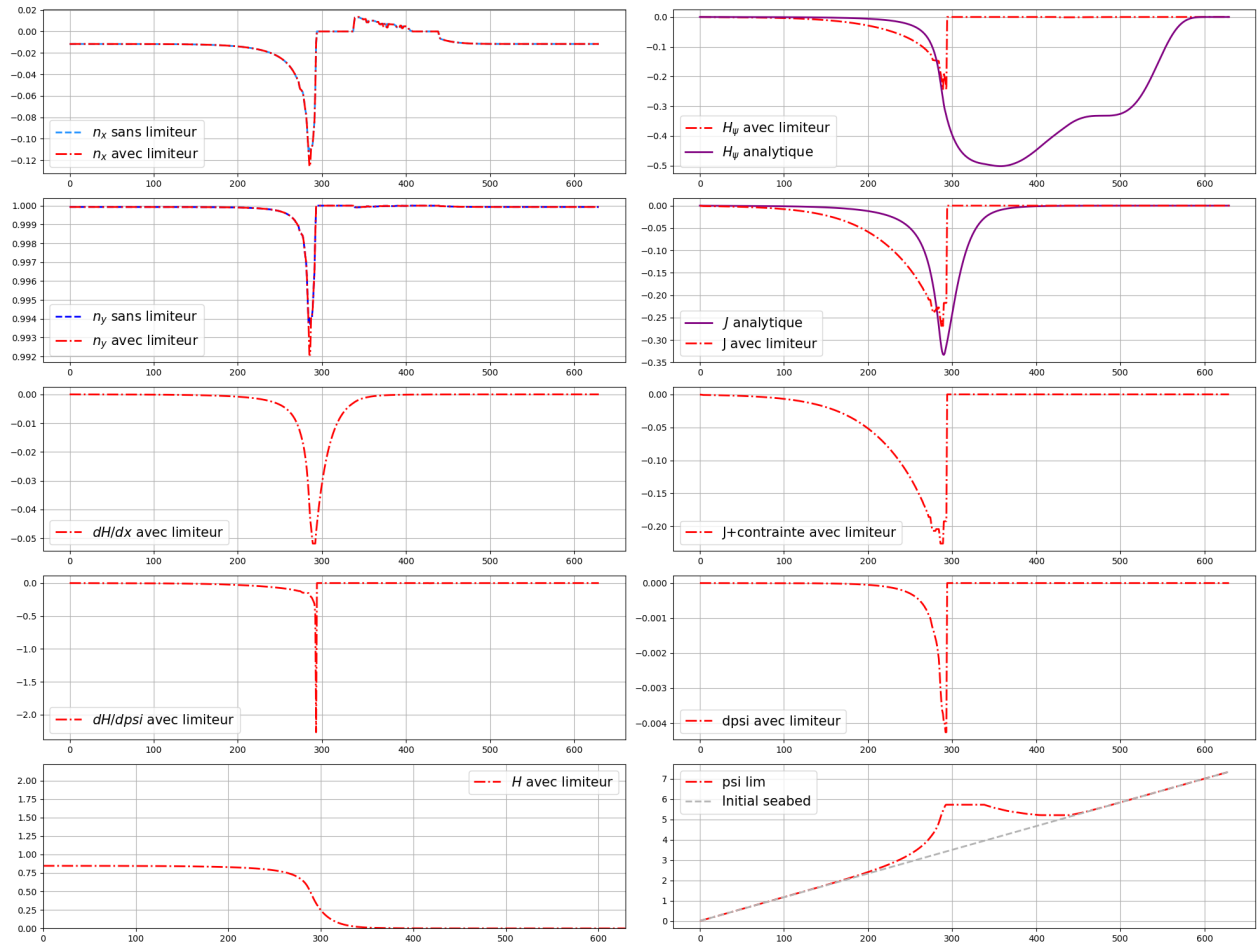


FIGURE 42 – Quand $\frac{H}{d\psi} \notin [-3, 0]$, $\frac{H}{d\psi} = 0$ itération 800/1500

La simulation arrive à tourner intégralement. Cependant, le problème étant qu'en bornant les positifs, on interdit la corrosion. Cette borne n'est donc pas physique.

Quand $H < 0.2$, $\frac{H}{d\psi} = 0$

Pour aller vers une borne plus physique, on va bloquer les valeurs lorsque H est plus petit qu'une certaine valeur.

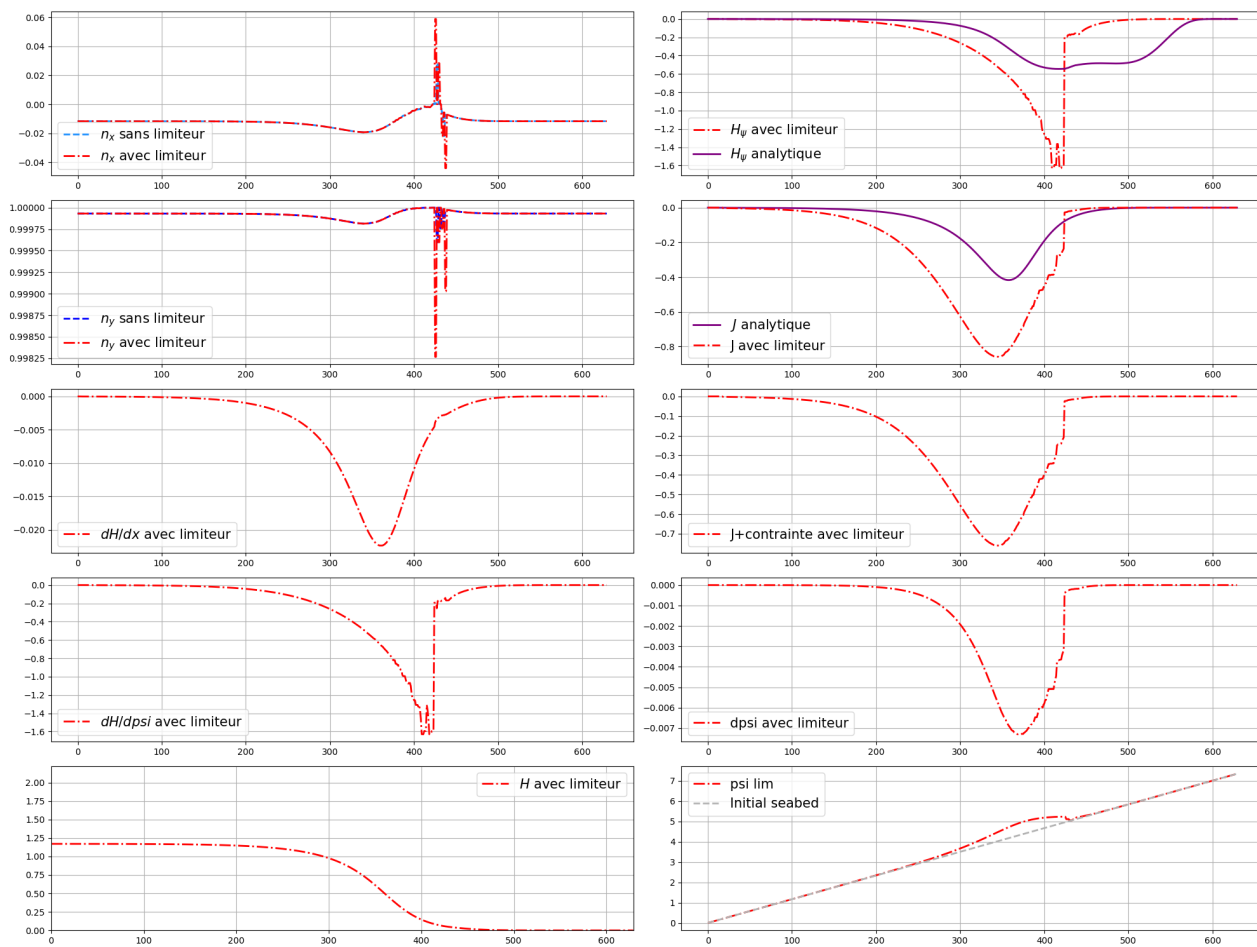


FIGURE 43 – Quand $H < 0.2$, $\frac{H}{d\psi} = 0$ itération 450/1500

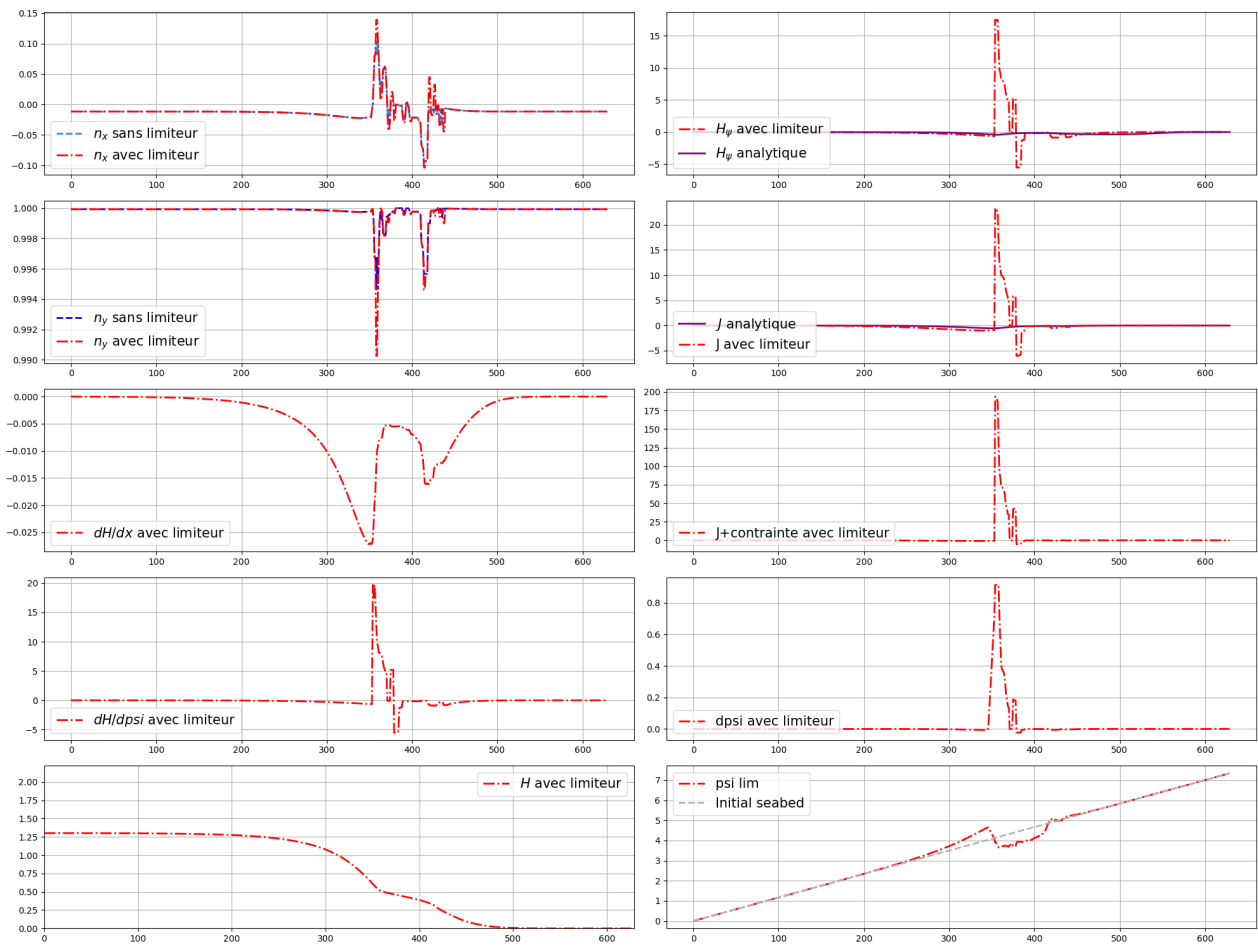


FIGURE 44 – Quand $H < 0.2$, $\frac{H}{d\psi} = 0$ itération 475/1500

On peut essayer une alternative en bornant par rapport à $\frac{H}{H_0} < 0.2$.

Quand $\frac{H}{H_0} < 0.2$, $\frac{H}{d\psi} = 0$

On essaie le critère suivant.

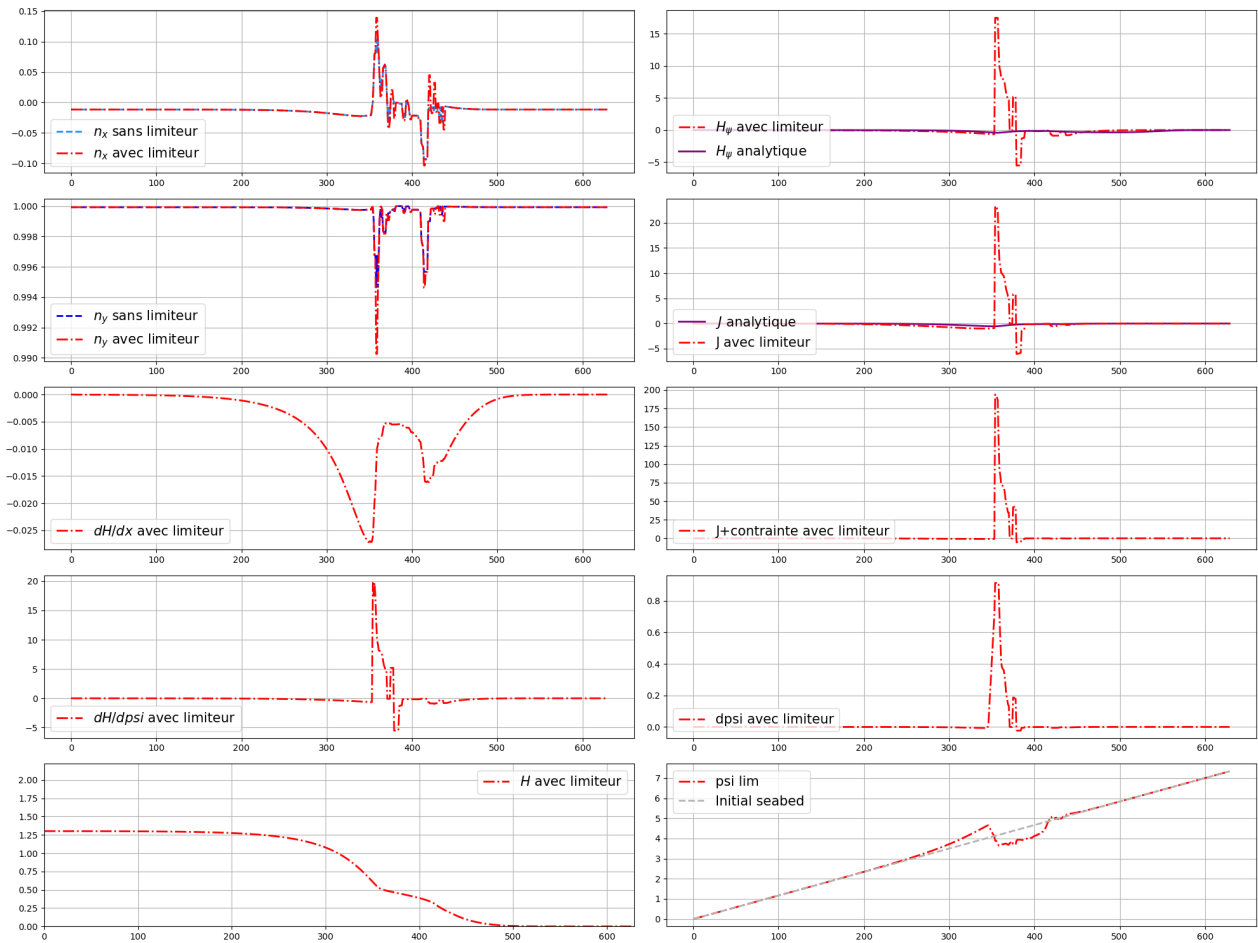


FIGURE 45 – Quand $\frac{H}{H_0} < 0.2$, $\frac{H}{d\psi} = 0$ itération 425/1500

On remarque que ceci n'empêche pas l'explosioun du schéma. Ceci apparait quand la pente de ψ est trop faible. On va donc chercher à limiter également sur la pente de ψ .

Quand $\frac{H}{H_0} < 0.2$ ET $d\psi > 0.1\%$, $\frac{H}{d\psi} = 0$

En bornant comme indiqué dans le titre, on arrive au rendu suivant :

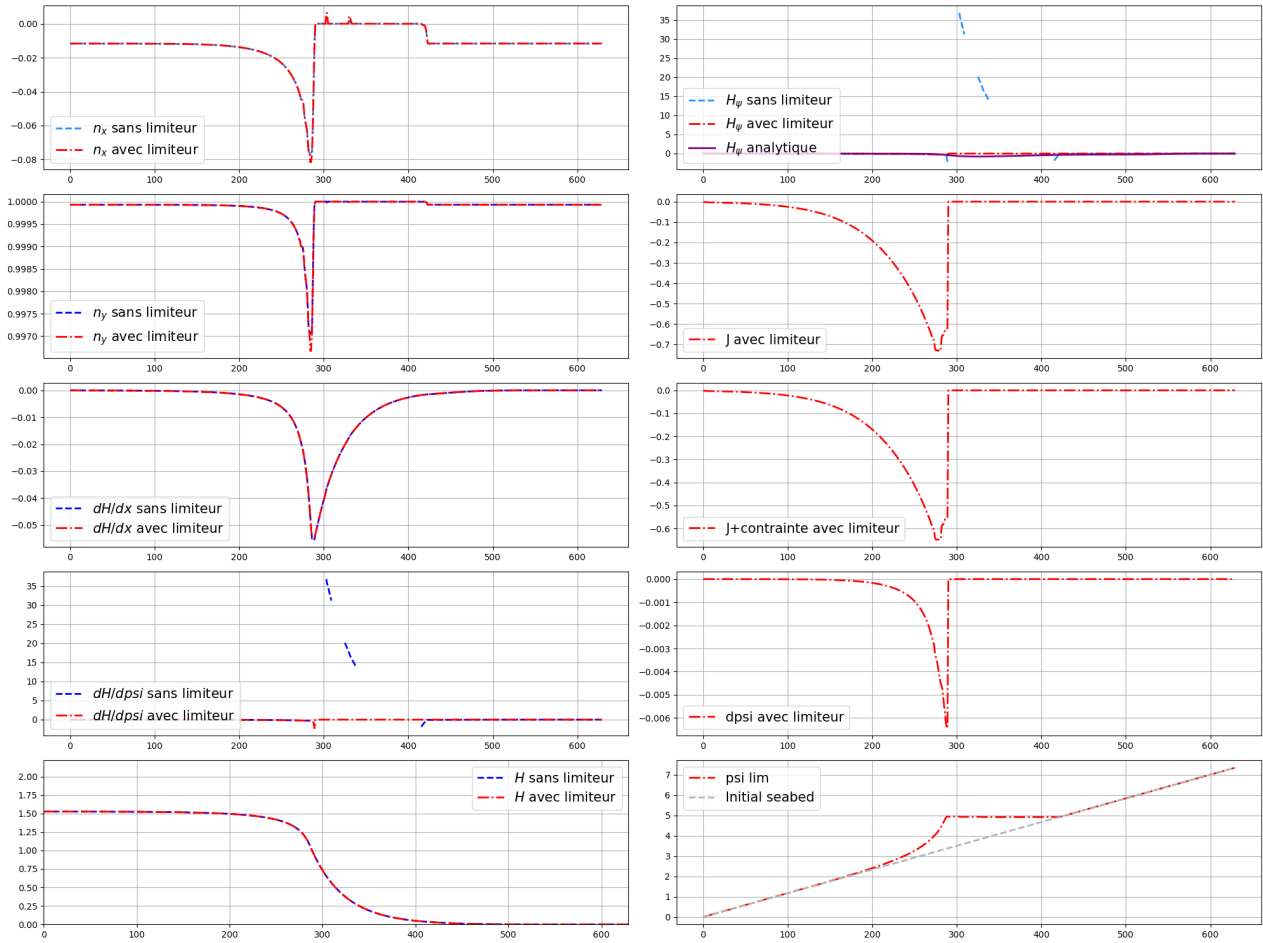


FIGURE 46 – Quand $\frac{H}{H_0} < 0.2$ ET $d\psi > 0.1\%$, $\frac{H}{d\psi} = 0$ itération 425/1500

On remarque que la pente de ψ est donc bloquée de manière constante. Il est donc primordiale de trouver une alternative pour calculer cette valeur de $\frac{H}{d\psi} = 0$ lorsque que la pente est trop faible. On peut d'ailleurs regarder si le critère de pente suffit.

Quand $d\psi > 0.1\%$, $\frac{H}{d\psi} = 0$

En essayant le critère suivant :

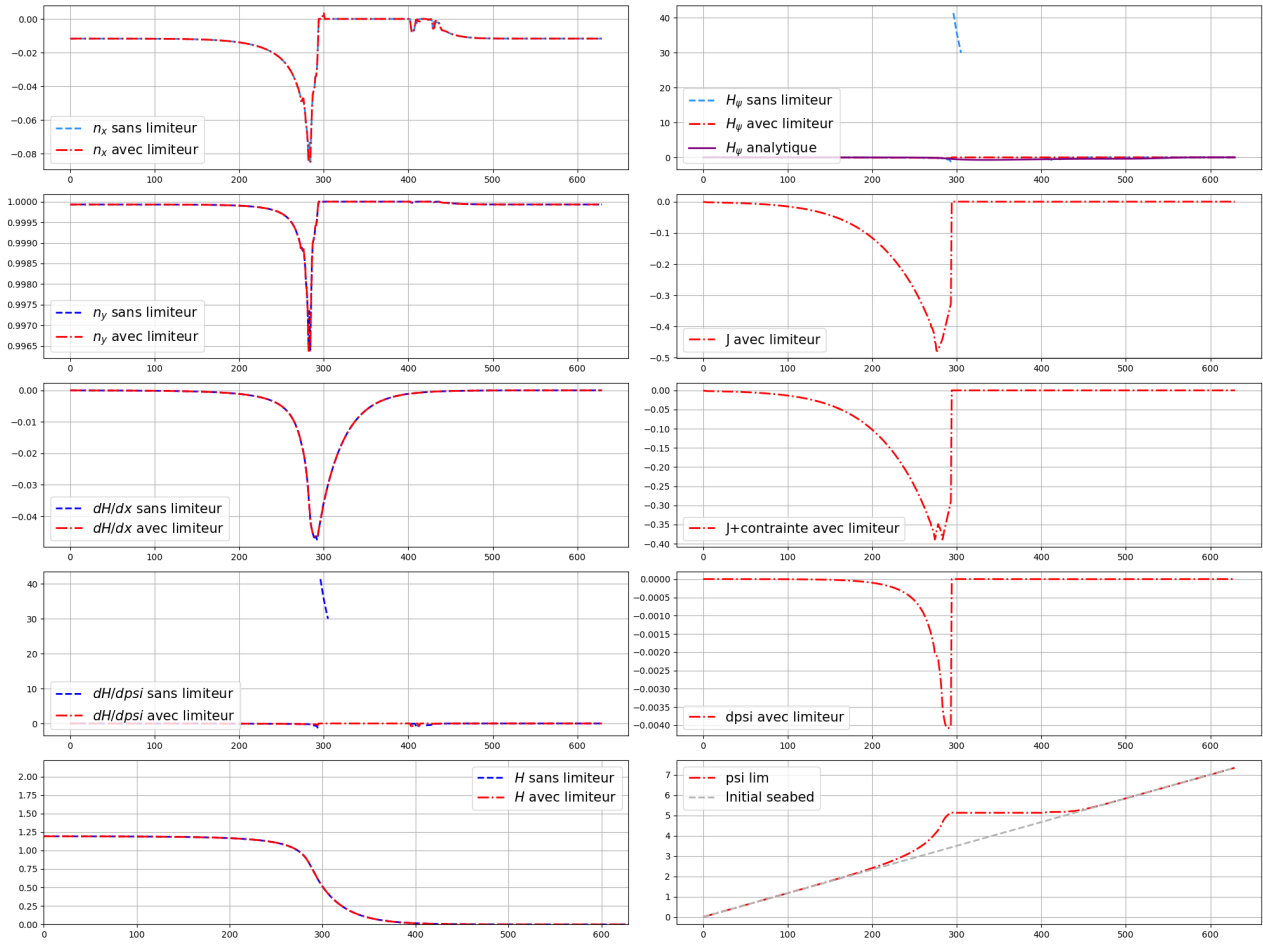


FIGURE 47 – Quand $d\psi > 0.1\%$, $\frac{H}{d\psi} = 0$ itération 450/1500

on remarque que celui-ci est prédominant. Il suffit d'arrêter ce critère pour que le code tourne entièrement. On va donc essayer de calculer le terme $\frac{H}{d\psi}$ d'une manière différente lorsque cette borne est activée.

Quand $d\psi > 0.1\%$, $H_\psi = \frac{H(\psi+\varepsilon) - H(\psi-\varepsilon)}{2\varepsilon}$

Par interpolation, on arrive à exprimer H en fonction de ψ et on s'en sert pour calculer la valeur de H_ψ en ces points là.

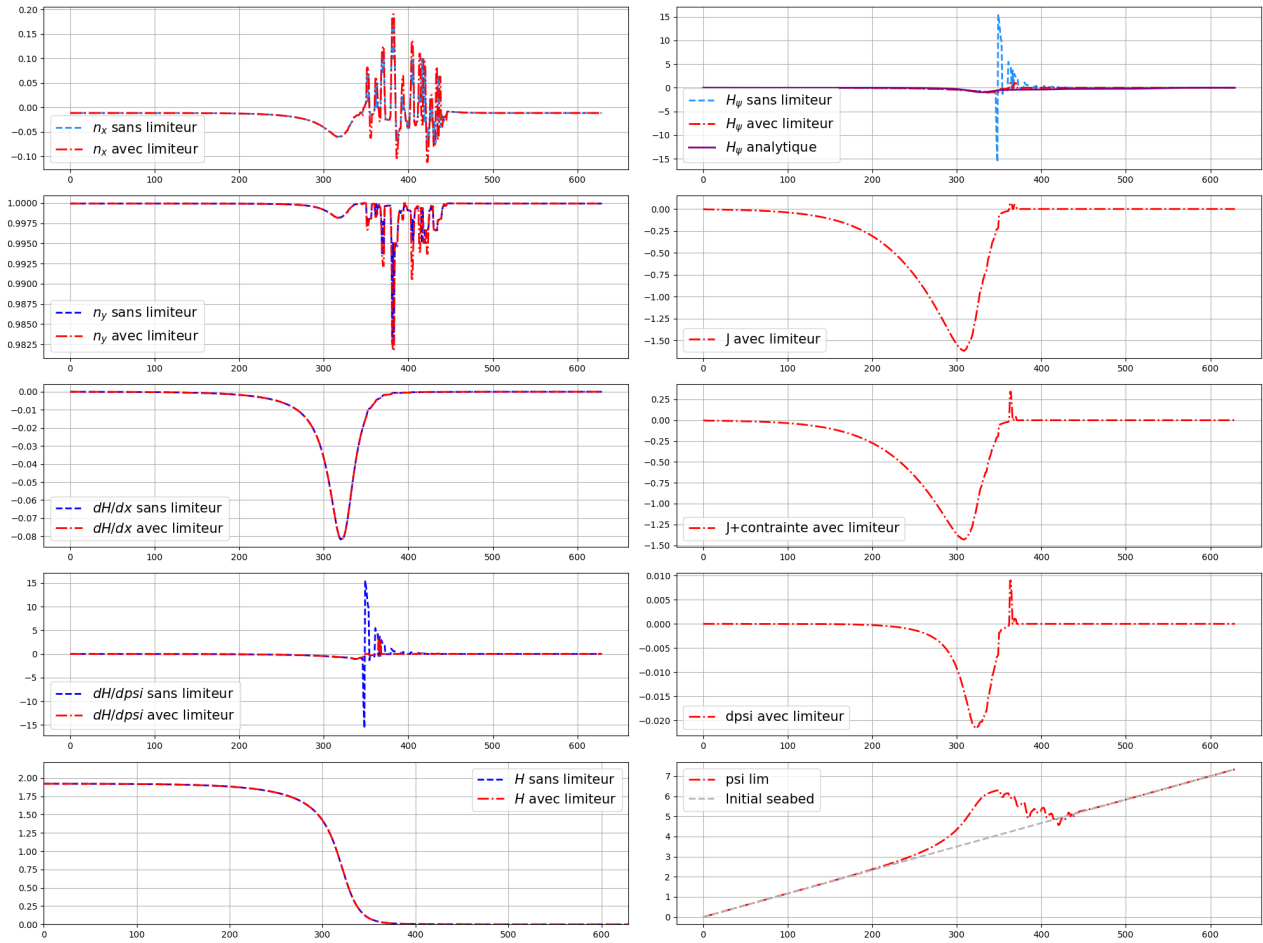


FIGURE 48 – Quand $d\psi > 0.1\%$, $H_\psi = \frac{H(\psi+\varepsilon) - H(\psi-\varepsilon)}{2\varepsilon}$ itération 600/1500

Ici, on remarque que le fait que $\frac{H}{H_0} < \varepsilon$ peut faire exploser le code. On va donc imposer cette condition.

Quand $d\psi > 0.1\%$, Si $\frac{H}{H_0} < \varepsilon$ alors $H_\psi = \frac{H(\psi+\varepsilon) - H(\psi-\varepsilon)}{2\varepsilon}$

En imposant la condition suivante, on arrive à :

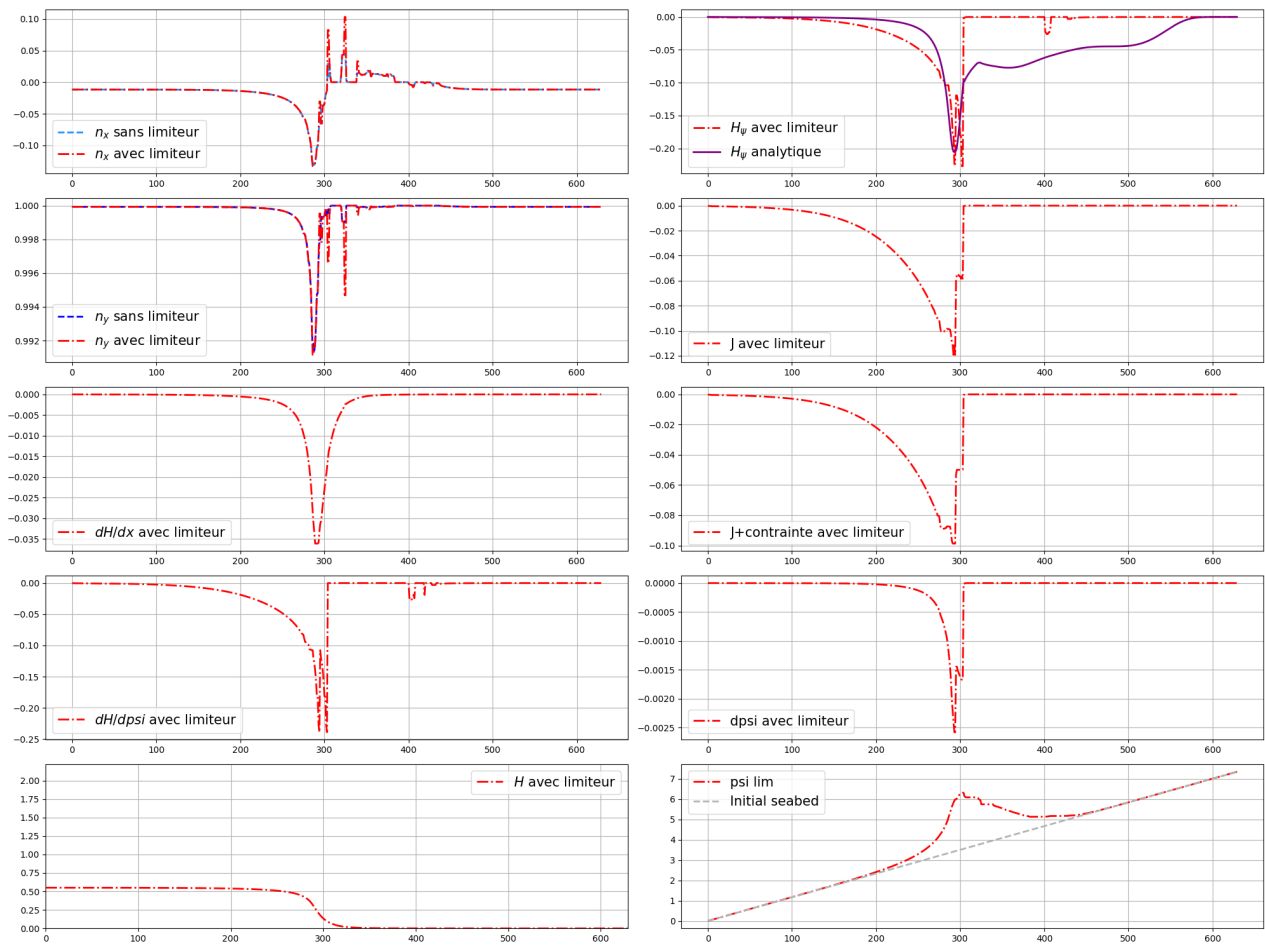


FIGURE 49 – Quand $d\psi > 0.1\%$, Si $\frac{H}{H_0} < \varepsilon$ alors $H_\psi = \frac{H(\psi+\varepsilon) - H(\psi-\varepsilon)}{2\varepsilon}$ itération 800/1500 dernier modèle hydro

La simulation est entièrement run. De plus, celle-ci nous rends une bathymétrie très proche à celle que nous avons avec la solution analytique.

On a donc décidé de tester ceci avec un autre modèle hydrodynamique. On a pris un des premier avec une période de vague $T = 6$ s. On obtient le rendu suivant :

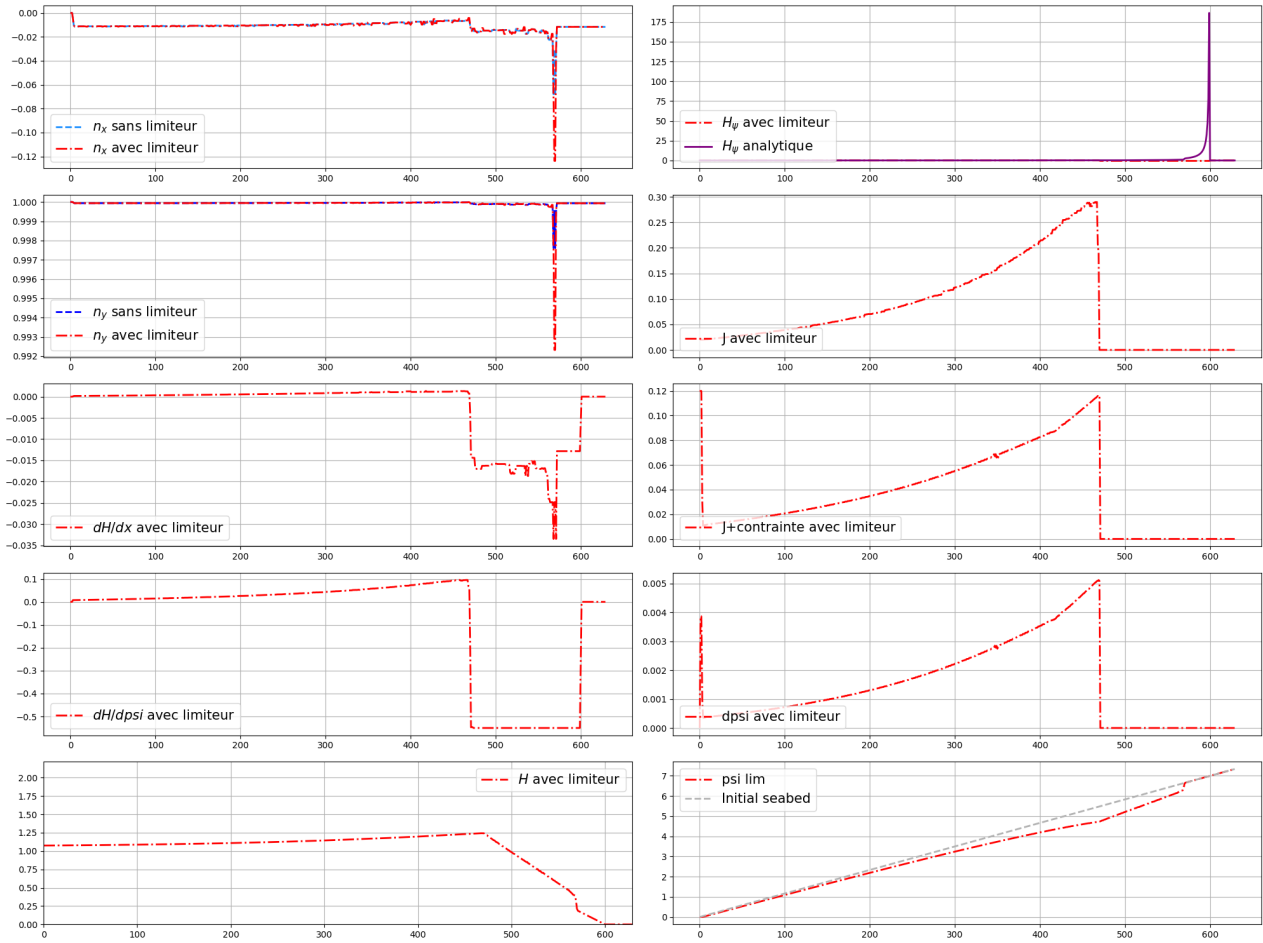


FIGURE 50 – Quand $d\psi > 0.1\%$, Si $\frac{H}{H_0} < \varepsilon$ alors $H_\psi = \frac{H(\psi+\varepsilon) - H(\psi-\varepsilon)}{2\varepsilon}$ itération 450/1500 premier modèle hydro

Pour ce modèle hydrodynamique, la solution ne semble plus correct. Pourtant, sans les ajouts faits précédemment, le calcul se déroulait très bien.

En creusant le code, on s'aperçoit qu'un saut crée une pente trop faible et donc enclenche la résolution par différences finis. Celle-ci ne se fait pas correctement et donc agrandit les sauts d'itérations en itérations. On impose donc que la pente soit inférieure à une certaine valeur sur au moins 10 m du domaine.

Quand $d\psi > 0.1\%$, Si $\frac{H}{H_0} < \varepsilon$ sur au moins 10m alors $H_\psi = \frac{H(\psi+\varepsilon) - H(\psi-\varepsilon)}{2\varepsilon}$

En effectuant cette simulation, on arrive donc à un résultat quasiment exactement pareil entre le modèle analytique et de Hadamard. Le calcul par différence finis n'est quasiment jamais enclenché. On obtient le résultat suivant :

Simulation of short storm
FLUME CONFIGURATION
 $t = 1.02e + 06$ (iteration 850/1499)

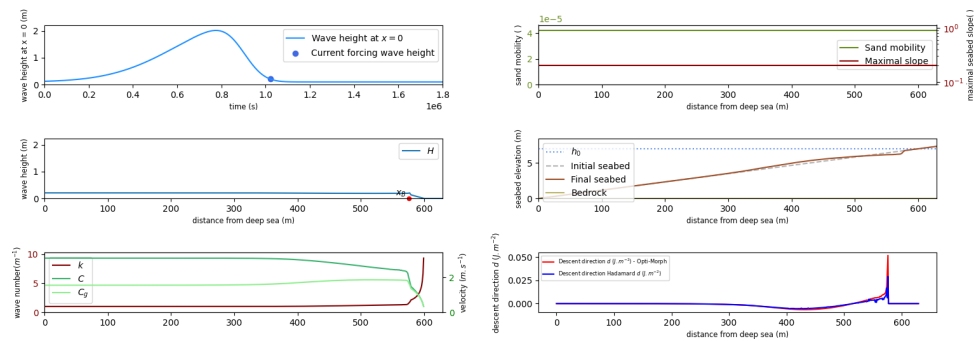


FIGURE 51 – Quand $d\psi > 0.1\%$, Si $\frac{H}{H_0} < \varepsilon$ sur au moins 10m alors $H_\psi = \frac{H(\psi+\varepsilon) - H(\psi-\varepsilon)}{2\varepsilon}$ itération 850/1500 premier modèle hydro

Maintenant que ces modèles semblent fonctionner, il serait intéressant de lancer avec un autre modèle hydrodynamique comme SWASH.

Compte rendu scientifique

Semaine 54-56 : 21/11/22-10/12/22

Les dernières semaines se sont concentrés principalement sur l'implémentation du gradient par Hadamard.

Calcul de $\nabla_{\psi} H$ sur un cas simple

Les premiers tests se sont montrés très bons pour des configurations **peu morphogènes** avec un modèle hydrodynamique très simple (shoaling). Sur ce modèle, nous sommes sûrs de la dérivée analytique et donc il est très intéressant de comparer les gradients. Sur la figure ci-dessous par exemple :

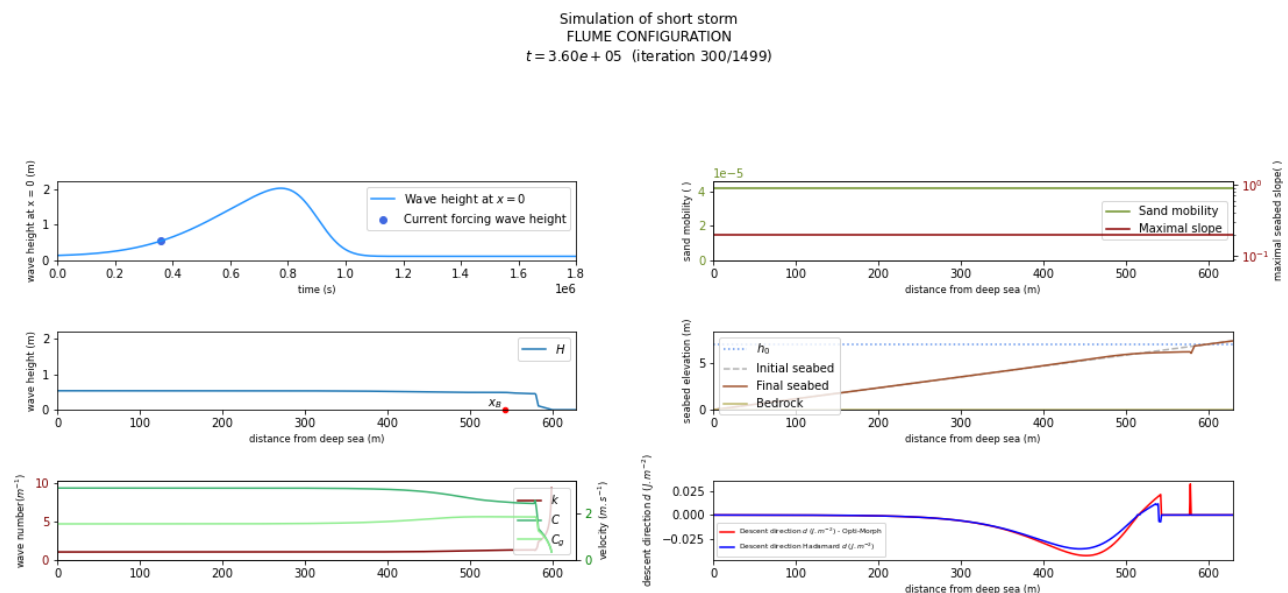


FIGURE 52 – Cas avec un modèle hydrodynamique simple : shoaling. Le gradient d'Hadamard correspond quasiment à l'identique au gradient analytique.

on remarque que l'approximation est très bonne. Une simulation entière avec le calcul via Hadamard donne quasiment exactement les mêmes résultats que pour un calcul de gradient analytique.

Calcul de $\nabla_{\psi} H$ sur un cas simple avec un modèle hydrodynamique plus évolué

En calculant le gradient toujours sur cette même configuration, on utilise cette fois-ci un modèle hydrodynamique plus complexe qui induira une configuration **morphogène**. Cette simulation est la simulation de référence du User guide de Mme Cook. Celle-ci simule une tempête de plusieurs jours sur une bathymétrie linéaire. Les résultats de cette simulation sont présentés ci-dessous pour un moment critique où un pic commence à se créer :

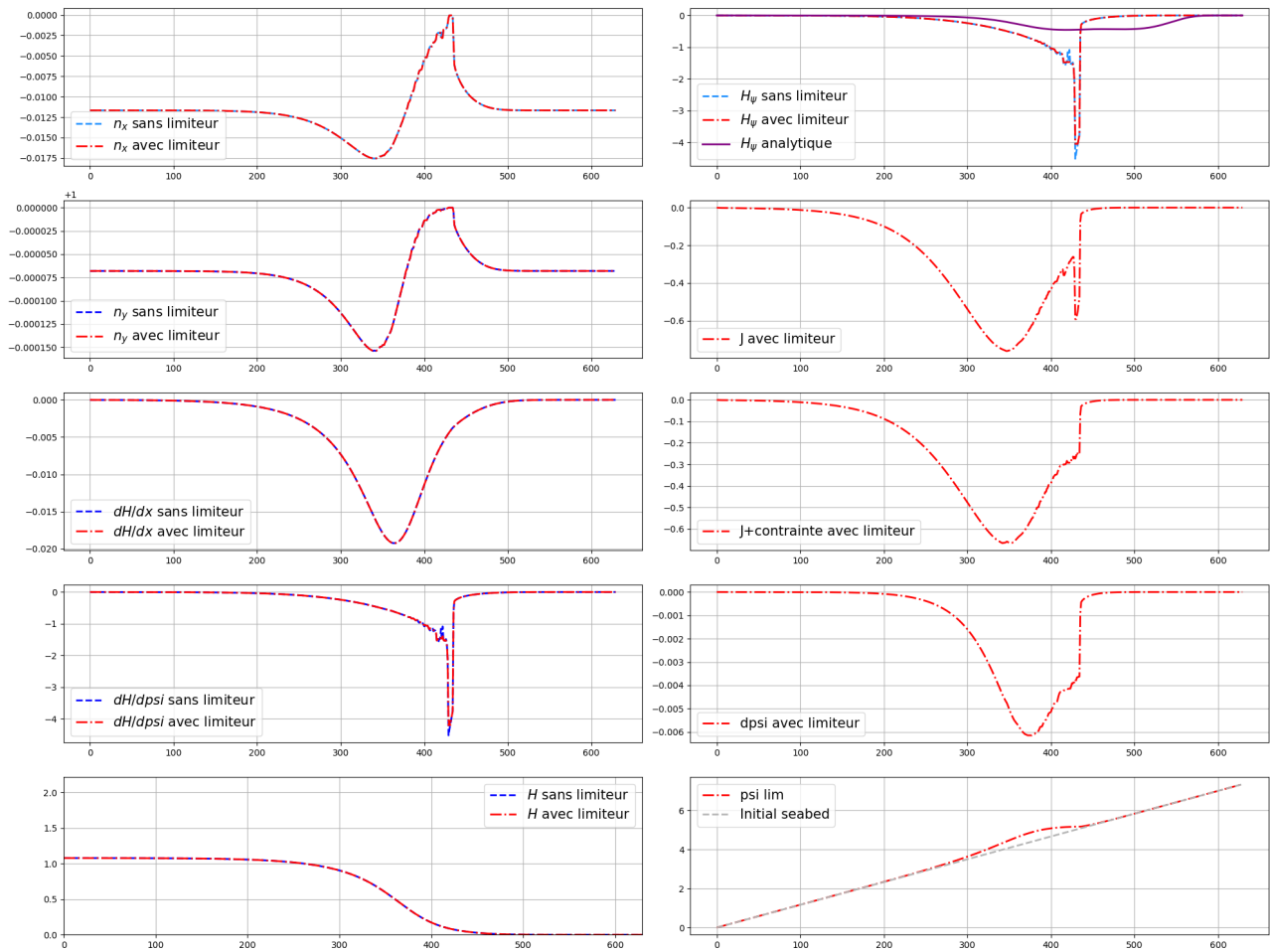


FIGURE 53 – Cas avec une bathymétrie linéaire et le gradient obtenu via Hadamard et un limiteur. Lorsque la bathymétrie devient constante, celle-ci induit la création de pics parasites.

Sur cette itération, le pic arrive à être amorti par le limiteur de pente mais il reste toujours une "bosse" qui ne devrait pas être là vers 430. On a donc isolé les itérations d'après où ce pic n'est pas cut par le limiteur de pente sur la figure suivante :

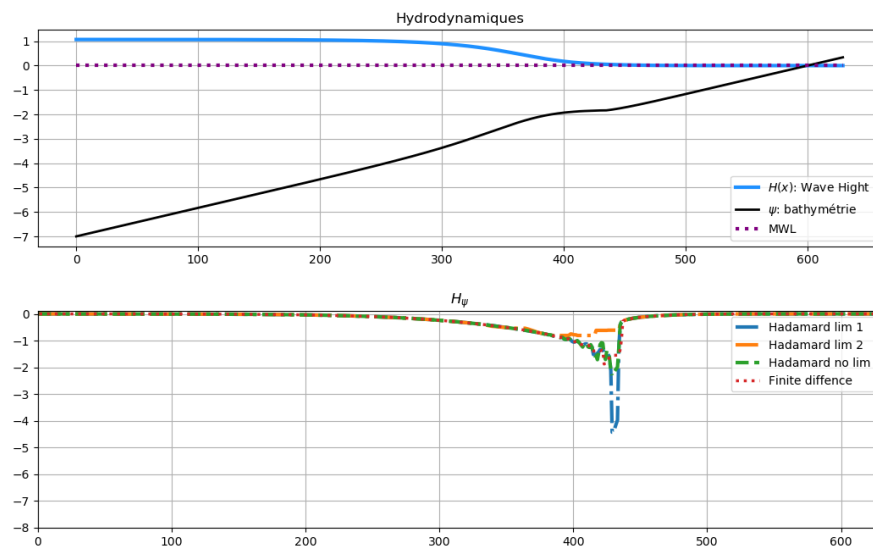


FIGURE 54 – Reprise d'un cas où le gradient calculé induisait un saut. On observe que le limiteur n'agit pas toujours dans le bon sens (bleu).

En effet, on remarque que le pic n'est pas cut par tous les limiteurs de pente. Le seul limiteur de pente qui amorti est celui où la condition d'arrêt n'est pas fixée par l'erreur. Par ailleurs, en essayant des filtres issues de la transformée du signal, on obtient **exactement** le même résultat entre le limiteur avec condition d'erreur et un filtre médian.

Si on décide cette fois-ci de prendre le modèle Shoaling simple sur ce même ψ , on obtient la figure suivante :

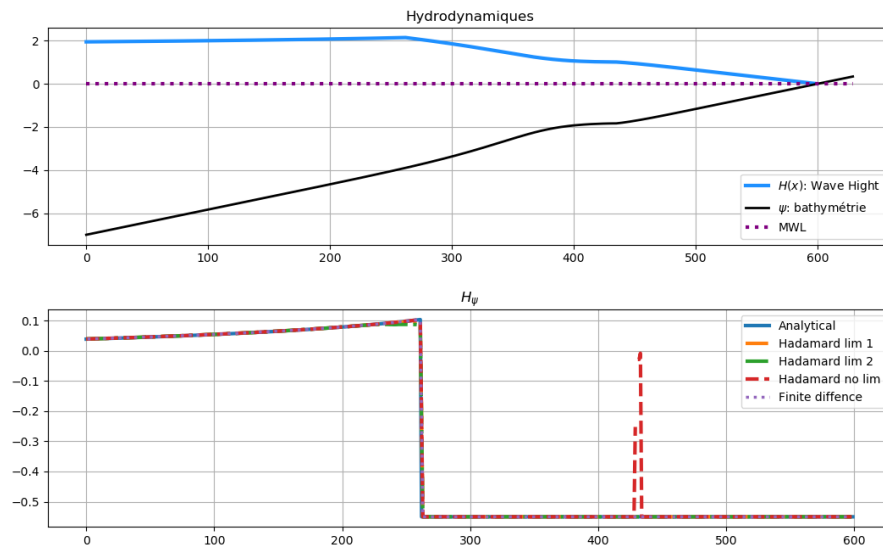


FIGURE 55 – Reprise d'un cas où le gradient calculé induisait un saut. Cette fois-ci avec le modèle hydro de base.

Sur cette figure, on voit bien que ce n'est pas seulement à cause de ψ que le modèle ne semble pas fonctionner. Il semblerait que H agisse également.

Axes de résolutions

De nombreuses idées ont été testées pour résoudre ces problèmes de sauts numériques qui font exploser le code. Il est important de stipuler les conditions lorsque le code "explose". Celui-ci explose principalement lorsque :

- La bathymétrie devient constante et donc les $\psi_{i+1} - \psi_i$ tendent vers 0.

Or, dans le calcul du gradient, il est essentiel de diviser par ce terme et donc le gradient va tendre vers une valeur très grande. Une solution serait donc de majorer ce terme par un ε . Ceci a été fait mais cela ne semble pas empêcher les sauts.

Le limiteur de pente :

Celui-ci est tout de même très robuste comme on peut voir sur la figure 53. Il reste implémenté dans le code actuel. D'autres limiteurs pourraient être implémentés : il en existe beaucoup dans les résolutions hyperboliques, ils sont appliqués directement aux flux. Sont-ils applicables directement à notre problème ?

Lissage par différence finis :

Ce lissage a été évoqué à la dernière séance. Celui-ci consistait à faire un schéma de différences finis de type $\frac{H^+ - H^-}{2\varepsilon}$ avec les H^+ et H^- des combinaisons linéaires de H_i . L'effet d'un tel lissage n'a pas changé l'explosion du code dans les configurations présentées au dessus.

Lissage par Savitzky-Golay

Ce lissage semble être une bonne alternative. Cependant, lorsqu'un pic n'a pas été cut par le limiteur, le lisseur va tout simplement agrandir l'étendue du pic et donc créer une morpho encore plus parasite. Ce lisseur serait une solution seulement si nous n'avions pas de pics.

B

Un modèle couplé Hadamard + Différences finis ?

Étant donné que le calcul du gradient pose des problèmes lorsque la bathymétrie est constante, il pourrait être intéressant de calculer le gradient par différences finis sur certaines portions de ψ et le gradient d'Hadamard sur d'autres.

- Sur les parties où la bathymétrie ne dépasse pas une certaine pente : calculer via différences finis
- Sur les parties où la bathymétrie dépasse une certaine pente : calculer via Hadamard

Les premiers tests ont été faits figure 53 mais ceci est trop dépendant de la valeur de ε . En effet, pour un ε petit, on aura un saut très grand et pour un ε grand, celui-ci sera plus modéré. Pourquoi pas utiliser un ε de l'ordre de grandeur 0.01 afin d'éviter des sauts trop grands ?

Cas-test idéal : Copter

Le cas-test qui pourrait faire l'objet du prochain article serait de reprendre la simulation de Mme Cook sur Copter et de calculer le gradient par Hadamard et non OptiMorph. On a lancé la simulation de Mme Cook en superposant le gradient OPTIMORPH et HADAMARD sur le graphique en haut à droite.

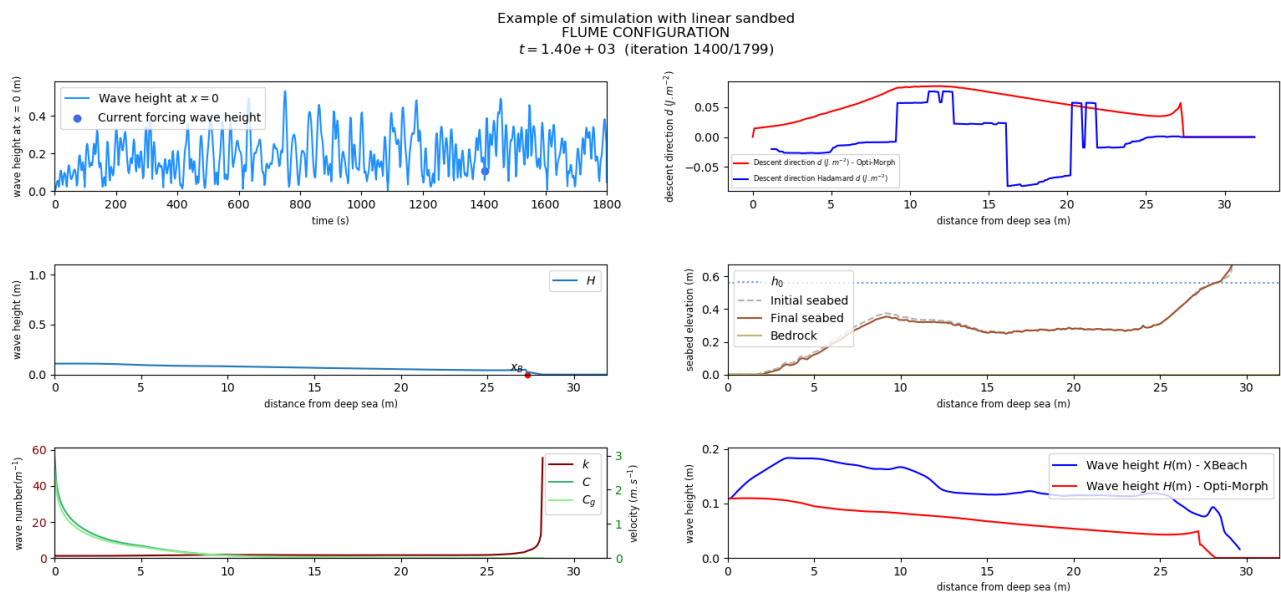


FIGURE 56 – Cas de Copter. Le gradient calculé via OPTIMORPH et on compare les valeurs du gradient sur la fig haut droite.

On remarque que le gradient de Hadamard est très très loin du gradient analytique. Ce gradient est calculé avec beaucoup de difficultés étant donné qu'il fait appel à de très nombreuses fois au limiteur à cause de la bathymétrie qui est assez linéaire.

Papier Hadamard

Le début du papier est en cours de rédaction. L'ingrédient principal manquant est le **cas-test 1D avec OptiMorph**. On peut toujours prendre une simulation avec modèle hydro simple et **période réaliste** (car possible avec celui-ci). Mais il sera reproché d'avoir un cas trop éloigné de la réalité, sans données de comparaison.

Papier pour China Ocean Engineering

Toujours en attente d'assagissement pour review mais les reviewer suivants ont été soumis au journal :

Dr Raphael Certain ASSOCIATE PROFESSOR habilitated to supervise researches in Coastal Dynamics Université de Perpignan | UPVD · Centre of Education and Research on Mediterranean Environments certain@univ-perp.fr

Pr Christophe Delacourt Université de Bretagne Occidentale | UBO · Institut Universitaire Européen de la Mer (IUEM)
christophe.delacourt@univ-brest.fr

Dr Philippe Larroude Université Grenoble Alpes · UFR Phitem Philippe.Larroude@univ-grenoble-alpes.fr

Dr Nicolas Robin Université de Perpignan | UPVD · Centre of Education and Research on Mediterranean Environments
nicolas.robin@univ-perp.fr

Pr Vincent Rey Université de Toulon | USTV · Mediterranean Institute of Oceanography (MIO) vincent.rey@univ-tln.fr

Dr François Sabatier European Centre for Research and Teaching in Environmental (CEREGE) sabatier@cerege.fr

MCE Hydrodynamique portuaire et littoral avancé

Dans ce module, 4 séances de 3H sont à faire :

- TP python : création de séries temporelles synthétiques + Application avec Optimorph : prêt
- Modélisation océanique ROMS : problème d'installation ? Linux obligatoire
- Résolutions de Helmholtz sur un port (simplifié) avec Freefem : quelques soucis sur la réflexion des murs pour le moment
- ...



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 53 : 14/11/22-18/11/22

Objets de la semaine : rencontre avec les master 1 pour le premier cours de python autoformation, mooc, tests sur le gradient d'Hadamard.

Conférence ICCE

Annulé, arrêt des préparations.

Préparation des cours de master

- TP série temporelles synthétiques : ok
- TP sur le code d'agitation portuaire Helmholtz : en cours

Recherche d'autres idées de TP à donner pour le cours *Hydro-morphodynamisme littoral & portuaire avancé*.

MOOC : Dopez vos calculs, la performance des supercalculateurs à votre portée

Mooc terminé, 20h à faire valider à l'école doctorale. Compétences développées :

- Création de calcauls parallèles OpenMP / MPI
- Vocabulaire spécifique aux calculateurs etc
- ...

Comparaison des gradients : Analytique / Hadamard / Différences finis

Plusieurs points à aborder :

- En implémentant dans le code la dernière version de Hadamard, le gradient obtenu est exactement le même que celui obtenu il y a quelques semaines avec la version qui théoriquement était mauvaise mais numériquement bonne. Voir figure 64
- Afin de comparer les gradients, on décide de faire une simulation "cas-test" à fonds plat afin de pouvoir calculer le gradient à partir des différences finis. Les résultats de différences finis ne correspondent ni à ceux de Hadamard ni à ceux de la solution analytique. Plusieurs pistes de débogage :
 - Reprendre un modèle hydrodynamique plus simple où on est sûr de la dérivée analytique
 - Afficher des quantités différentes pour être sûr que ça ne vienne pas des transformations dans le code
- En lançant le code avec le gradient obtenu à partir de Hadamard, on obtient parfois des sauts à l'infini à cause des discontinuités. Idée de résolution :
 - Utiliser un lissage (smooth convolution) sur ψ
 - Mettre un filtre

Interrogation : On avait mis un déplacement maximal sur ψ mais celui-ci ne semble pas fonctionner dans ce cas-ci ? Hypothèse : peut-être qu'avec un pas de temps Δt trop grand, la peut arriver à des déplacements trop extrêmes ?



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 52 : 07/11/22-11/11/22

Code Hamard

```
from matplotlib.pyplot import *
import sympy as sp

def sym_calc(f,x):
    return array([f.subs(t,var) for var in x])

def Dif_Hadamard (x, y, H):
    # Calcul of Deltas
    dH = gradient(H) # Calcul des \Delta H par H[i+1]-H[i-1]
    dx = 1 * ones(n) # dx = 1
    dy = gradient(y) # Calcul des \Delta y par y[i+1]-y[i-1]

    # Calcul of tangencial vector with unitar varriation
    t_x = dx / (dx**2+dy**2)**0.5 # to put in code
    t_y = dy / (dx**2+dy**2)**0.5 #
    n_x = - t_y
    n_y = t_x

    # differentiatoin
    dhdy=dH/dy
    dhdx=dH/dx

    # Calcul of numerical solution
    H_y_num = dhdx * n_x + dhdy * n_y # Hamard calculation

    return H_y_num

# Params
a,b = 1,-1
n = 200
freq = 1
L = 5 #longueur de domaine
t = sp.symbols('t')
eps = 1e-5

# Initialisation of x, y & H
x = linspace(0,L,n)

psi = (a*x + b) # Line to change
fH = sp.cos(t**2)*t #Define the function H = f(psi) - Line to change

H = sym_calc(fH,psi) # Calcul H from fH(psi) - here, H= cos(psi**2)*psi
y = psi.copy()
```

```
#####
##### Verification #####
#####

H_psi_anal = sym_calc(sp.diff(fH,t),psi) #Analytical solution from symbolic
↳ calculation
H_psi_num = Dif_Hadamard(x,psi,H) # Numerical solution from Hadamard
H_psi_dif = (sym_calc(fH,psi+eps)- sym_calc(fH,psi-eps))/2/eps # Numerical
↳ solution from finite difference

width = 2
lstyle =["-", "-.", ":"]
c=['lightgreen', 'red', 'blue']
plot(x,H_psi_anal,linewidth=width,linestyle=lstyle[0],label="Analytical
↳ solution",color=c[0])
plot(x,H_psi_num,linewidth=width,linestyle=lstyle[1],label="Hamard
↳ solution",color=c[1])
plot(x,H_psi_dif,linewidth=width,linestyle=lstyle[2],label="Finite difference
↳ solution",color=c[2])

xlabel("x")
ylabel('$H_\psi$')
legend()
grid(visible=True, linestyle=':', linewidth=1)
tick_params(which='both', direction="in")
show()
```


Compte rendu scientifique

Semaine 51 : 31/10/22-04/11/22

CST/CSI

Ce vendredi 04/11/2022 à 9h aura lieu le comité de suivi de thèse avec les membres suivants :

- **Sami Bouarfa**, référent GAIA.
- **Benoit Ildefonse**, représentant de la direction du laboratoire GM
- **Norbert Kern**, référent externe : spécialiste de la physique des ondes

des documents ont donc été préparés pour ce comité. Un powerpoint permettant de faire une présentation de 30 minutes sur les aspects

- Déroulement du doctorat
- Progrès scientifique.

Papier chinois

Envoyé, en attente d'attribution au reviewer.

Différentes approches

Le logigramme suivant résume brièvement les différentes approches testées et celles qui nous reste à tester.

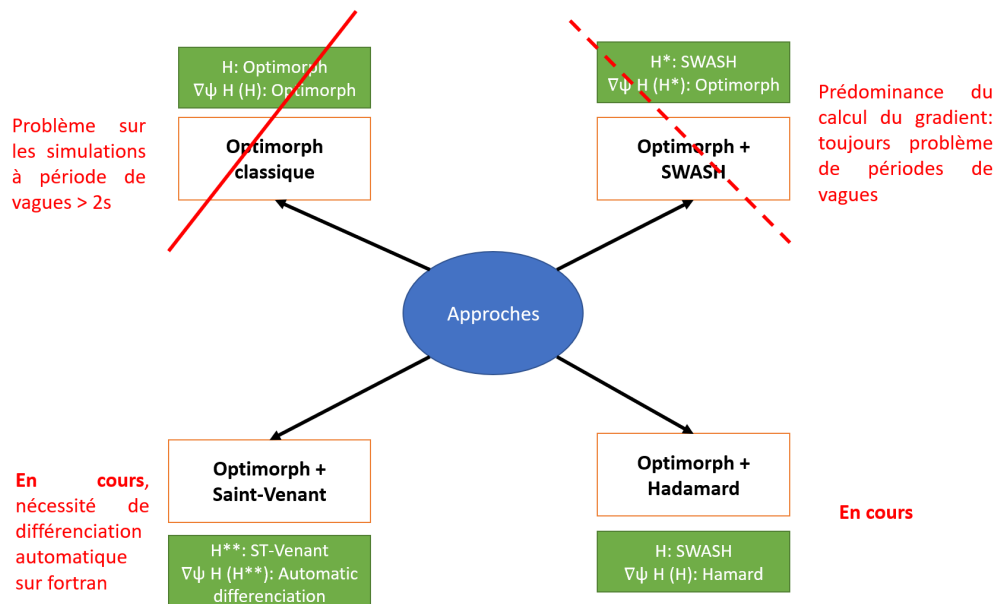


FIGURE 57 – Résumé des approches testées

Hadamard

Les derniers échanges avec M. Mohammadi se sont positionnés pour valider le formalisme dérivant d'Hadamard permettant d'obtenir $\nabla_{\psi} H$ sans passer par la différenciation automatique ou même analytique.

Code de M. Dupont



**UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER**



In [17]:

```

from matplotlib.pyplot import *

# Params
a,b = 2,-1
n = 200

# Initialisation of x, y & H
x = linspace (-1,1,n)
psi = a*x + b
H = cos(psi)
y = psi.copy()

# Calcul of Deltas
dH = H[1:]-H[:-1]
dx = x[1:]-x[:-1]
dy = y[1:]-y[:-1]

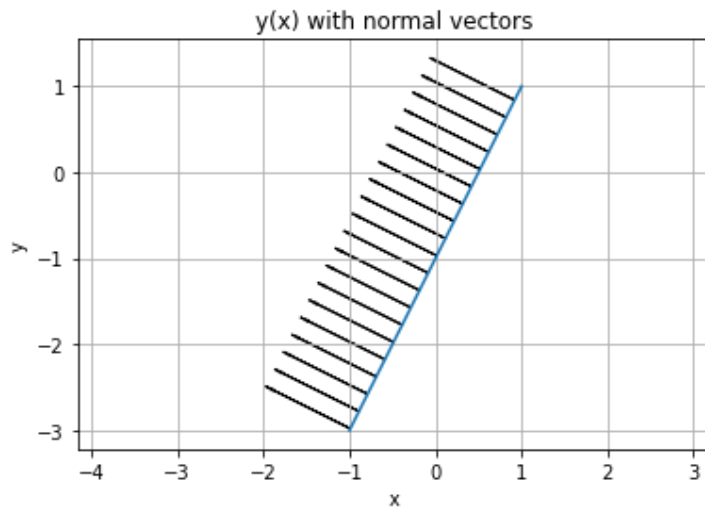
# Calcul des \Delta H par H[i+1]-H[i]
# Calcul des \Delta x par x[i+1]-x[i]
# Calcul des \Delta y par y[i+1]-y[i]

# Calcul of tangencial vector
t_x = dx / (dx**2+dy**2)**0.5
t_y = dy / (dx**2+dy**2)**0.5

# Calcul of normal vector
n_x = - t_y
n_y = t_x

# Plot verification of normal vectors
plot(x,y)
[arrow(x[i],y[i],n_x[i],n_y[i], head_width=0.02, head_length=0.1, fc='k', ec='k') for i in range(1,n)]
grid('on')
xlabel("x")
ylabel("y")
title('y(x) with normal vectors')
axis('equal')
show()

```



In [18]:

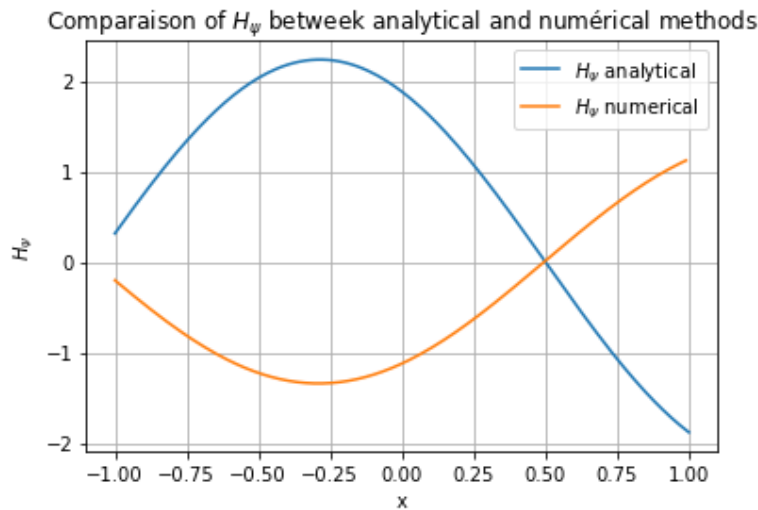
```

# Calcul of numerical solution
H_psi_num = dH/dx * n_x + dH/dy * n_y

#Calcul of analytical solution according to our calculations
H_psi_anal = -sin(psi)*(a**2+1)**0.5

```

```
# Plot both solutions
plot (x ,H_psi_anal,label="$H_\psi$ analytical")
plot (x[:-1],H_psi_num, label = "$H_\psi$ numerical")
legend()
grid('on')
xlabel("x")
ylabel('$H_\psi$')
title('Comparaison of $H_\psi$ between analytical and numerical methods')
legend()
show()
```



In [19]:

```
from matplotlib.pylab import *

# Params
a,b = 2,-1
n = 200

# Initialisation of x, y & H
x = linspace (-1,1,n)
psi = a*x + b
H = cos(psi)
y = psi.copy()

# Calcul of Deltas
dH = H[1:]-H[:-1]
dx = x[1:]-x[:-1]
dy = y[1:]-y[:-1]

# Calcul des \Delta H par H[i+1]-H[i]
# Calcul des \Delta x par x[i+1]-x[i]
# Calcul des \Delta y par y[i+1]-y[i]

# Calcul of tangencial vector
t_x = dx / (dx**2+dy**2)**0.5
t_y = dy / (dx**2+dy**2)**0.5

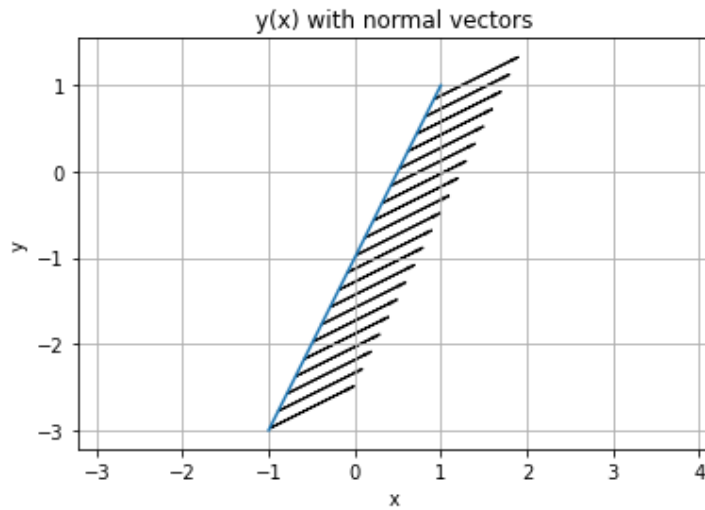
# Calcul of normal vector
n_x = t_y
n_y = t_x

# Plot verification of normal vectors
plot(x,y)
[arrow(x[i],y[i],n_x[i],n_y[i], head_width=0.02, head_length=0.1, fc='k', ec='k')] fo
grid('on')
x
```

```

ylabel('y')
title('y(x) with normal vectors')
axis('equal')
show()

```



In [20]:

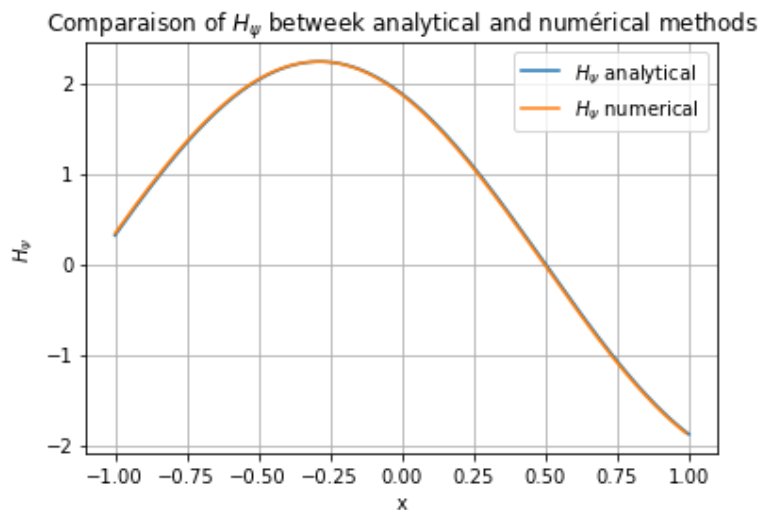
```

# Calcul of numerical solution
H_psi_num = dH/dx * n_x + dH/dy * n_y

# Calcul of analytical solution according to our calculations
H_psi_anal = -sin(psi)*(a**2+1)**0.5

# Plot both solutions
plot(x, H_psi_anal, label="$H_\psi$ analytical")
plot(x[:-1], H_psi_num, label="$H_\psi$ numerical")
legend()
grid('on')
xlabel("x")
ylabel('$H_\psi$')
title('Comparison of $H_\psi$ between analytical and numerical methods')
legend()
show()

```



In []:

Code de M. Mohammadi

Interrogations :

- Pourquoi ces vecteurs "normaux" ? Ce vecteur n'est pas unitaire ?
- Pourquoi notre solution analytique est $-\sin(\psi)$ alors qu'on cherche la dérivée droite et non partielle ?

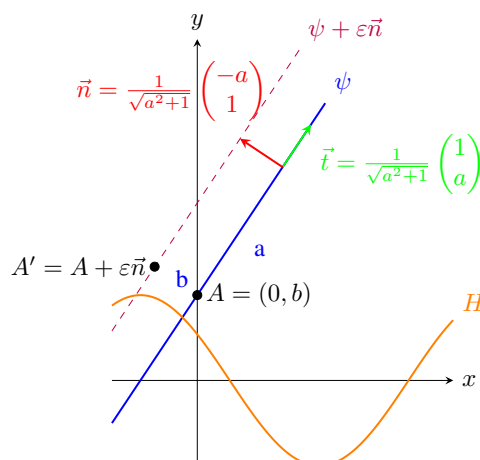


FIGURE 58 – Illustration de ψ , $\psi + \varepsilon \vec{n}$ et H avec la fonction $\psi : x \rightarrow ax + b$ et $H = \cos(\psi)$

La forme linéaire $\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - ax - b = 0\}$ déformée de $\varepsilon \vec{n}$ est donnée par $\psi + \varepsilon \vec{n} = ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b$. Vérifions l'égalité pour $H = \cos(\psi)$. D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\psi} H &\approx \frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \vec{n}) - H(\psi)] \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} [\cos(ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b) - \cos(ax + b)] \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} [\cos(ax + b) \underbrace{[\cos(\varepsilon \sqrt{a^2 + 1}) - 1]}_{\rightarrow 1 - \varepsilon^2(a^2 + 1)} - \sin(ax + b) \underbrace{\sin(\varepsilon \sqrt{a^2 + 1})}_{\rightarrow \varepsilon \sqrt{a^2 + 1}}] \\
 &\approx \underbrace{-\cos(ax + b) \varepsilon (a^2 + 1)}_{\rightarrow 0} - \sin(ax + b) \sqrt{a^2 + 1} \\
 &= -\sin(\psi) \sqrt{a^2 + 1}
 \end{aligned}$$

De l'autre part, nous avons :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} = -\sin(\psi) \nabla_X \psi = -\sin(\psi) \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} = -\frac{\sin(\psi)}{\sqrt{a^2 + 1}} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = -\sin(\psi) \frac{(a^2 + 1)}{\sqrt{a^2 + 1}} = -\sin(\psi) \sqrt{a^2 + 1}$$

L'égalité : $\boxed{\nabla_{\psi} H = \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}}$ est donc vérifiée.

In [9]:

```

from matplotlib.pyplot import *

# Params
a,b = 2,-1
n = 1000

# Initialisation of x, y & H
x = linspace (-1,1,n)
psi = a*x + b
H = cos(psi)
y = psi.copy()

# Calcul of Deltas
dH = H[1:]-H[:-1] # Calcul des \Delta H par H[i+1]-H[i]
dx = x[1:]-x[:-1] # Calcul des \Delta x par x[i+1]-x[i]
dy = y[1:]-y[:-1] # Calcul des \Delta y par y[i+1]-y[i]

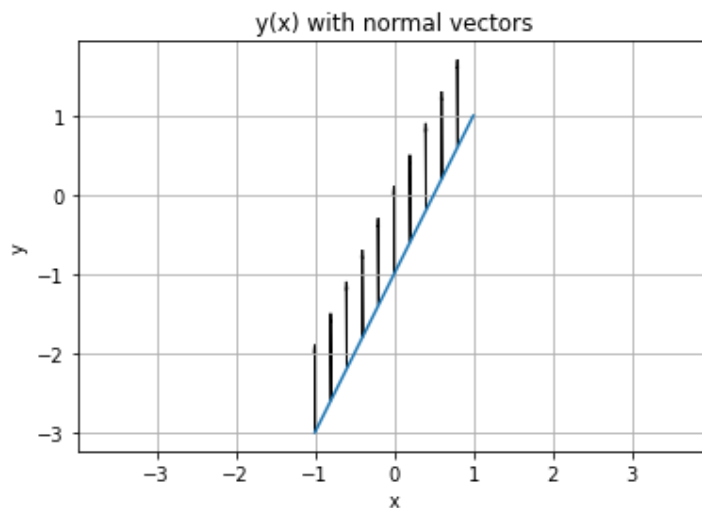
# Calcul of tangencial vector
t_x = 1 #dx / (dx**2+dy**2)**0.5 FAUX
t_x = ones(n-1) # Sous forme vectorielle
t_y = dy / (1+dy**2)**0.5 # (dx**2+dy**2)**0.5 FAUX

# Calcul of normal vector
n_x = - t_y
n_y = t_x

dhdy=dH/dy
dhdx=dH/dx

# Plot verification of normal vectors
plot(x,y)
[arrow(x[i],y[i],n_x[i],n_y[i], head_width=0.02, head_length=0.1, fc='k', ec='k') for i in range(n-1)]
grid('on')
xlabel("x")
ylabel('y')
title('y(x) with normal vectors')
axis('equal')
show()

```



In [10]:

```

# Calcul of numerical solution
H_psi_num = dhdx * n_x + dhdy * n_y
# Calcul of analytical solution according to our calculations
H_psi_anal = cos(a*x + b)

```

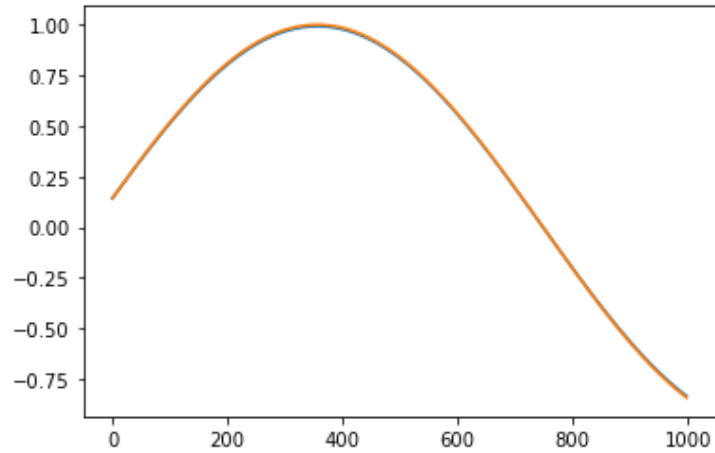
```

#for i in range(n-1):
    #print(,dhdX[i],-sin(PSI[i])*a,dhdy[i],-sin(PSI[i]))
    #print(H_psi_num[i],H_psi_anal[i])

plt.plot(H_psi_num)
plt.plot(H_psi_anal)
plt.plot()

```

Out[10]: []



In []:

In []:

In []:

OptiMorph + Saint-Venant, differenciation automatique ?

Le graphe 57 ainsi que tous les travaux du chapitre 1 nous soulignent la nécessité d'utiliser une approche différente. Cette approche consistera donc à calculer l'hydrodynamique via un modèle reconnu, viable et robuste à savoir le modèle

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q &= 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \right) &= -g h \partial_x Z \end{cases}$$

peut être résolu par une méthode de volumes finis en posant le système d'edp comme un problème de Riemann. À l'aide de l'article :

A simple fully well-balanced and entropy preserving scheme for the shallow-water equations de CHRISTOPHE BERTHON, VICTOR MICHEL-DANSAC qui est résumé avec les schémas suivants :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q &= 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \right) &= -g h \partial_x Z. \end{cases}$$

The equations (2.1) describe the behavior of water in a one-dimensional char quantities are the water height $h(x, t) \geq 0$ and its depth-averaged discharge $q(x, t)$ such that $q = hu$. The constant $g > 0$ stands for the gravity, while the define the admissible states space by

$$\Omega = \{W = {}^t(h, q) \in \mathbb{R}^2; h \geq 0, q \in \mathbb{R}\}.$$

Let us note that the water height may vanish, which accounts for dry areas. For the sake of simplicity in the notations, we rewrite (2.1) under the followin

$$\partial_t W + \partial_x F(W) = s(W, Z), \quad W \in \Omega,$$

where

$$W = \begin{pmatrix} h \\ q \end{pmatrix}, \quad F(W) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \end{pmatrix}, \quad s(W, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g h \partial_x Z \end{pmatrix}$$

$$W_i^{n+1} = W_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{\Delta t}{2} \left(s_{i+\frac{1}{2}}^n + s_{i-\frac{1}{2}}^n \right)$$

The quantities $f_{i+\frac{1}{2}}^n$ and $s_{i+\frac{1}{2}}^n$ denote numerical approximations of the flux and source term, respectively, at the interface $x_{i+\frac{1}{2}}$. They are defined by

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} (fh)_{i+\frac{1}{2}}^n \\ (fq)_{i+\frac{1}{2}}^n \end{pmatrix} \text{ and } s_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ (S^t)_{i+\frac{1}{2}}^n \end{pmatrix}$$

Here, adopting clear notations, $(S^t)_{i+\frac{1}{2}}^n$ is given by :

$$(S^t)_{i+\frac{1}{2}}^n = \bar{S}^t(h_i^n, h_{i+1}^n, Z_i, Z_{i+1}),$$

where \bar{S}^t is defined by (4.13). The scheme then reads as follows :

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((fh)_{i+\frac{1}{2}}^n - (fh)_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \\ q_i^{n+1} &= q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((fq)_{i+\frac{1}{2}}^n - (fq)_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{\Delta t}{2} \left((S^t)_{i+\frac{1}{2}}^n + (S^t)_{i-\frac{1}{2}}^n \right), \end{aligned}$$

where the approximate fluxes are defined by (5.1) and

$$f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(W_i^n, W_{i+1}^n) = \frac{1}{2} (F(W_i^n) + F(W_{i+1}^n)) + \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^L}{2} (W_{i+\frac{1}{2}}^{L,*} - W_i^n) + \frac{\lambda_{i+\frac{1}{2}}^R}{2} (W_{i+\frac{1}{2}}^{R,*} - W_{i+1}^n).$$

$$\text{with } W_{i+\frac{1}{2}}^{L,*} = \begin{pmatrix} h_L^* (W_i^n, W_{i+1}^n) \\ q^* (W_i^n, W_{i+1}^n) \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad W_{i+\frac{1}{2}}^{R,*} = \begin{pmatrix} h_R^* (W_i^n, W_{i+1}^n) \\ q^* (W_i^n, W_{i+1}^n) \end{pmatrix}$$

$$\bar{S}^t \Delta x := \bar{S}^t(h_L, h_R, Z_L, Z_R) \Delta x$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } h_L = 0 \text{ and } h_R = 0, \\ -g[Z] \frac{h_R + h_L}{2} & \text{if } h_L = 0 \text{ or } h_R = 0, \\ -g[Z] \frac{2h_L h_R}{h_L + h_R} + \frac{g}{2} \frac{[h]_C^3}{h_L + h_R} & \text{otherwise,} \end{cases}$$

the flux calculation :



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



$$q^* = q_{HLL} + \frac{\bar{S}^t \Delta x}{\lambda_R - \lambda_L},$$

$$h_L^* = \min \left(\left(h_{HLL} - \frac{\lambda_R \bar{S}^t \Delta x}{\alpha^t (\lambda_R - \lambda_L)} \right)_+, \left(1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} \right) h_{HLL} \right)$$

$$h_R^* = \min \left(\left(h_{HLL} - \frac{\lambda_L \bar{S}^t \Delta x}{\alpha^t (\lambda_R - \lambda_L)} \right)_+, \left(1 - \frac{\lambda_L}{\lambda_R} \right) h_{HLL} \right)$$

where $[X] = X_R - X_L$. For the sake of simplicity, let us now introduce the following notations :

$$(\lambda_R - \lambda_L) h_{HLL} = \lambda_R h_R - \lambda_L h_L - [q]$$

$$(\lambda_R - \lambda_L) q_{HLL} = \lambda_R q_R - \lambda_L q_L - \left[\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \right].$$

$$\lambda_L = \min(-|u_L| - c_L, -|u_R| - c_R, -\varepsilon_\lambda),$$

$$\lambda_R = \max(|u_L| + c_L, |u_R| + c_R, \varepsilon_\lambda),$$

with $c = \sqrt{gh}$ and ε_λ to be fixed in the numerical applications.

Ce modèle a pu être implémenté rapidement en fortran / python. La suite logique serait donc :

- Utiliser la différenciation automatique pour calcul $\nabla_\psi H$
- Recoder Optimorph en fortran pour obtenir des temps de calculs réduits et éviter de faire des aller / retour entre python et fortran

les premières recherches sur la différenciation automatique nous ont montré qu'avec ce formalisme, on peut définir une fonction : $f(x, y, z) = s$ et la différenciation automatique rendra une fonction : $f(x, x', y, y', z, z') = (s, s')$. En appliquant à notre fonction de Saint-Venant, on aurait donc initialement $sv(h_0, u_0, \psi_0) = (h, u, \psi_0)$ et donc en différenciant : $sv(h_0, h_0', u_0, u_0', \psi_0, \psi_0') = (h, h', u, u', \psi_0, \psi_0')$? Comment donc obtenir $\nabla_\psi H$???

Rédaction

Debrief



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 50 : 24/10/22-28/10/22

Vacances



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 49 : 17/10/22-21/10/22

```
!=====
program sv
!=====

! Declarations
implicit none
integer :: i,j,k,n
real(kind=kind(0.d0)) :: dt,dx,Tf,t,CFL,L,g,C,slope_hight,eps_lambda,
↪ a,lambdaL,lambdaR,uL,uR,hL,hR,qL,qR,zL,zR,hLL,qLL,S_barreDx
real(kind=kind(0.d0)) :: alpha,t1,t2
↪ Z,x,bosse_1,bosse_2,lambL,lambR,Sbdx,qStar,hLStar,hRStar
real(kind=kind(0.d0)), dimension(:), allocatable ::
↪ f_h_p,f_q_p,f_h_n,f_q_n
real(kind=kind(0.d0)), dimension(:,:), allocatable :: W,fW

CALL CPU_TIME(t1)
n = 1000
L = 25.d0
slope_hight = 0.6
dx = L/(n-1)
t = 0.d0
Tf = 10
CFL = 0.7 ! doit être inférieure à 1
g = 9.81
C = 1.5
eps_lambda = 10**(-10)

! ----- Allocation des listes -----
allocate(W(2,n),FW(2,n))
allocate(x(n),Z(n),bosse_1(n),bosse_2(n),lambL(n),lambR(n),Sbd,
↪ x(n),qStar(n),hLStar(n),hRStar(n))
allocate(f_h_p(n),f_q_p(n),f_h_n(n),f_q_n(n))

! ----- Corps du programme -----

DO i=1,n ! Conditions initiales
if (i*dx<0.5) then
W(1,i)=0.8 !h
W(2,i)=0.d0 !q
endif
if (i*dx>=0.5) then
W(1,i)=0.8 !h
W(2,i)=0.d0 !q
endif
x(i) = dx * (i-1)
Z(i) = slope_hight * (i-1) / (n-1)
bosse_1(i) = -0.07*(x(i)-10)*(x(i)-14)
bosse_2(i) = -0.3*(x(i)-1)*(x(i)-5)
if (bosse_1(i)<0) then
bosse_1(i) = 0
```

```

endif
if (bosse_2(i)<0) then
bosse_2(i) = 0
endif
ENDDO

Z = Z+bosse_1 ! Ajoute une bosse à Z
W(1,:) = W(1,:) - Z
W(1,:) = W(1,:) + bosse_2

! Boucle de temps
DO WHILE (t<Tf)

DO i=1,n-1
hL = W(1,i)
hR = W(1,i+1)
qL = W(2,i)
qR = W(2,i+1)
uL = qL/hL
uR = qR/hR
ZL = Z(i)
ZR = Z(i+1)
CALL calc_lambdaL(uL,uR,hL,hR,eps_lambda,lambdL)
CALL calc_lambdaR(uL,uR,hL,hR,eps_lambda,lambdR)
lambL(i) = lambdL
lambR(i) = lambdR

hHLL = (lambdR * hR - lambdL*hL - (qR-qL))/(lambdR - lambdL)
qHLL = (lambdR * qR - lambdL*qL -
↪ (qR**2/hR+0.5*g*hR**2-(qL**2/hL+0.5*g*hL**2)))/(lambdR - lambdL)

CALL calc_S_barreDx(hL,hR,ZL,ZR,dx,C,g,S_barreDx)
Sbdx (i) = S_barreDx

qStar(i) = qHLL+ 1/(lambdR-lambdL)*S_barreDx

alpha = -qStar(i)**2/hL/hR+g*(hL+hR)/2

hLStar(i) = hHLL - lambdR/(alpha*(lambdR-lambdL))*S_barreDx
hRStar(i) = hHLL - lambdL/(alpha*(lambdR-lambdL))*S_barreDx
ENDDO

dt=CFL*dx/2/max(maxval(lambL),maxval(lambR)) !Nouveau pas de temps

CALL W_to_FW(W,g,FW)

!Calcul des Fi+1/2 et Fi-1/2
f_h_p(2:n-1)=0.5*(FW(1,2:n-1)+FW(1,3:n))+lambL(2:n-1)*0.5*(hLStar(2:n-1)-W(1,2:n-1))
f_q_p(2:n-1)=0.5*(FW(2,2:n-1)+FW(2,3:n))+lambL(2:n-1)*0.5*(qStar(2:n-1)-W(2,2:n-1))

f_h_n(2:n-1)=0.5*(FW(1,1:n-2)+FW(1,2:n-1))+lambL(1:n-2)*0.5*(hLStar(1:n-2)-W(1,1:n-2))
f_q_n(2:n-1)=0.5*(FW(2,1:n-2)+FW(2,2:n-1))+lambL(1:n-2)*0.5*(qStar(1:n-2)-W(2,1:n-2))

!Schéma VF

```

```

W(1,2:n-1) = W(1,2:n-1) - dt/dx * (f_h_p(2:n-1) - f_h_n(2:n-1))
W(2,2:n-1) = W(2,2:n-1) - dt/dx * (f_q_p(2:n-1) - f_q_n(2:n-1)) + dt/dx/2
→ * (Sbdx(2:n-1) + Sbdx(1:n-2))

!Boundary Condition
W(1,1) = W(1,2) + dx*slope_hight/L
W(1,n) = W(1,n-1) - dx*slope_hight/L

W(2,1) = W(2,2)
W(2,n) = W(2,n-1)

t=t+dt
ENDDO
CALL CPU_TIME(t2)
print*,t2-t1

! Ecriture de hk
OPEN(UNIT=48,FILE='sol_f.dat')
DO i=1,n
WRITE(48,*) W(1,i)
ENDDO
CLOSE(48)

!=====
! SUBROUTINES
!=====
CONTAINS

SUBROUTINE W_to_FW(W,g,FW) !Passe de W (conservatif) à FW (non
→ conservatif)
real (kind = 8), intent(in) :: g
real (kind = 8), dimension (:,:), allocatable, intent(in) :: W
real (kind = 8), dimension (:,:), allocatable, intent(inout) :: FW
FW(1,:) = W(2,:) !h
FW(2,:) = W(2,:) **2 / W(1,:) + 0.5*g*W(1,:) **2 !q*q/h+1/2*g*h**2
RETURN
END SUBROUTINE W_to_FW

SUBROUTINE calc_lambdaL(uL,uR,hL,hR,eps_lambda,lambdaL) !Calcul of
→ LambdaL
real (kind = 8), intent(in) ::
→ uL,uR,hL,hR,eps_lambda
real (kind = 8), intent(out) :: lambdaL
lambdaL = min(-abs(uL)-sqrt(g*hL), -abs(uR)-sqrt(g*hR), -eps_lambda)
RETURN
END SUBROUTINE calc_lambdaL

SUBROUTINE calc_lambdaR(uL,uR,hL,hR,eps_lambda,lambdaR) !Calcul of
→ LambdaR
real (kind = 8), intent(in) ::
→ uL,uR,hL,hR,eps_lambda
real (kind = 8), intent(out) :: lambdaR
lambdaR = max(abs(uL)+sqrt(g*hL), abs(uR)+sqrt(g*hR), eps_lambda)
RETURN
END SUBROUTINE calc_lambdaR

```

```

SUBROUTINE calc_S_barreDx (hL,hR,ZL,ZR,dx,C,g,S_barreDx) !Calcul of
↪ S_barreDx
    real (kind = 8), intent(in) ::
↪ hL,hR,ZL,ZR,dx,C,g
    real (kind = 8), intent(out) :: S_barreDx
    IF (abs(hR-hL).LE.C*dx) THEN
        S_barreDx = -g*2*hL*hR/(hL+hR)*(ZR-ZL)+g/2*(hR-hL)**3/(hL+hR)
    ELSE
        S_barreDx =
↪ -g*2*hL*hR/(hL+hR)*(ZR-ZL)+g/2*(sign(1.d0,hR-hL)*C*dx)**3/(hL+hR)
    ENDIF
    RETURN
END SUBROUTINE calc_S_barreDx

!=====
end program sv
!=====

```

Un modèle Saint-Venant à fond quelconque

Pourquoi pas commencer à résoudre un Saint-Venant à fond quelconque pour ensuite l'utiliser dans notre programme OptiMorph. Ce modèle présentant les équations 1D suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q &= 0, \\ \partial_t q + \partial_x \left(\frac{q^2}{h} + \frac{1}{2} g h^2 \right) &= -g h \partial_x Z \end{cases}$$

peut être résolu par une méthode de volumes finis en posant le système d'edp comme un problème de Riemann. À l'aide de l'article :

A simple fully well-balanced and entropy preserving scheme for the shallow-water equations de CHRISTOPHE BERTHON, VICTOR MICHEL-DANSAC, on peut implémenter facilement ce modèle. On va dans un premier temps l'implémenter en Python puis l'idée à terme serait de le transférer en fortran puis le différencier selon ψ de manière automatique avec *tapenade*.

OptiFortran ?

Si on veut utiliser la différenciation automatique ainsi qu'un modèle plus coûteux en calcul, il est préférable de passer tout le code OptiMorph en fortran. Ceci permettrait d'optimiser les temps de calculs.

Papier chinois

Envoyé, en attente d'attribution au reviewer.

Hadamard

En pause, débat avec M. Mohammadi ? Affaire à suivre ... Code de M. Mohammadi ci-dessous :

```

from matplotlib.pyplot import *
# Params
a,b = 2,-1
n = 1000
# Initialisation of x, y & H
x = linspace (-1,1,n)
psi = a*x + b
H = cos(psi)
y = psi.copy()
# Calcul of Deltas

```

```

dH = H[1:]-H[:-1] # Calcul des \Delta H par H[i+1]-H[i]
dx = x[1:]-x[:-1] # Calcul des \Delta x par x[i+1]-x[i]
dy = y[1:]-y[:-1] # Calcul des \Delta y par y[i+1]-y[i]
# Calcul of tangencial vector
t_x = 1 #dx / (dx**2+dy**2)**0.5 FAUX
t_y = dy / (1+dy**2)**0.5 #(dx**2+dy**2)**0.5 FAUX
# Calcul of normal vector
n_x = - t_y
n_y = t_x

dhdy=dH/dy
dhdx=dH/dx

# Calcul of numerical solution
H_psi_num = dhdx * n_x + dhdy * n_y
#Calcul of analytical solution according to our calculations
H_psi_anal = -sin(psi[1:n]) #*(a**2+1)**0.5 FAUX

#for i in range(n-1):
#print(, dhdx[i], -sin(psi[i])*a, dhdy[i], -sin(psi[i]))
#print(H_psi_num[i], H_psi_anal[i])

plt.plot(H_psi_num)
plt.plot(H_psi_anal)
plt.plot()

```

Interrogations :

- Pourquoi ces vecteurs "normaux" ? Ce vecteur n'est pas unitaire ?
- Pourquoi notre solution analytique est $-\sin(\psi)$ alors qu'on cherche la dérivée droite et non partielle ?

MCE

Les 32 heures sont réparties de la manière suivante :

- 3H : Outils de modélisation hydro-morphodynamique littorale et portuaire
- 12H : Hydromorphodynamisme littoral et portuaire avancé (FreeFem : Agitation portuaire / Créations de forçages de hauteurs d'eau synthétiques à partir d'un spectre / Optimisation ?)
- 17H : Encadrement de stages, jury de master

CST

Toujours en cours de réflexions.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 48 : 10/10/22-14/10/22

Semaine de conférence à Chatou.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 45-47 : 17/09/22-07/10/22

Papier chinois

Prêt à être envoyé. Il manque plus qu'à vérifier l'anonymisation.

Rédaction du chap 1 sur les tentatives d'implémentation de la fonctionnelle

- Rédaction en cours, bien avancée, voir doc de thèse.
- Création de nouvelles figures
- Organisation en ajoutant chaque figure et son script

Présentation pour JNGCGC2022

- Présentation terminée
- Préparation en cours

CSI

Date limite le 4 octobre mais pas de réponses de l'ED ?

Cas de comparaison en bassin

Code pour passer de spectre à série temporelle : ok.

Hadamard

Vérifier les hypothèses, espaces, dérivés composées,...



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 44 : 12/09/22-16/09/22

To do liste :

- Envoyer l'article au chinois avec les corrections de SAM
- Creuser les nouveaux modèles hydro par dissipation d'énergie ?
- Bibliographie morphodynamique globale
- Rédaction du chap 1 sur les tentatives d'implémentation de la fonctionnelle
- Formation XBeach dans le but de créer un article sur :
 - Comparaison 1D OptiMorph / XBeach / LIP 11D
 - Comparaison OptimMorph multi 1D / XBeach 2D
- Préparer présentation pour JNGCGC2022
- CSI
- Se mettre à jour sur la différentielle en composée, les espaces etc...
- Rédaction de l'histoire pour aller jusqu'au moment où on arrêtera le modèle shoaling (chap1)

Gradient de forme au sens de Hadamard

Nous allons utiliser l'approche décrite dans [1, 2]...

Nous considérons $\nabla_{\psi} H$ au sens de Hadamard suivant la définition :

$$\nabla_{\psi} H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \vec{n}) - H(\psi)] \right)$$

où \vec{n} est la normale à la forme ψ .

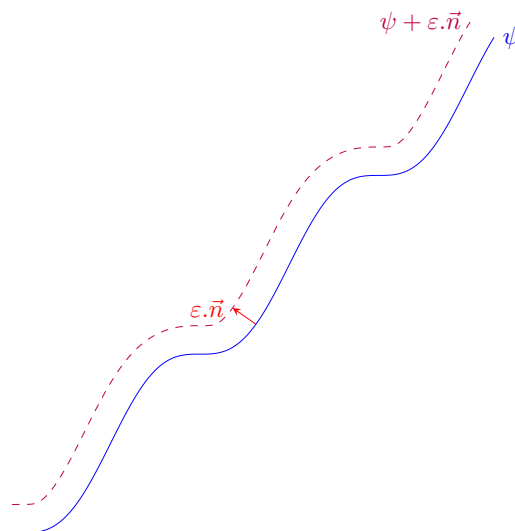


FIGURE 59 – Illustration de ψ et $\psi + \varepsilon \vec{n}$ avec la fonction $\psi : x \rightarrow \cos(x) + x$

A l'ordre 1 nous pouvons considérer l'approximation suivante :

$$\nabla_{\psi} H \approx \frac{1}{\varepsilon} [H(\psi) + \varepsilon \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} - H(\psi)] \quad (3)$$

ainsi, nous avons l'égalité :

$$\boxed{H_{\psi} \approx \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}} \quad (4)$$

illustrons ce développement sur des exemples simples.

Dans la suite, pour simplifier, nous considérons la relation $H = \psi^2$ décrivant la hauteur d'eau de la houle.

Forme plate

La forme plate $\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - c = 0\}$ déformée de $\varepsilon \vec{n}$ est donnée par $\psi + \varepsilon \vec{n} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - c - \varepsilon = 0\}$.

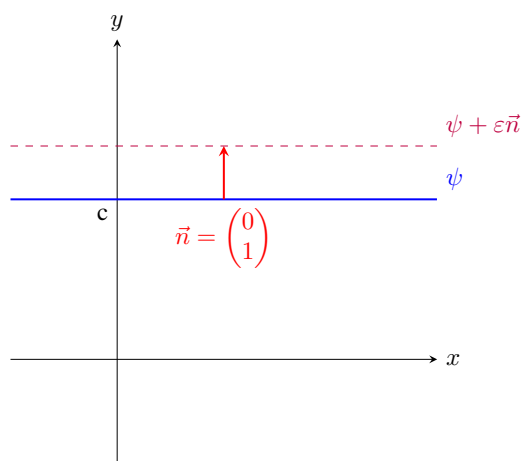


FIGURE 60 – Illustration de ψ et $\psi + \varepsilon \vec{n}$ avec la fonction $\psi : x \rightarrow c$

Soit :

$$\begin{aligned} \psi &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - c = 0\} \\ H &= \psi^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - c^2 = 0\} \end{aligned}$$

alors, on a d'une part :

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi} H &\approx \frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \vec{n}) - H(\psi)] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\cancel{\psi^2} + 2\psi\varepsilon + \underbrace{\varepsilon^2}_{\rightarrow 0} - \cancel{\psi^2}] \\ &= 2\psi \end{aligned}$$

d'une autre part :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} = 2\psi \nabla_X(\psi) \cdot \vec{n} = 2\psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\psi$$

et donc

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} = H_{\psi} = 2\psi} \quad (5)$$

Forme linéaire avec \vec{n} normalisé

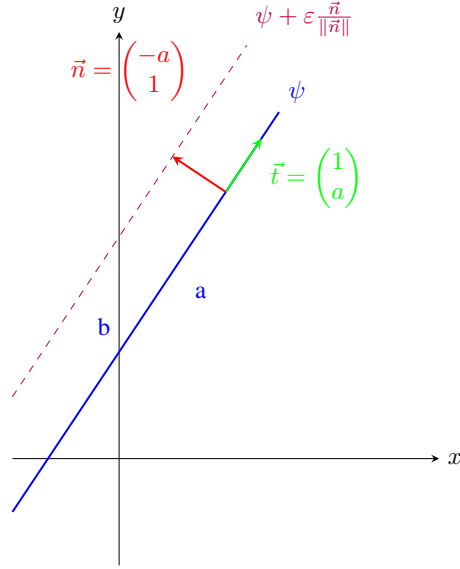


FIGURE 61 – Illustration de ψ et $\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ avec la fonction $\psi : x \rightarrow ax + b$

La forme linéaire $\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - ax - b = 0\}$ déformée de $\varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ est donnée par $\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$. On sait que le point $A(0, b)$ est contenu sur la droite. Le point $A' = A + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ est donc contenu sur la nouvelle droite translaté et a pour coordonnées :

$A' = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -a\varepsilon \\ b\|\vec{n}\| + \varepsilon \end{pmatrix}$. On en déduit :

$$\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = ax + b'$$

avec :

$$b' = b + \frac{\varepsilon}{\|\vec{n}\|} (a^2 + 1) = \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b$$

on en déduit l'équation :

$$\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = ax + b'$$

$$\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b$$

Vérifions l'égalité (3) pour $H = \psi^2$. D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_{\psi} H &\approx \frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}) - H(\psi)] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [(ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b)^2 - (ax + b)^2] \\ &= \frac{1}{\varepsilon} [\varepsilon^2 (a^2 + 1) + 2\varepsilon (ax + b) \sqrt{a^2 + 1}] \\ &= \underbrace{\varepsilon (a^2 + 1)}_{\rightarrow 0} + 2\psi \sqrt{a^2 + 1} \\ &= 2\psi \sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

De l'autre part, nous avons :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} = 2\psi \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{2\psi}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = 2\psi \frac{(1 + a^2)}{\sqrt{1 + a^2}} = 2\psi \sqrt{a^2 + 1}$$

L'égalité : $\boxed{H_\psi = \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}}$ est donc vérifiée.

De plus, si on prends $a = 0$, on retrouve bien $\nabla_\psi H \approx 2\psi$.

Forme linéaire avec \vec{n} normalisé avec $H = \cos(\psi)$

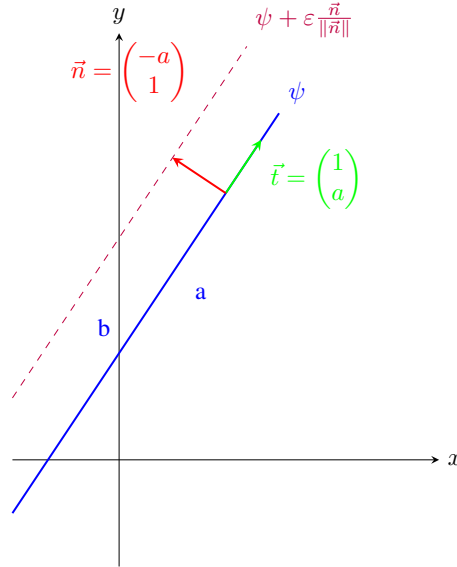


FIGURE 62 – Illustration de ψ et $\psi + \varepsilon \vec{n}$ avec la fonction $\psi : x \rightarrow ax + b$

La forme linéaire $\psi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - ax - b = 0\}$ déformée de $\varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ est donnée par $\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b$.

Vérifions l'égalité (3) pour $H = \cos(\psi)$. D'une part, nous avons :

$$\begin{aligned}
 \nabla_\psi H &\approx \frac{1}{\varepsilon} [H(\psi + \varepsilon \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}) - H(\psi)] \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} [\cos(ax + \varepsilon \sqrt{a^2 + 1} + b) - \cos(ax + b)] \\
 &= \frac{1}{\varepsilon} [\cos(ax + b) \underbrace{[\cos(\varepsilon \sqrt{a^2 + 1}) - 1]}_{\rightarrow 1 - \varepsilon^2(a^2 + 1)} - \sin(ax + b) \underbrace{\sin(\varepsilon \sqrt{a^2 + 1})}_{\rightarrow \varepsilon \sqrt{a^2 + 1}}] \\
 &\approx \underbrace{-\cos(ax + b) \varepsilon (a^2 + 1)}_{\rightarrow 0} - \sin(ax + b) \sqrt{a^2 + 1} \\
 &= -\sin(\psi) \sqrt{a^2 + 1}
 \end{aligned}$$

De l'autre part, nous avons :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} = -\sin(\psi) \nabla_X \psi = -\sin(\psi) \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$\overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = -\frac{\sin(\psi)}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = -\sin(\psi) \frac{(1 + a^2)}{\sqrt{1 + a^2}} = -\sin(\psi) \sqrt{a^2 + 1}$$

L'égalité : $\boxed{H_\psi = \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}}$ est donc vérifiée.

Numérique

Dans la suite, on va comparer cette approximation de H_ψ numérique avec la version de H_ψ analytique dans Optimorph. On a donc besoin de :

- La valeur de ψ
- Une expression de $\nabla_\psi H$

On doit simplement calculer via la formule :

$$H_\psi \approx \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n}$$

on pose : $\overrightarrow{\nabla_X H} = \begin{pmatrix} \frac{dH}{dx} \\ \frac{dH}{d\psi} \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$ et on a donc :

$$\begin{aligned} H_\psi &\approx \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} \\ &= \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left[-\frac{dH}{dx} d\psi + \frac{dH}{d\psi} dx \right] \\ &= \frac{dH}{\|\vec{n}\|} \left[\frac{dx^2 - d\psi^2}{d\psi dx} \right] \end{aligned}$$

et donc :

$$H_\psi \approx = \frac{dH(dx^2 - d\psi^2)}{d\psi dx \sqrt{dx^2 + d\psi^2}} \quad (6)$$

en utilisant ces résultats, on n'obtient pas de corrélation entre la solution analytique et numérique comme on peut voir dans l'annexe 1. En essayant quelques solutions, on arrive au formalisme suivant :

on pose : $\overrightarrow{\nabla_X H} = \begin{pmatrix} -\frac{dH}{dx} \\ \frac{dH}{d\psi} \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \begin{pmatrix} -d\psi \\ dx \end{pmatrix}$. Ici, on ne trouve pas de justification pour ce " - " étrangement. Et on a :

$$\begin{aligned} H_\psi &\approx \overrightarrow{\nabla_X H} \cdot \vec{n} \\ &= \frac{1}{\|\vec{n}\|} \left[\frac{dH}{dx} d\psi + \frac{dH}{d\psi} dx \right] \\ &= \frac{dH}{\|\vec{n}\|} \left[\frac{dx^2 + d\psi^2}{d\psi dx} \right] \\ &= \frac{dH \sqrt{dx^2 + d\psi^2}}{d\psi dx} \end{aligned}$$

et donc :

$$H_\psi \approx = \frac{dH \sqrt{dx^2 + d\psi^2}}{d\psi dx} \quad (7)$$

Cette équation nous permet d'obtenir une corrélation entre la solution analytique et numérique comme on peut voir dans l'annexe 2. On peut essayer de quantifier cette erreur avec la partie suivante :

Vérification de la solution numérique sur un cas simple

On peut vérifier cette approximation en calculant numériquement la solution du problème . On calcul l'erreur pour des points correspondant à un pas spatial $\Delta x = [10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 0.1, 1]$ et on obtient la courbe suivante :

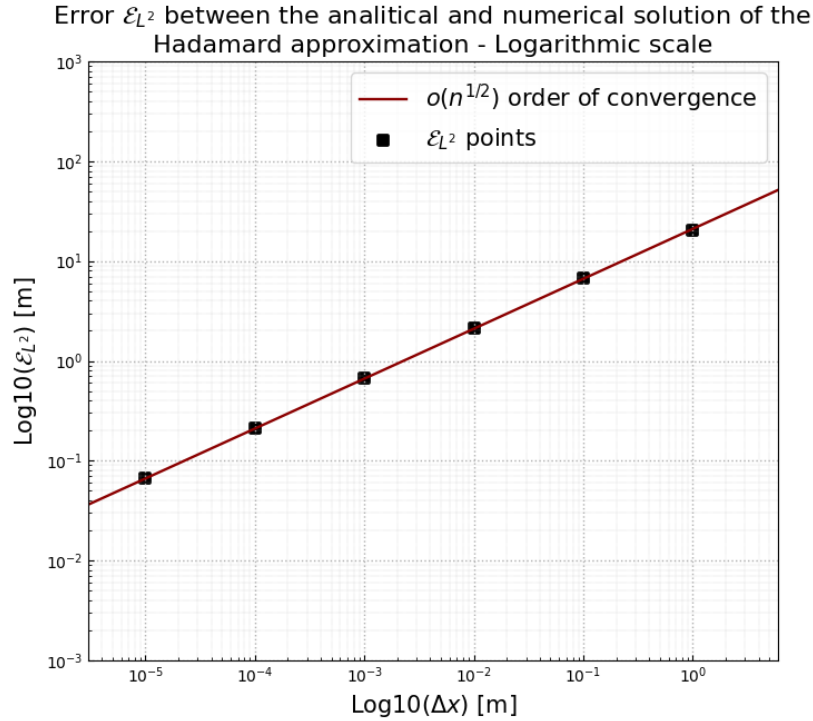


FIGURE 63 – Erreur L^2 et ordre de convergence pour une comparaison entre la solution analytique du problème simple avec $H = \cos(\psi)$

Les sources d'erreurs pour ce calcul sont les suivantes :

- L'approximation dans le calcul du vecteur \vec{n} . Elle est nulle dans notre cas car ψ est linéaire
- Le calcul du gradient par différences finis

le premier point peut être amélioré via des méthodes de lissages comme par exemple la méthode de Savitsky-Golay [3, 4]. Le second point également en augmentant l'ordre du développement de Taylor. Cependant, ceci serait trop coûteux pour un résultat surement moindre.

Vérification de la solution numérique sur OptiMorph

En implémentant l'équation :

$$H_\psi = \frac{dH \sqrt{dx^2 + d\psi^2}}{d\psi dx} \quad (8)$$

dans OptiMorph, on peut comparer les différentes valeurs de H_ψ et obtenir par exemple la courbe suivante :

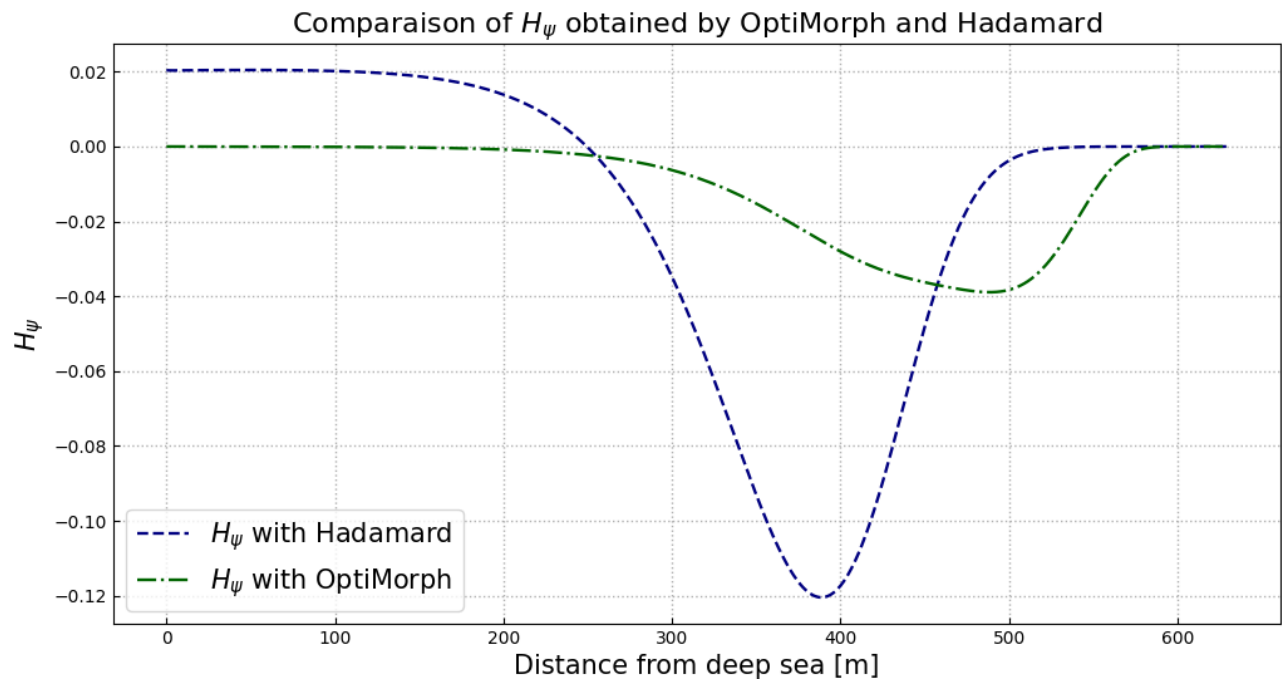


FIGURE 64 – Comparaison de H_ψ avec ma méthode d'OptiMorph et celle d'Hadamard

Ici, on arrive à une approximation de H_ψ trop loin de ce que l'on désire.

Annexe

Code associé à l'équation 6

```
from matplotlib.pyplot import *
a,b = -2,2
n = 200
x = linspace (-1,1,n)

psi = a*x + b
H = cos(psi)

dH = H[1:]-H[:-1]
dpsi = psi[1:]-psi[:-1]
dx = x[1:]-x[:-1]

H_psi_num = dH*(dx**2-dpsi**2)/(dx*dpsi)/(dx**2+dpsi**2)**0.5
H_psi_anal = -sin(psi)*(a**2+1)**0.5

plot (x ,H_psi_anal,label="$H_\psi$ analytical")
plot (x[:-1],H_psi_num, label ="$H_\psi$ numerical")
legend()
grid('on')
xlabel("x")
ylabel('$H_\psi$')
title('Comparaison of $H_\psi$ between analytical and numerical methods')
legend()
savefig('approx_1.png')
show()
```

ce qui nous renvoie la figure ci-dessous :

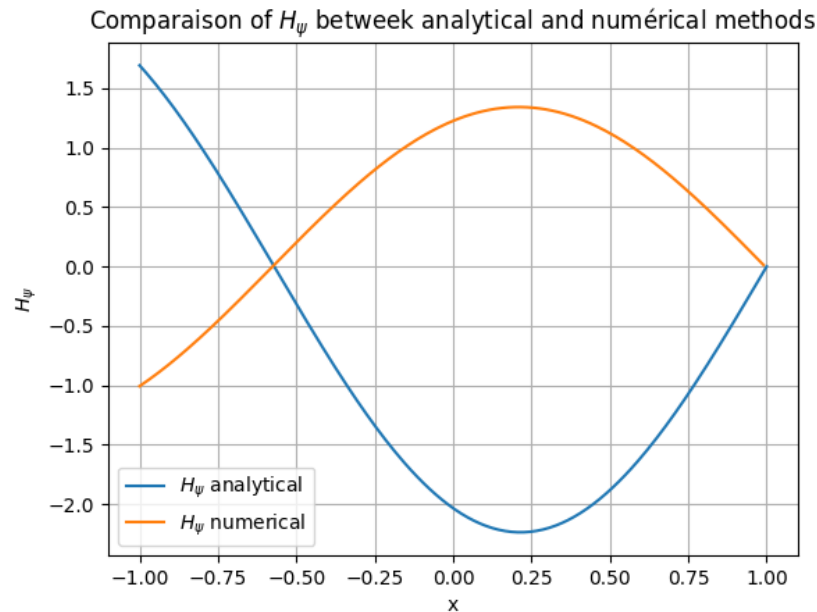


FIGURE 65 – Figure obtenue avec le code 1 ci-dessus via l'équation 6

Code associé à l'équation 7

```

from matplotlib.pyplot import *
a,b = -2,2
n = 200
x = linspace (-1,1,n)

psi = a*x + b
H = cos(psi)

dH = H[1:]-H[:-1]
dpsi = psi[1:]-psi[:-1]
dx = x[1:]-x[:-1]

H_psi_num = dH*(dx**2+dpsi**2)**0.5/(dx*dpsi)
H_psi_anal = -sin(psi)*(a**2+1)**0.5

plot (x ,H_psi_anal,label="$H_{\psi}$ analytical")
plot (x[:-1],H_psi_num, label ="$H_{\psi}$ numerical")
legend()
grid('on')
xlabel("x")
ylabel('$H_{\psi}$')
title('Comparaison of $H_{\psi}$ between analytical and num rical methods')
legend()
savefig('approx_2.png')
show()

```

ce qui nous renvoie la figure ci-dessous :

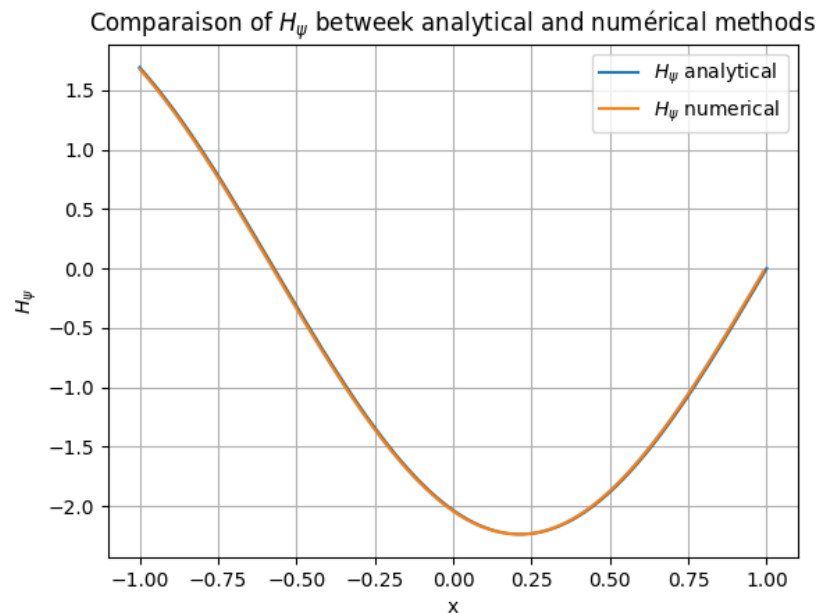


FIGURE 66 – Figure obtenue avec le code 1 ci-dessus via l quation 7

Bibliographie

- [1] B. Mohammadi. Global optimization, level set dynamics, incomplete sensitivity and regularity control. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 21(2) :61–68, February 2007. ISSN 1061-8562, 1029-0257. doi : 10.1080/10618560701455855. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10618560701455855>.
- [2] Bijan Mohammadi. Hadamard incomplete sensitivity and shape optimization. *Control and Cybernetics*, 39(3) :615–626, 2010. URL <http://eudml.org/doc/209717>.
- [3] Ronald Schafer. What Is a Savitzky-Golay Filter? [Lecture Notes]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 28(4) :111–117, July 2011. ISSN 1053-5888. doi : 10.1109/MSP.2011.941097. URL <http://ieeexplore.ieee.org/document/5888646/>.
- [4] William H. Press and Saul A. Teukolsky. Savitzky-Golay Smoothing Filters. *Computers in Physics*, 4(6) :669, 1990. ISSN 08941866. doi : 10.1063/1.4822961. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/cip/4/6/10.1063/1.4822961>.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 42-43 : 29/08/22-09/09/22

Semaine de reprise : administratif, bibliographie, corrections d'articles...

- ICCE soumis et inscription faite
- Correction du papier pour le journal chinois

Nouvelles

- M. Bouchette est en train de préparer le CSI. Les rapports etc sont prêts. Le CSI aura normalement lieu fin septembre
- Les travaux sur SWASH sont reportés jusqu'à nouvelle ordre car l'installation n'est plus effective sur PAGURE
- La partie "technique" est un peu en pause pour le moment. Focus du moment sur la rédaction

Choses à faire

- Rédaction de la thèse : état de l'art sur les différents types de modèles morphodynamiques
- Correction du papier "chinois" en cours
- Implémentation de la différence finis sur une courbe paramétrée
- Continuer les calculs de balance des moments sur l'ensemble du domaine quand SWASH sera opérationnel + courbes de sensibilité



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 37-38-39-40-41 : 25/07/22-26/08/22

Pause d'été : vacances



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER

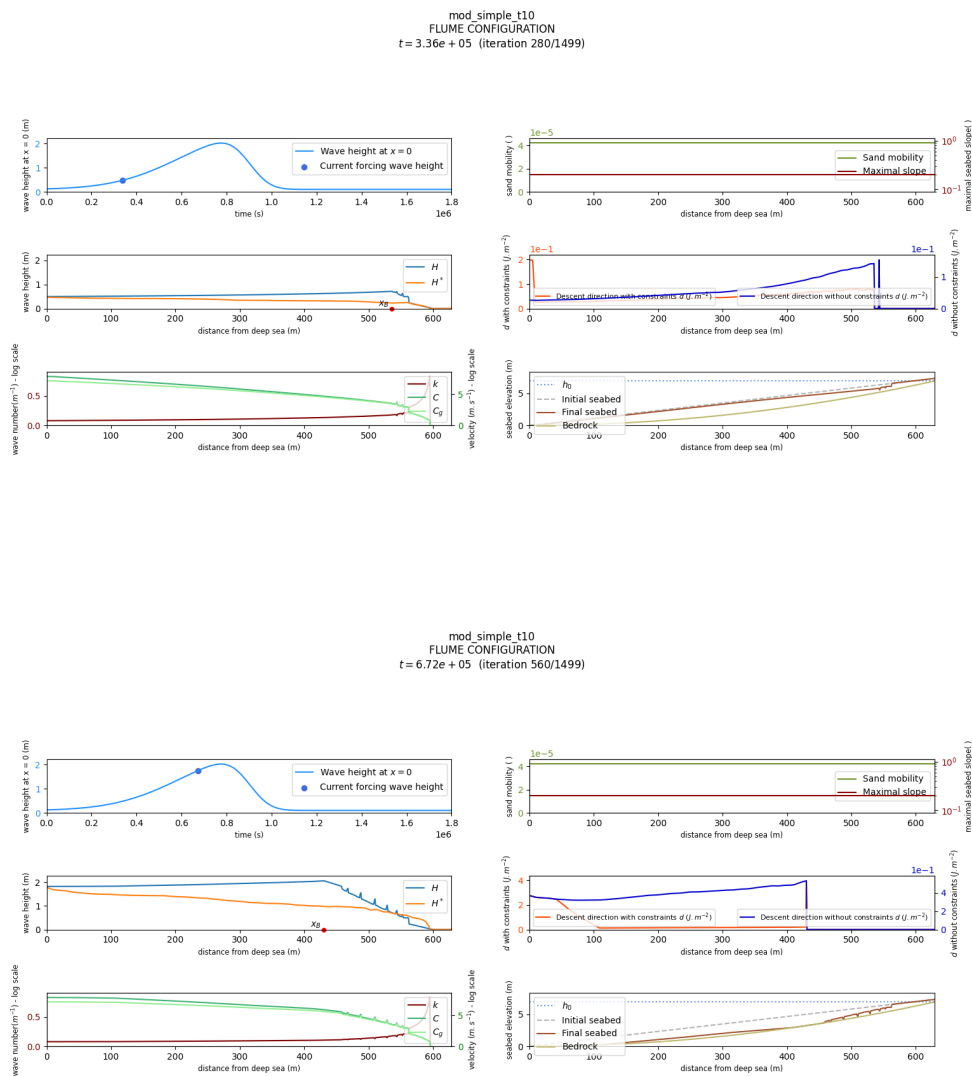


Compte rendu scientifique

Semaine 35-36 : 11/07/22-22/07/22

Gradient partiel avec modèle hydro simple et SWASH

En débbuguant le code à certains endroits, on obtient les résultats suivants à $T10$:



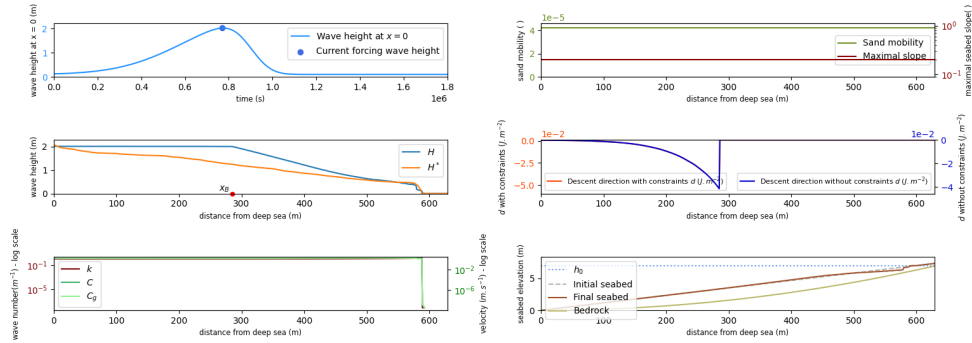
si par curiosité, on retourne voir ce que ça donne à $T2$, on obtient ça :



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



mod_simple t2
FLUME CONFIGURATION
t = 7.69e + 05 (iteration 640/1499)



qui est très proche de ce qu'on aurait obtenu en utilisant l'hydro d'OptiMorph.
On remarque ici que le gradient a donc une influence prédominante quelque soit le modèle hydro.

Différences finis sur courbe paramétrée

Essaie avec la fonction $\cos(x)^2$

Soit la fonction H définie par le paramétrage suivant :

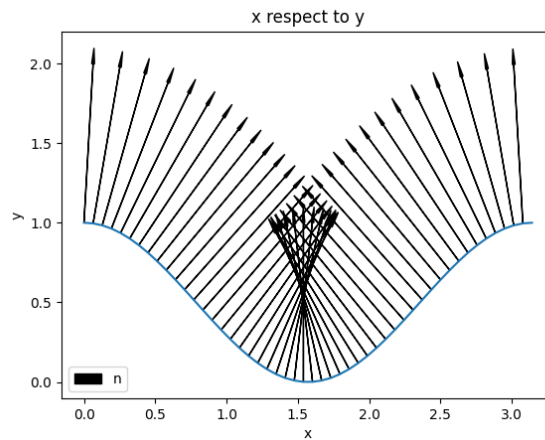
$$\begin{cases} x = \psi & \text{for } \psi \in [0, \pi] \\ y = \cos(\psi)^2 & \text{for } \psi \in [0, \pi] \end{cases}$$

où les $\psi_i \in [0, \pi]$ avec $i \in [0, n-1]$.

On a $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ et de même $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$. Avec donc la norme au point i : $\|n_i\| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

On peut déterminer un vecteur directeur :

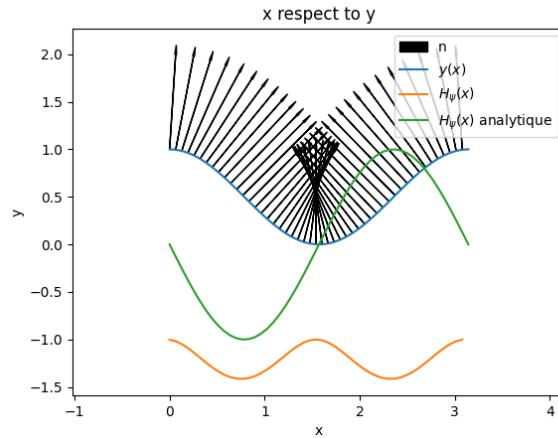
$$\vec{n}_i = \begin{pmatrix} -\frac{\Delta y}{\|n_i\|} \\ \frac{\Delta x}{\|n_i\|} \end{pmatrix}$$



Si on a :

$$H_\psi = \begin{bmatrix} \frac{\Delta H}{\Delta x} \\ \frac{\Delta H}{\Delta y} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \end{pmatrix}$$

on obtiendrait la figure suivante ?



avec le code ci-dessous ?

```
from matplotlib.pyplot import *

xlb = "x"
ylb = "y"
ttl = "x respect to y"

n = 50
psi = linspace(0,pi,n)

H = cos (psi) **2

x = psi
y = cos (psi) ** 2

dx = x[1:]-x[:-1]
dy = y[1:]-y[:-1]
dH = H[1:]-H[:-1]

norme = (dy**2 + dx**2)**0.5

nx= -dy / norme
ny= dx / norme

arrow(psi[0],H[0],nx[0],ny[0], head_width=0.02, head_length=0.1, fc='k',
      ec='k',label="n")
[arrow(psi[i],H[i],nx[i],ny[i], head_width=0.02, head_length=0.1, fc='k', ec='k')
 for i in range(1,n-1,1)]

H_psi = dH / dx * nx - dH / dy * ny

H_psi_a = - 2 * sin (psi) * cos(psi) #true solution

plot( psi, H, label="$y(x)$")
plot( psi[:-1], H_psi, label = "$H_\psi(x)$")
plot( psi, H_psi_a, label = "$H_\psi(x)$ analytique")
axis('equal')

xlabel(xlb)
ylabel(ylb)
```

```

title(ttl)
legend()
show()

```

Essaie sur une vraie fonction de H_ψ

En essayant de l'appliquer de manière analogue avec le code ci-dessous :

```

figure(figsize=(12,12))
xlb = "x"
ylb = "psi"
ttl = "x respect to y"

psi=loadtxt('psi_.txt')
H=loadtxt('Hstar_.txt')

n = len(psi)

x = linspace ( 0, n-1, n)
y = H.copy()

x = psi.copy()
dx = x[1:]-x[:-1]
dy = y[1:]-y[:-1]
dH = H[1:]-H[:-1]

norme = (dy**2 + dx**2)**0.5

nx= -dy / norme
ny= dx / norme

H_psi = dH / dx * ny - dH / dy * nx

plot( psi, H , label = "$H(\psi)$")
plot( psi[:-1] , H_psi, label = "$H\psi(\psi)$")
#axis('equal')
xlabel(xlb)
ylabel(ylb)
title(ttl)
legend()

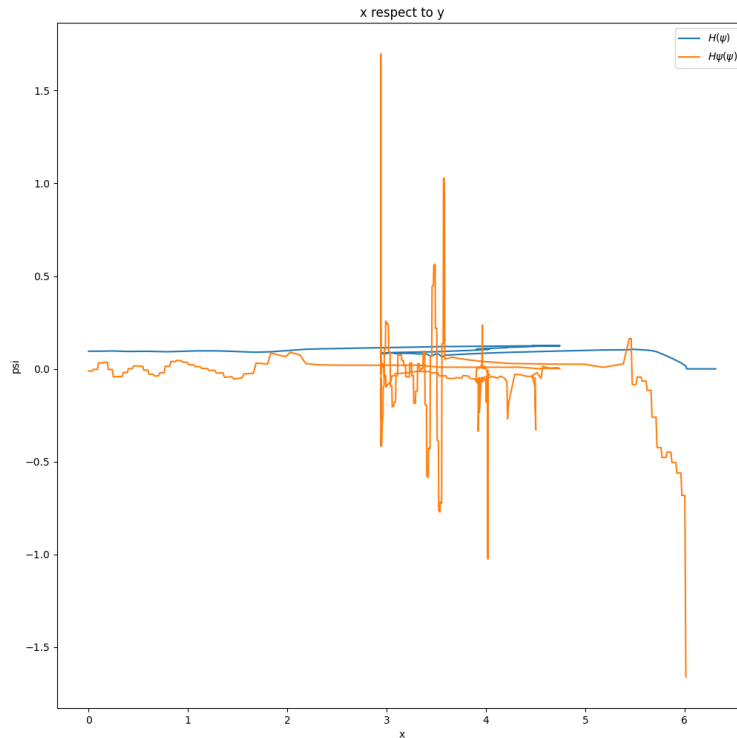
```

on obtient la figure suivante :



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER





Les pics pourraient être réglés en lissant la courbe mais ce problème est secondaire. Il convient dans un premier temps de confirmer la stratégie de dérivation qui n'est pas très claire dans nos têtes.

Balance des moments

On calcul sur le domaine entier la moyenne de chaque termes de la balance des moments (on pourrait faire l'intégrale). On obtient les valeurs suivantes :

Mtot	-1.2082625146629464
moyenne Mr	-4.648126448060682
moyenne Ma	0.05100940271708695
moyenne Ms	0.6669937491424599
moyenne CdMf	2.721860781538189

On remarque que le terme en S_{xx} est dominant (en valeur absolue). En essayant de raffiner le maillage, changer des paramètres (coefficient de manning),... On n'arrive pas à obtenir une moyenne totale proche de 0 ni même à une valeur de stabilité.

Correction papier "chinois"

En relecture du côté de Dam et de Sam.

Correction papier JNGCGC

Papier corrigé et approuvé. Suggestion de présentation **orale**.

Extended abstract ICCE

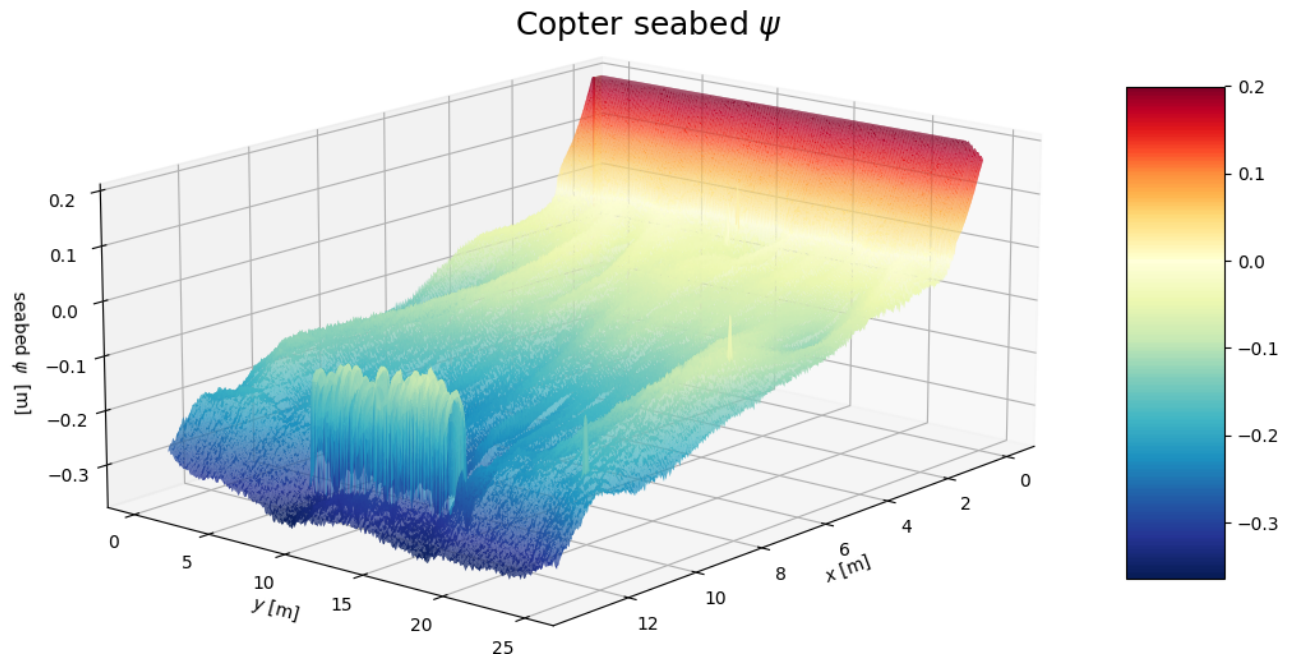
Abstract approuvé. Suggestion de présentation **orale**.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Pour l'extended abstract, reprendre la base de JNGCGC en ajoutant une étude pour corrélérer au mieux sur la base de données COPTER. Par exemple, ci-dessous, de la donnée de Copter avec un "géotube".



il serait intéressant de :

- relancer des simulations multi-1D avec les données de Copter pour voir si on peut obtenir une morphodynamique similaire à celle ci-dessus.

Compte rendu scientifique

Semaine 33-34 : 27/06/22-08/07/22

Balance des moments

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2)}_{M_a} + \underbrace{g\rho \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}}_{M_s} + \underbrace{\frac{1}{(\bar{\eta} + h)} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x}}_{M_r} + \underbrace{\frac{1}{(\bar{\eta} + h)} \bar{\tau}_b}_{C_d M_f} \quad [N.m^{-3}]$$

Obtention des différents termes :

- $U^2 = \bar{U}^2$ sur un temps $\tau \gg T_0$
- $\bar{\eta}$ se calcul sur un temps $\tau \gg T_0$
- S_{xx} se calcul sur un temps $\tau \gg T_0$ avec $S_{xx} = \left(2\frac{C_d}{C} - \frac{1}{2}\right) E = \frac{1}{8}\rho g \left(\frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{2}\right) H^2$
- $\bar{\tau}_b$ se calcul sur un temps $\tau \gg T_0$ avec $\tau_b = C_d \rho U^2$ avec $C_d = g n^2 h^{-1/3}$ avec n le coefficient de Manning

En lançant la simulation SWASH avec les conditions suivantes :

- $T_0 = 10$ s la période de vague
- $Tf = 180$, s le temps de simulation
- $\Delta t = 0.5$, s le pas de temps de la simulation
- $\Delta x = 1$, m le pas spatial de la simulation
- $H_0 = 2$ m la hauteur de forçage

sur la configuration suivante :

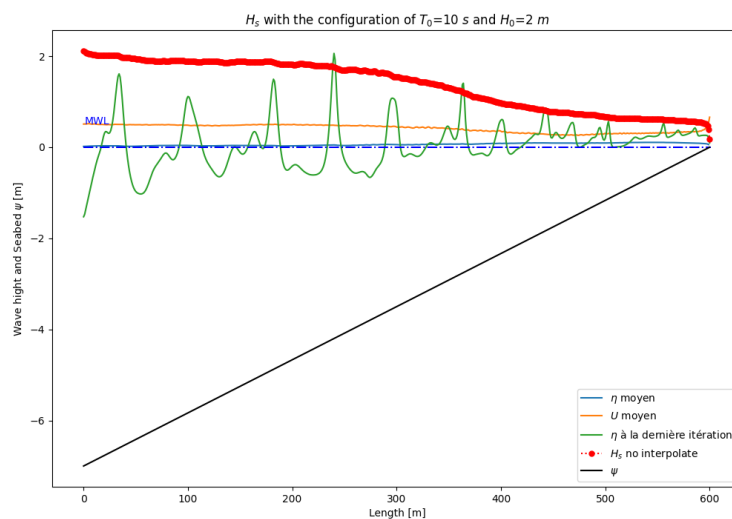


FIGURE 68 – Configuration

on peut tracer les différents termes moyens $\bar{\eta}$ et \bar{U} :

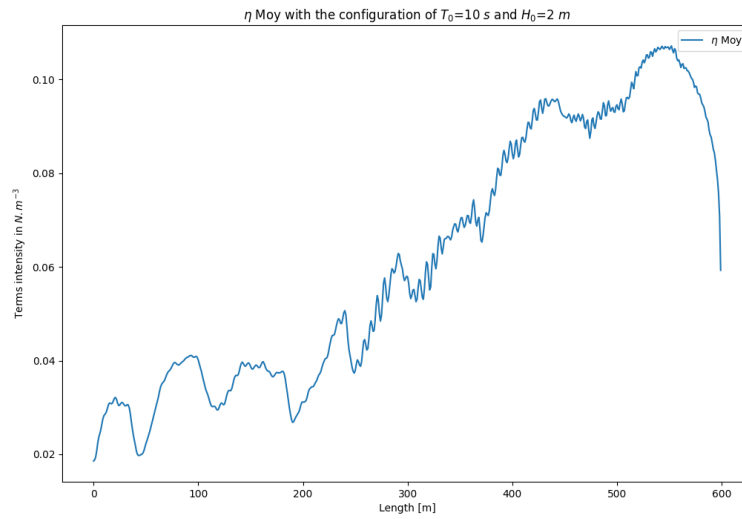


FIGURE 69 – $\bar{\eta}$

et \bar{U} :

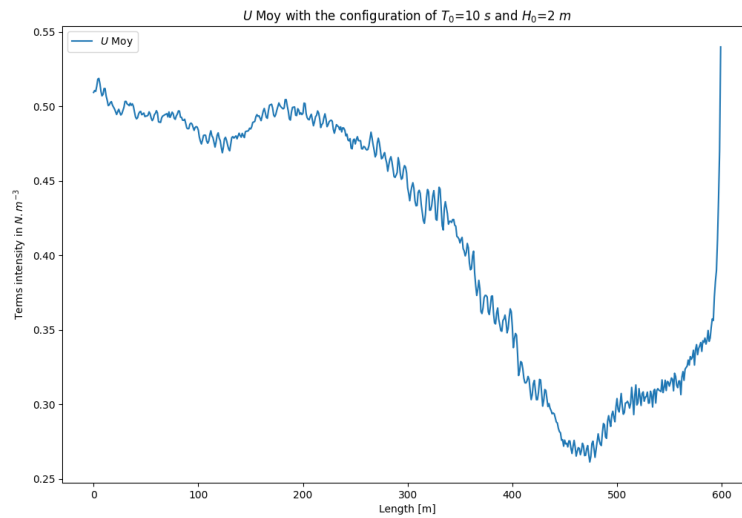


FIGURE 70 – \bar{U}

on remarque ici des **oscillations** et donc les dérivés vont de même osciller. Pourtant, le calcul moyenné a été fait sur un temps $\tau = 180\text{ s}$ soit la totalité de la simulation. On obtient tout de même la balance suivante :

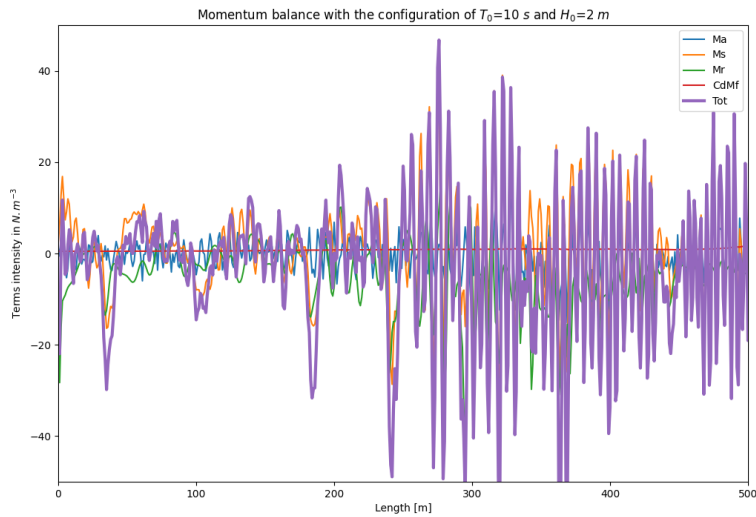


FIGURE 71 – Balance avec les différents termes

Sans surprise, on obtient de fortes oscillation car $\bar{\eta}$ et \bar{U} ne semblent pas moyennés correctement ...

Calcul explicite de k

En utilisant l'article de GUO 2002, on obtient l'expression suivante :

$$y = x^2 \left(1 - e^{-x^\beta}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$$

avec $\beta = 2.4901$ (trouvé numériquement), $x = h\sigma/\sqrt{gh}$ et $y = kh$. Ceci est une méthode de calcul explicite de k , ce qui permet d'accélérer les temps de calculs. L'erreur relative absolue est au maximum de 0.75%.

Sur la simulation classique de tempête d'une semaine, on a un temps de calcul de :

- $t = 234$ s pour le calcul classique avec Newton
- $t = 193$ s pour le calcul avec l'expression explicite

soit un gain d'environ 20 %, ce qui n'est pas négligeable. De plus, cette forme pourra nous aider pour calculer les dérivées etc. Bien-sûr, les résultats sont identiques sur le plan physique.

```
def k_guo(h, sigma, g):
    x = h * sigma / sqrt(g*h)
    beta = 2.4901
    return x**2/h * (1 - exp(-x**beta))**(-1/beta)
```

SWASH / OptiMorph

- Simulation avec les mêmes forçages :



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



try swan morpho T10
FLUME CONFIGURATION
t = 7.93e + 05 (iteration 660/1499)

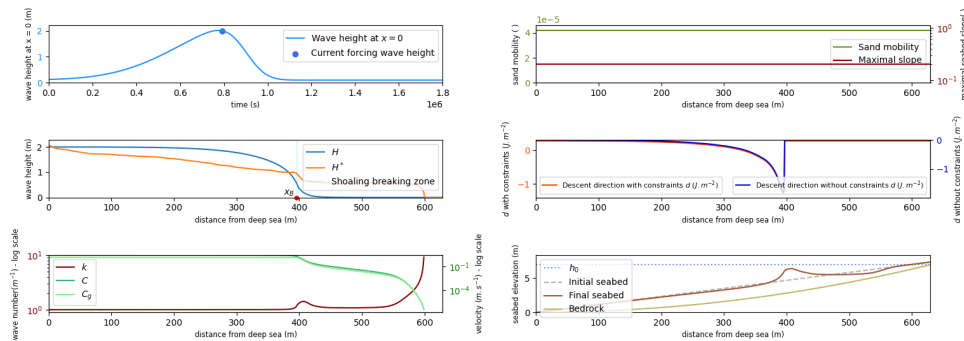


FIGURE 72 – Simulation avec SWASH : tempête d'une semaine, $H_{max}=2m$, périodes $T=2s$ (OptiMorph) et $T=10s$ (SWASH) avec morpho

Certains tests ont été effectués :

- Simulation avec la nouvelle manière de calculer k explicite : aucun changement (à part gain de vitesse de calcul)
- Couplage de SWASH avec un modèle hydro plus simple (shoaling 2 run) : crash sur k car accretion comme on avait sur la figure 138

En reprenant la chaine de calcul, il semblerait que ça soit le calcul de $\nabla_{\psi}\mathcal{H}$ qui pose problème car ce calcul s'appuie sur un modèle "tuné" avec de nombreuses disjonctions de cas etc. Suite sur la séance avec M. Bouchette.

Papier "chinois"

- Remarques de M. Bouchette

ICCE ?

- Abstract Authors Notified 29 Jul 2022
- Extended Abstract Deadline 2 Sep 2022

Question : qu'est-ce qui sera rédigé ?

Rapporrt CSI

- Voir **CSI_M. Dupont_V1.pdf** dans l'overleaf avec les papiers

MOOC

- Recherche reproductible : principes méthodologiques pour une science transparente - 24h : attente de l'attestation
- 1Rédiger et publier un article scientifique Accueil Rédiger et publier un article scientifique - 20h : attente de l'attestation
- Intégrité scientifique dans les métiers de la recherche - 15h validés

Total : 59/90 heures validés. Le reste des heures seront validés en MCE.

Template et réorganisation thèse

- Voir l'overleaf [M. Dupont DUPONT] – mémoire de PhD.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Séance avec M. Bouchette 01/07/2022

Quelques éclaircissements sur la balance des moments

- Dans l'équation de la balance des moments, la majorité des termes sont temporelles et sont calculés (moyennés) sur une période τ de telle sorte que $\tau \gg T_0$ la période de vague
- Les premiers termes M_a et M_s sont directement moyennés alors que les termes M_r et $C_d M f$ sont calculés en post-traitement à partir de la théorie linéaire / coefficient de manning etc

Réflexion sur la nature de \mathcal{J}

Dans la thèse de Mme Cook, il était supposé la forme de \mathcal{J} suivante : $\mathcal{J}(\psi(x), H(\psi(x)))$, avec la règle de la chaîne suivante :

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \partial_{\psi} \mathcal{J} + \partial_H \mathcal{J} \partial_{\psi} H$$

ce qui donnerait en développant :

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \partial_{\psi} \left(\frac{1}{16} \rho g H^2 \right) + \partial_H \left(\frac{1}{16} \rho g H^2 \right) \partial_{\psi} H$$

soit :

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \frac{1}{8} \rho g H \partial_{\psi} H + \frac{1}{8} \rho g H \partial_{\psi} H = \boxed{\frac{1}{4} \rho g H \partial_{\psi} H}$$

mais si on suppose par exemple \mathcal{J} de la forme suivante : $\mathcal{J}(\psi(x), H(\psi(x)), k(\psi(x)))$, on obtient un terme supplémentaire en $\partial_k \mathcal{J} \partial_{\psi} k$ ce qui nous donne :

$$\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \frac{1}{4} \rho g H \partial_{\psi} H + \frac{1}{8} \rho g \partial_k H \partial_{\psi} k$$

le terme $\partial_{\psi} k$ peut se calculer facilement car il a déjà été déterminé à partir de la relation de dissipation. Le terme en $\partial_k H$ demanderait plus d'efforts.

Une autre idée serait de supposer la forme de \mathcal{J} suivante : $\mathcal{J}(\psi, H(\psi, k))$. Est-ce que la formule : $\nabla_{\psi} \mathcal{J} = \boxed{\frac{1}{4} \rho g H \partial_{\psi} H}$ serait toujours valable ? Est-ce qu'on aurait le droit de dire :

$$\partial_{\psi} H = \partial_{\psi} H + \partial_k H \partial_{\psi} k$$

avec la formule suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \psi} &= \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \psi} + \frac{\partial H}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \psi} \\ \frac{\partial H}{\partial k} &= \frac{\partial H}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial k} + \frac{\partial H}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial k} \end{aligned}$$

Ici le problème semblerait être la confusion entre la dérivée droite et partielle ???

Réflexion sur la nature et le calcul de H_{ψ}

Plusieurs réflexions ont été abordées pour déterminer H_{ψ} . Les idées qui sont sorties sont les suivantes :

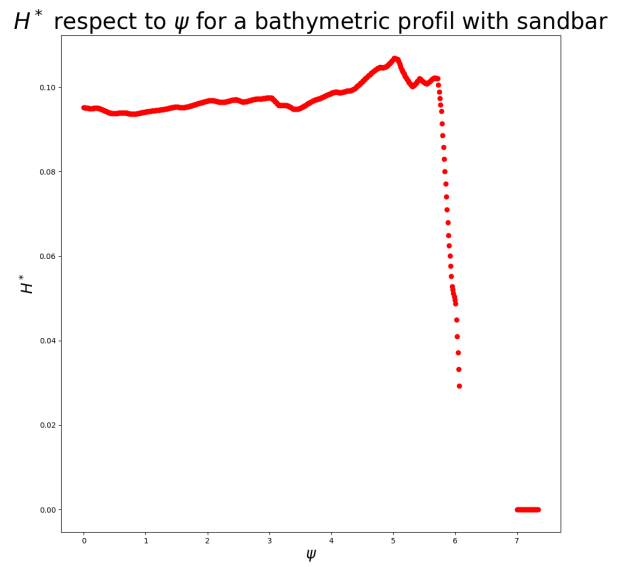
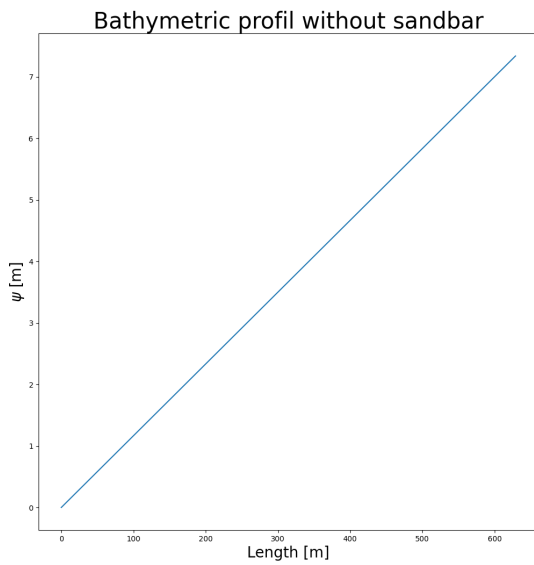
- Et si l'on arrivait à trouver une manière explicite d'exprimer H_{ψ} ? Par interpolation etc...

On a donc cherché à tracer quelques graphiques de H en fonction de ψ et on a obtenu par exemple avec une **bathymétrie linéaire** :



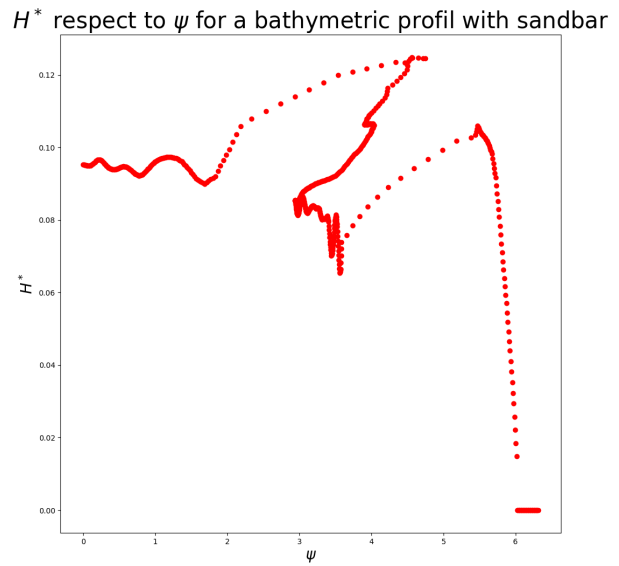
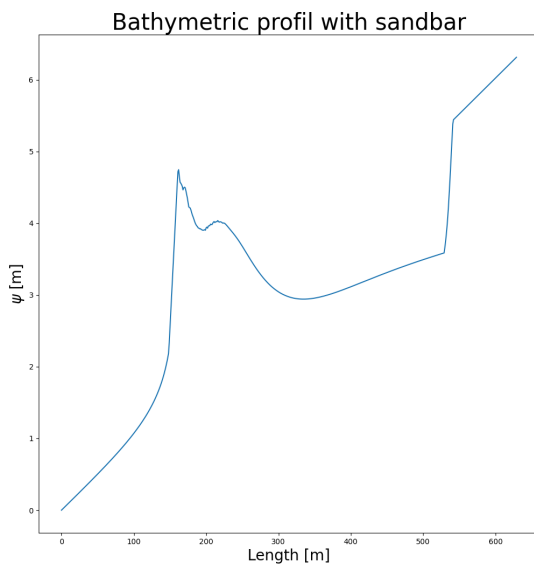
UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER





ici on peut facilement trouver une fonction **explicite** interpolée de $H(\psi)$ et la dériver analytiquement ou par calculs formels.

Cependant, si on ajoute une bar sur le profil bathymétrique comme on peut voir ci-dessous :



on obtient une fonction qui pourrait être **surjective** et donc il serait difficile de trouver cette fonction allant de $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$.

- Peut-être qu'on devrait trouver une fonction d'interpolation qui fit le mieux avec ces points pour la dériver?
- Définir la dérivée sur chacun des segments par différence finis? En soit ce qui nous intéresse est de trouver H_ψ sur tous les points. Par exemple :
 - On calcul par différence finis tous les points de H_ψ : le problème c'est que pour un ψ donné, on aura plusieurs valeurs possibles au niveau de la bar donc :

- On définit la fonction $H_\psi(x_i)$ avec i correspondant à l'emplacement x_i sur dans la longueur L . Ceci permettrait de choisir la bonne dérivée associée
- **Problème** : notre fonction n'étant pas parfaitement linéaire, on aura sûrement quelques difficultés à trouver les valeurs de certains points de H_ψ

Les réflexions doivent encore mûrir mais il serait très intéressant de s'émanciper de la dérivée d'un modèle hydrodynamique classique : "trop simple". Si on fait le choix d'utiliser Swan / Swash : ce qui rajoute des temps de calculs très longs ; autant utiliser ces données pour trouver une forme correct de H_ψ .

- Représenter notre fonction par des splines n'est pas compliqué comme on peut voir sur la figure ci-dessous :

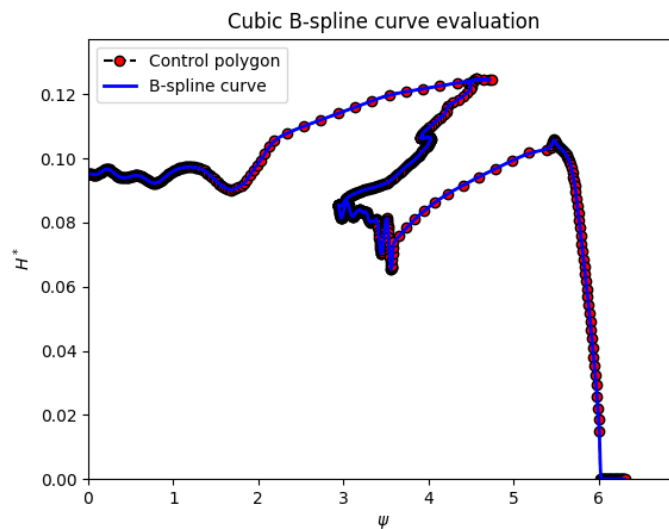


FIGURE 73 – Spline représentation

le soucis ici est de pouvoir dériver cette fonction.

- Si on essaie naïvement des "différences finis" avec : $\frac{H_{i+1}^* - H_i^*}{\psi_{i+1} - \psi_i}$, on obtient la figure suivante :

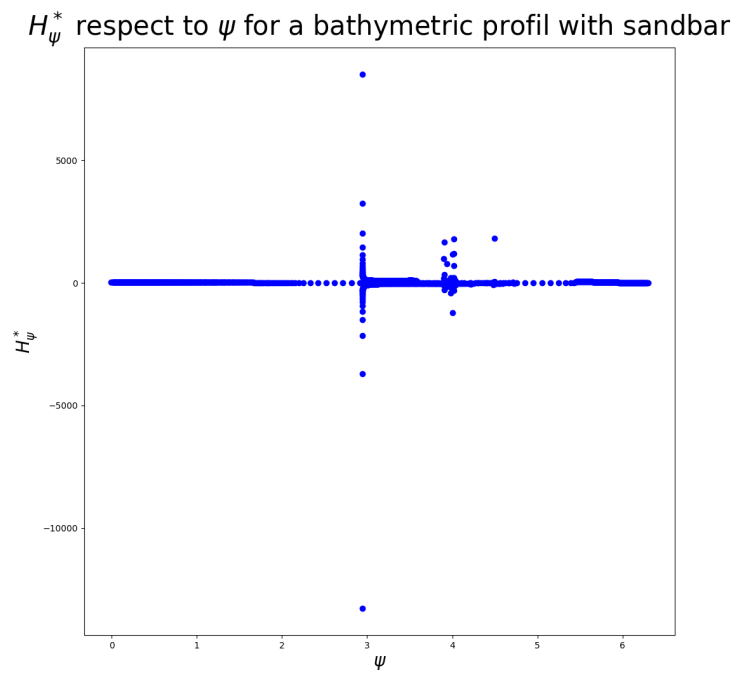


FIGURE 74 – Dérivation par "différence finis"

on tombe sur des problèmes. Ici on aurait $H_\psi^*(\psi)$ et non $H_\psi^*(x)$ et surtout des valeurs sont "parasites" du fait que la fonction n'est pas bijective. Ceci ferait crasher le programme.

- Autre idée très coûteuse : effectuer de la différenciation automatique sur SWASH (codé en fortran)

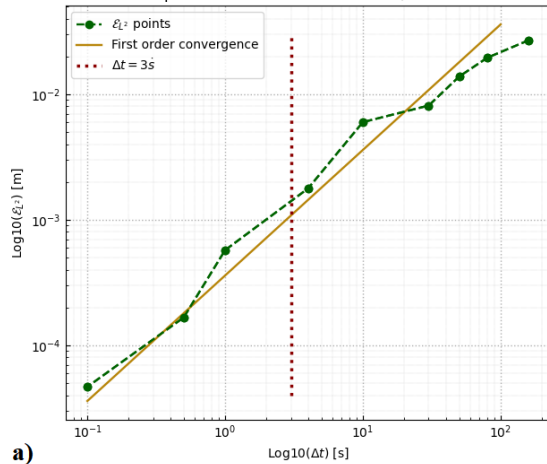
Compte rendu scientifique

Semaine 31-32 : 13/06/22-24/06/22

Rédaction de la partie convergence pour l'article

- Lancement des calculs de convergence en dt et dx pour la simulation COPTER
- Post-traitement des données de création des courbes de convergences suivantes :

Error ε_{L^2} with respect to ψ_{ref} as a function of time step Δt [s] - Logarithmic scale
Copter simulation with $T_f = 1800$ s, $\Delta x = 1$ m



Error ε_{L^2} with respect to ψ_{ref} as a function of spatial step Δx [m] - Logarithmic scale
Copter simulation with $T_f = 1800$ s, $\Delta t = 3$ s

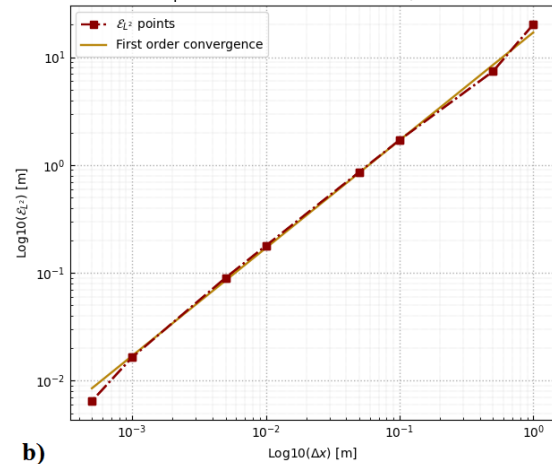


FIGURE 75 – Courbes de convergence

Bilan positif sur ces deux courbes de convergence : on arrive à assimiler ces courbes à une convergence d'ordre 1. La première en temps est en $o(17n)$ et la seconde en spatial en $o(0.00036n)$.

Implémentation du modèle SWASH dans OptiMorph

Le workflow du modèle hydro SWASH agit pour chaque itérations de la manière suivante :

- Récupération des paramètres d'OptiMorph (T_0 , ψ , h , Δt ...) + quelques paramètres SWASH
- Passage d'une grille de n points d'OptiMorph à une grille de m points sur SWASH ($m < n$) par interpolation : limitant le temps de calcul
- Création d'un fichier de lancement SWASH associé pour lancer une simulations de Δt secondes.
- Lancement de la simulation SWASH
- Récupération des données H_s
- Passage de la grille m à la grille n par interpolation
- $H^* \rightarrow H$: substitution du H par le H^* obtenu avec SWASH

Un premier test uniquement sur l'hydro nous donne le résultat suivant au pic :

try_swan_no-morpho_dxpetit
FLUME CONFIGURATION
t = 7.81e + 05 (iteration 650/1499)

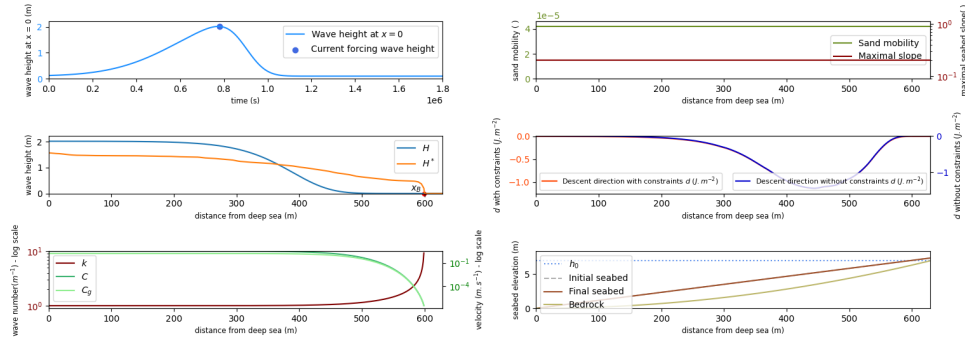


FIGURE 76 – Simulation avec SWASH : tempête d'une semaine, $H_{max}=2m$, périodes $T=2s$ (OptiMorph) et $T=14s$ (SWASH) sans morpho

Cet ajout permet donc de calculer le gradient suivant :

$$\nabla_{\psi|H}(J(H^{2*})) = 2H^* \nabla_{\psi|H} J(H^*)$$

ce qui nous donne les résultats morpho suivants :

try_swan_morpho_T14_Opto14
FLUME CONFIGURATION
t = 7.81e + 05 (iteration 650/1499)

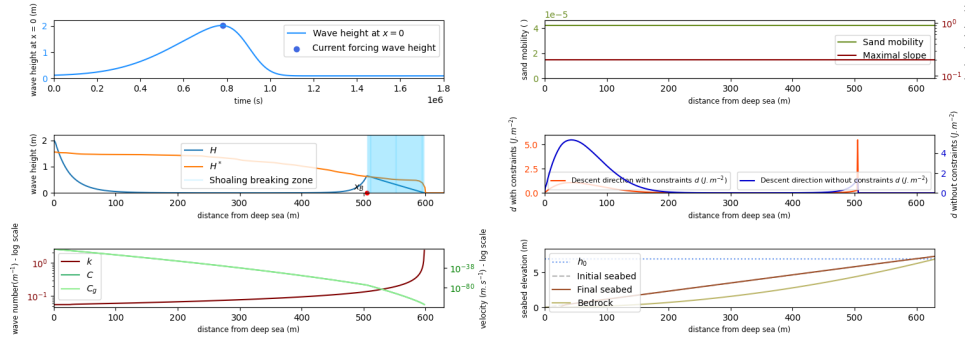


FIGURE 77 – Simulation avec SWASH : tempête d'une semaine, $H_{max}=2m$, périodes $T=2s$ (OptiMorph) et $T=14s$ (SWASH) avec morpho

Cependant, les résultats "réalistes" correspondent au calcul suivant :

$$2H_{T14}^* \nabla_{\psi|H_{T2}} J(H_{T14}^*)$$

ce qui est donc un "mixte" entre le gradient calculé à période $T_0 = 2s$ et le H^* calculé à $T_0 = 14s$. En effet, si on calcul le gradient à $T_0 = 14s$, les résultats ne sont plus réalistes : on obtient les résultats suivants :

try_swan_morpho_T14_Opto14
FLUME CONFIGURATION
t = 7.81e + 05 (iteration 650/1499)

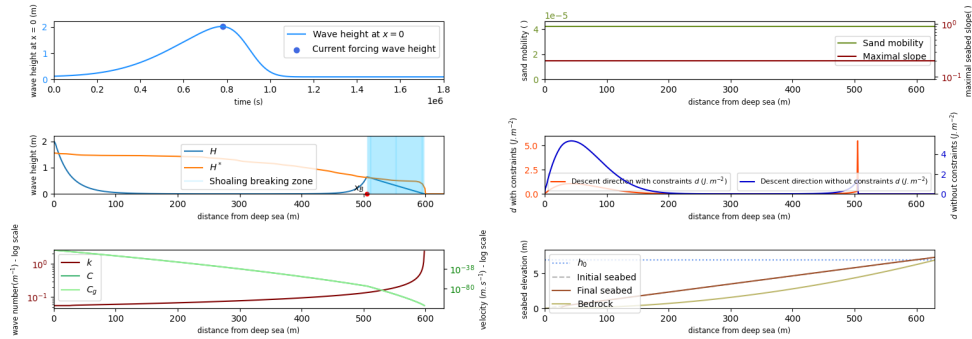


FIGURE 78 – Simulation avec SWASH : tempête d'une semaine, $H_{max}=2m$, périodes $T=14s$ (OptiMorph) et $T=14s$ (SWASH) avec morpho

Nota : Les résultats présentés avec la création d'une barre pour une période $T=2/14$ s semblent être réalistes. Cependant, ceux-ci sont un peu "bricolés" étant donné qu'on choisit le gradient qui nous "convient". En réeffectuant les calculs avec la période $T=14/14$, on a un gradient qui agit en amont du domaine comme on avait pu l'observer sur nos tests à périodes réalistes. Ceci ne règle donc pas ce problème. Se diriger vers une différentiation automatique serait une solution inévitable ?

Balance des moments

Bottom Drag Coefficient on a Shallow Barrier Reef, 2022, SOUS

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x} (\rho U^2)}_{M_a} + \underbrace{g\rho \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}}_{M_s} = - \underbrace{\frac{1}{(\bar{\eta} + h)} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x}}_{M_r} - \underbrace{\frac{1}{(\bar{\eta} + h)} \bar{\tau}_b}_{C_d M_f} \quad [N.m^{-3}]$$

Bilan des variables :

- ρ : constante connue
- g : constante connue
- U : Peut être obtenu par OptiMorph / Swash
- $\bar{\eta}$: Peut être obtenu par Swash ?
- S_{xx} : Peut être obtenu par OptiMorph : théorie linéaire en négligeant les roller de la vague
- h : Peut être obtenu par OptiMorph
- $\bar{\tau}_b$: étape un peu délicate, voir article de M. Sous ci-dessous

where g is the gravitational acceleration, ρ the water density, $\bar{\eta}$ the wave setup, h the still water depth, S_{xx} the radiation stress, and τ_b the bed shear stress. The three terms in Equation 1 will be referred to as Slope (M_s), Radiation (M_r) and Friction (M_f) terms. Note that the total friction momentum flux has been written as the product $C_d M_f$ in order to easily extract C_d , the bottom drag coefficient, through the comparison of the three momentum fluxes. The contribution of advection flux (M_a) in Equation 1 is assumed to be negligible from the reef crest owing to moderate variations of depth (Symonds et al., 1995; Hearn, 1999; M. Gourlay, 1996; Buckley et al., 2015; Sous, Dodet, et al., 2020). Following the approach of Sous et al. (2020), depth-averaged fluxes are estimated between each successive sensor pair over continuous records subdivided into 60 – min bursts. The total water depth ($\bar{\eta} + h$) used for the calculation in Radiation and Friction terms is taken as the mean water depth between two adjacent sensors.

Slope term The Slope term $M_s = g\rho \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x}$ is computed using the mean water level at each sensor. A positive Slope term at a given location corresponds to a locally positive mean surface slope in a shoreward direction. Uncertainties in the Slope term

computation are mostly related to the accuracy in vertical positioning and sensors distance. Considering typical ranges of set-up and horizontal distance of 0.2 ± 0.015 m and 100 ± 0.075 m, uncertainty on the Slope term is estimated around $\pm 1.5 \text{ N.m}^{-3}$.

Radiation stress term The wave radiation stress term $M_r = \frac{1}{(\bar{\eta}+h)} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x}$ is estimated from bottom pressure wave height measurements using linear theory (Longuet-Higgins & Stewart, 1962), neglecting wave-roller effects (Buckley et al., 2015). Typical ranges of water depth, wave height, and horizontal distances of 1 ± 0.015 m, 1 ± 0.05 m, and 100 ± 0.075 m, yield uncertainty estimates on the radiation stress term around 3 N.m^{-3} . Friction term A classic quadratic law is used to compute the total bed shear stress (Feddersen et al., 2000; Buckley et al., 2016) combining the contributions of the depth-averaged current U and the wave bottom orbital velocity u_b :

$$\tau_b = \rho C_d |U + u_b| (U + u_b)$$

where C_d is the bottom drag coefficient. This current-wave decomposition is generally valid for the thick boundary layer present in coral reefs (A. W. Pomeroy et al., 2017; Lentz et al., 2018; Sous, Dodet, et al., 2020). The depth-averaged current U in each zone is estimated from the time-averaged depth-averaged profile of cross-reef velocity measured at AQP1 weighted by the depth ratio. The horizontal component of the orbital velocity at the bottom, u_b , is estimated from the time series of instantaneous bottom pressure P_b using linear wave theory :

$$u_b = \frac{CP_b}{\rho g(\bar{\eta} + h)},$$

where $C = (g(\bar{\eta} + h))^{1/2}$ is the wave celerity. Note that (i) u_b includes all wave components, i.e. both short and infragravity waves and, (ii), the ratio u_b/U ranges here between 1.6 and 25, i.e. generally much higher than the values observed by Lentz et al. (Lentz et al., 2017), making the present dataset particularly useful to quantify the influence of waves on drag over coral reefs. Finally, the Friction term defined in Equation 1 can be directly derived from the in-situ measurements as

$$M_f = \frac{\rho}{(\bar{\eta} + h)} |U + u_b| (U + u_b)$$

Momentum-based bottom drag coefficient Based on the estimation of the three momentum fluxes described above, an experimental value of the bottom drag coefficient, C_d^{exp} , can be obtained from Equation 1 :

$$C_d^{exp} = -\frac{M_s + M_r}{M_f}$$

Theoretical bottom drag coefficient The depth-dependence of the bottom drag coefficient is furthermore assessed in the framework of the canonical turbulent logarithmic mean velocity profile (law of the wall). In the presence of large and highly variable roughness, the proper definition of a $z = 0$ datum (here the RSE) is generally not straightforward. A displacement height d is generally introduced to define the hydrodynamic origin, leading to the following formulation of the law of the wall (Kundu & Cohen, 1990) :

$$\langle u(z) \rangle = \frac{U_*}{\kappa} \ln \left(\frac{z - d}{z_0} \right)$$

where $\langle u(z) \rangle$ is the time-averaged velocity profile at elevation z above the bed, U_* is the friction velocity, $\kappa = 0.41$ the Karman constant, and z_0 and d are the roughness and displacement heights, respectively. Depth-integration of Equation 6 leads to a theoretical expression for the drag coefficient (A. Pomeroy et al., 2012; Sous, Dodet, et al., 2020) :

$$C_d^{th} = \left[\frac{\kappa}{\ln \left(\frac{h + \bar{\eta} - d}{z_0} \right) - 1} \right]^2$$

In the following, both the experimental momentum-derived C_d^{exp} , and log-derived theoretical C_d^{th} , will be considered and compared. To be valid, Equation 7 requires the full development of the boundary layer throughout the water column, meaning that (i) the velocity defect correction (Coles, 1956) can be neglected and (ii) the roughness-to-depth ratio remains weak otherwise in-canopy flow should be considered (Rosman & Hench, 2011). This latter constraint is further discussed in Section 4.

CSI?

Début de rédaction du rapport, réflexions sur l' **ANNEXE : rapport détaillé sur l'avancement des travaux de thèse (10 pages max)**

- État de l'art sur la morphodynamique des plages par transport optimal
- Extended abstract JNGCGC

- Tentatives d'implémentation de nouvelles fonctionnelles pour rendre compte d'une meilleure physique
- Implémentation d'un nouveau modèle hydrodynamique appelant SWASH pour des raisons identiques
- Travaux de validation numérique : convergence,...
- Extension du CODE au multi-1D et application
- Travaux de justification de l'approche par minimisation de l'énergie des vagues via la mécanique analytique et des travaux de Newton

Manuscrit

- Mise en place de l'architecture du manuscrit



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 30 : 06/06/22-10/06/22

Rédaction JNGCGC

- Correction et soumission de l'article pour JNGCG.

Rédaction MDPI

- Ajout de la partie convergence en dx ? Convergence en forçage ?

Réflexionx sur le modèle hydro avec SWASH

- Lancement d'un bash lançant un calcul swash
- Trouver un critère indiquant que le calcul est terminé
- Remplacer les H en H^* dans le code



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



MÉTHODE DE COUPLAGE VAGUE-MORPHODYNAMIQUE DU LITTORAL PAR PRINCIPE DE MINIMISATION

R. Dupont^{1, 2, 3}

¹GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, ronan.dupont@umontpellier.fr

²IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

³GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

INTRODUCTION

- Un nouveau modèle de morphodynamique du littoral a été développé sur la base de la **minimisation de l'énergie** sous contrainte. C'est le **premier modèle** à création de barre sédimentaire. Cette approche pourrait à terme s'étendre dans de nouvelles disciplines.
- Opti-Morph est un code **robuste** qui a été validé numériquement en terme de stabilité et sensibilité.
- Opti-Morph a été validé à travers des cas comparant des données expérimentales de canal et des simulations numériques avec XBeach.
- Le modèle est **rapide** et de **faible complexité**.
- Les calculs peuvent être exécutés en parallèle sur un cluster HPC.
- Ce modèle peut utiliser des données réelles allant du 1D au 2D (multi-1D).

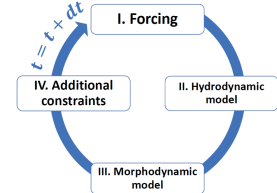


Fig. 1. Schéma de fonctionnement d'OptiMorph

MODÈLE NUMÉRIQUE

1) Fonction coût:

L'évolution du fond marin ψ est obtenu par principe de minimisation de la fonction coût J . Ici on minimise l'énergie d'une vague avant le déferlement.

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}]$$

Ω_s : zone avant déferlement [m]
 ρ_w : densité de l'eau [kg.m⁻³]
 g : accélération gravitationnelle [m.s⁻²]
 H : hauteur significative de la vague [m].

2) Équation du système:

Le fond marin ψ est obtenu grâce à l'équation suivante résultant du principe de descente du gradient.

$$\begin{cases} \psi(t=0) = \psi_0 \\ \psi_t = \Upsilon \Lambda d \end{cases}$$

ψ_t : évolution du fond marins en temps [m.s⁻¹]
 Υ : abrasion du sable [m.s.kg⁻¹]
 Λ : excitation du fond marin par les vagues
 ψ_0 : élévation initiale du fond de la mer [m].

Des contraintes sont ajoutées à $d = -\nabla_\psi J$ afin que le modèle soit le plus réaliste possible.

3) Contraintes:

La pente du fond marin est conditionnée par un seuil M_{slope} limitant un scénario où les grains ne tomberaient pas.

On considère bien souvent la conservation du sable au cours du temps.

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T]$$

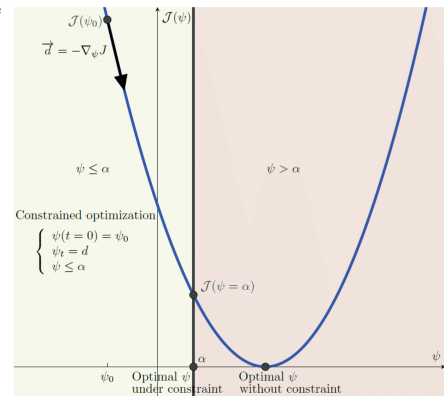
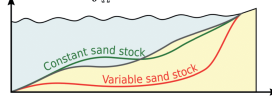
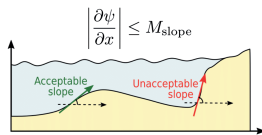


Fig. 2. Illustration de descente du gradient avec des contraintes de conservation sableuse et de pente représentées par $\alpha \leq \psi$. L'optimum ne correspond pas nécessairement au point critique.

APPLICATIONS À UN CAS MULTI-1D SUR LE GOLFE D'AIGUES-MORTES

- Simulation d'une tempête de plusieurs jours.
- Ajout d'une structure de protection géotube en forme de gaussienne.
- Calculs parallélisés sur 10 transects représentés en noirs. Résultat obtenus en moins de 5 minutes.
- Réduction de l'érosion de la plage.
- Résultats similaires à ceux de la campagne expérimentale COPTER.

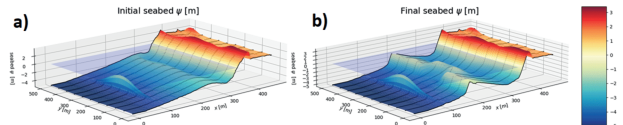


Fig. 3. a) Bathymétrie initiale sur le Golfe d'Aigues-Mortes en ajoutant un géotube en forme de gaussienne avec une hauteur maximale de 3m. b) Bathymétrie finale après simulation d'une tempête de plusieurs jours.

AXES DE RECHERCHE

- Implémentation et validation d'un nouveau modèle hydrodynamique polyvalent sur un plus grand nombre de cas d'utilisation.
- Validation du modèle morphodynamique pour un large panel de simulations : 2D, 1D, accretion, ...
- Confrontations des nouveaux modèles à des données issues d'expérimentations validées par le partenaire GLADYS.
- Extension de cette notion de transport optimal à d'autres disciplines : développement mathématique de nouveaux formalismes et concepts.

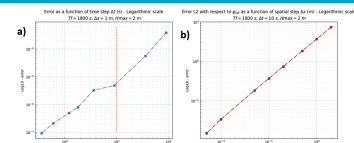


Fig. 4. Exemple de validation numérique du code. a) Validation de convergence temporelle. b) Validation de convergence spatiale

RÉFÉRENCES

- D. Isebe, P. Azerad, B. Mohammadi, F. Bouchette (2007). Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact.
- M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, N. Frayse (2021) Optimal port design minimizing standing waves with a posteriori long term shoreline sustainability analysis.
- M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, N. Frayse (2021) Application of Opti-Morph: Optimized beach protection by submerged geotextile tubes.
- B. Mohammadi, & waters, Computers :



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

l'Europe en France



La Région Occitanie Pyrénées - Méditerranée

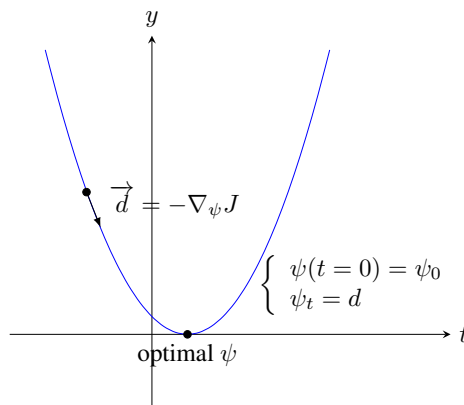


Compte rendu scientifique

Semaine 28-29 : 23/05/22-03/06/22

Rédaction JNGCGC / Rédaction stabilité sensibilité

- Discussion sur la figure de descente du gradient avec contraintes



- Correction des autres points importants dans la forme etc...

Multi-1D

- Élaboration d'un script faisant le pré-traitement, lancement des calculs sur les n coeurs du cluster et post-traitement
- Ajout de la possibilité de calculer sur les transect interpolés
- Différents tests d'utilisation de ce script : cas avec deux géotubes en forme de gaussienne sur un domaine défini avec plus de transects pour une meilleur précision

Le calcul ci-dessous représente le résultat d'une simulation de 20 transect de base pour un total de 200 simulés (ajout de profils interpolés). Simulation avec deux géotubes en forme de gaussienne. Le résultat correspond à la bathy après **quelques jours de tempête : Hmax=2 m, Tf= 1 semaine, T0= 2s**. Cette simulation est obtenue en calculant en parallèle sur le cluster après 5 minutes de calculs.

Initial seabed ψ [m]

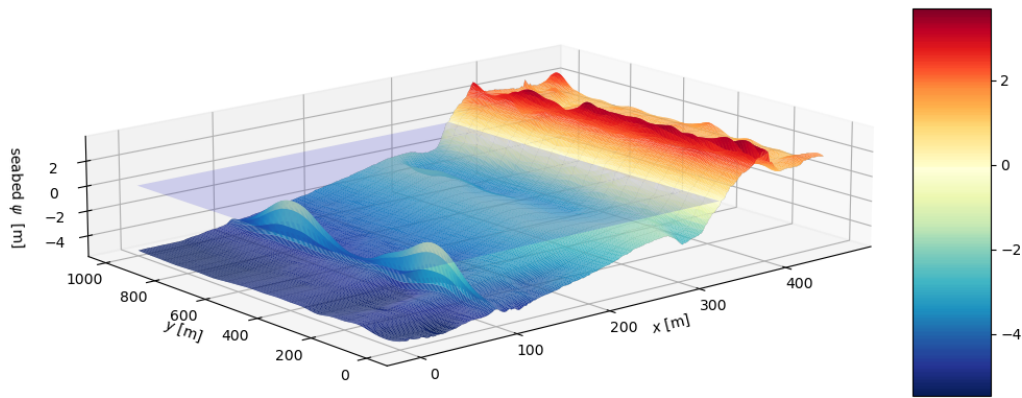


FIGURE 79 – Initialisation

Final seabed ψ [m]

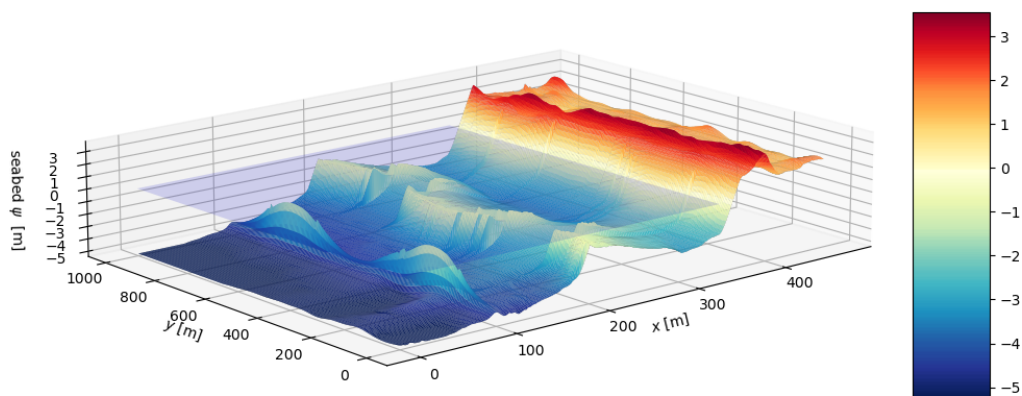


FIGURE 80 – Final

Quelques incohérences au niveau de la linéarité de la bathy. Possibilité de quelques soucis sur le script ou bien interpolation trop forte (8 points entre 2 transect).

Perspectives :

- Comparer avec les données Copter
- Travailler sur la fusion de données etc pour obtenir des résultats sous forme "cartographique" et non perpendiculaire au trait de côté

Nouveau modèle hydro

Point important : Discussion nécessaire pour faire évoluer le code et rendre l'hydro robuste quelque soit les conditions.

- Début de recherche bibliographique. Beaucoup de modèles à fonds plats ne nous intéressent pas (Bousinesq,...).
- Article de Bougis sur les différents modèles de houle
- Penchement sur un Saint-Venant en python et premières réflexions :
 - Maillage nécessairement plus fin
 - Temps de calculs très longs
 - Différenciation automatique difficile en python ?

Perspectives

- JDD : Poster et Diapo
- Mutli-1D scripting pour les profils qui ne sont pas perpendiculaires au trait de côte
- Soumission JNGCGC le 31 mai



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 27 : 16/05/22-21/05/22

Convergence en Δx

On a continué la **simulation COURTE** en simplifiant le modèle mais cette fois-ci avec le **dernier modèle hydrodynamique** et les conditions de simulation suivante :

- Une simulation de 30 minutes
- Hauteur d'eau $H_{max} = 2m$
- Mobilité habituelle : $4.25e-4$
- Bathy de pente $1e-2$ sur 600m

on peut voir ces paramètres ci-dessous :

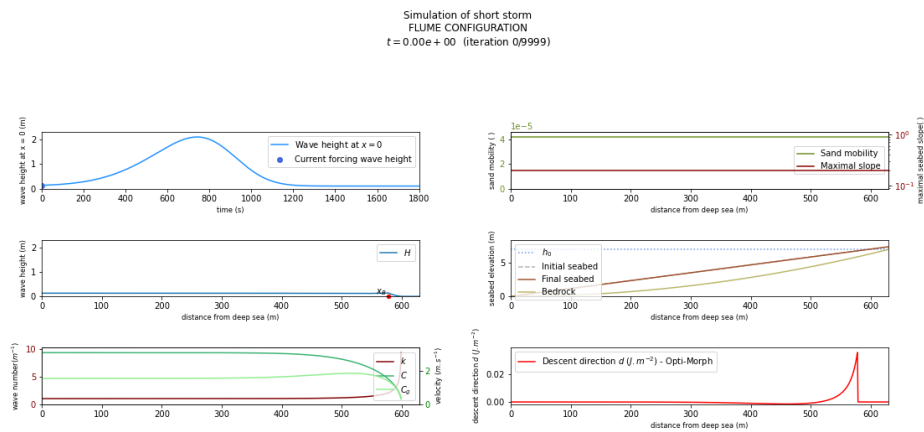


FIGURE 81 – Initialisation

Sur cette simulation, on effectue dans un premier temps des tests sur la convergence **temporelle** en Δt et on obtient le résultat suivant :

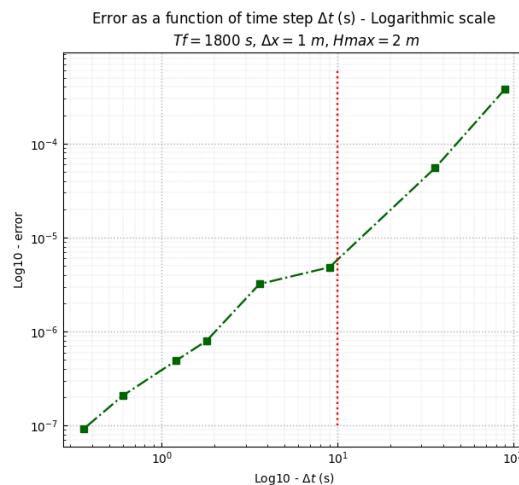


FIGURE 82 – Convergence en Δt

on décide donc de prendre en pas de temps de référence $\Delta t = 10 \text{ s}$ correspondant à la barre rouge pour essayer la convergence spatiale. On obtient ensuite les résultats suivants :

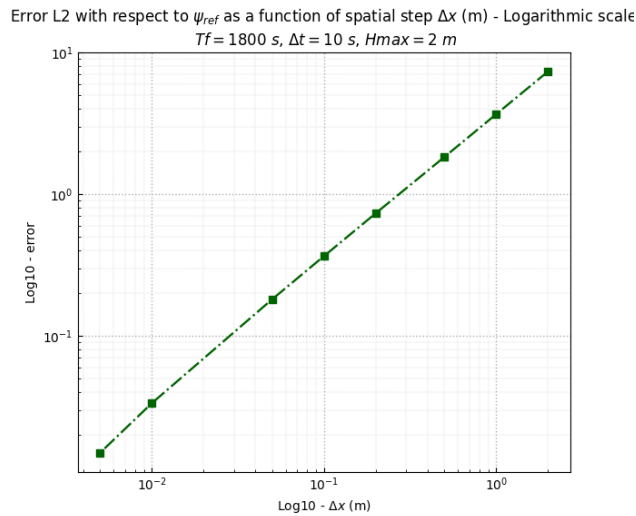


FIGURE 83 – Convergence en Δx

Okay pour ces simulations. Il pourrait être intéressant d'essayer avec des simulations plus longues.

Fonction d'atténuation de Soazig

Après correction des bugs de la semaine précédente, on peut obtenir ce genre de graphiques pour une atténuation maximale avec la simulation classique de tempête :

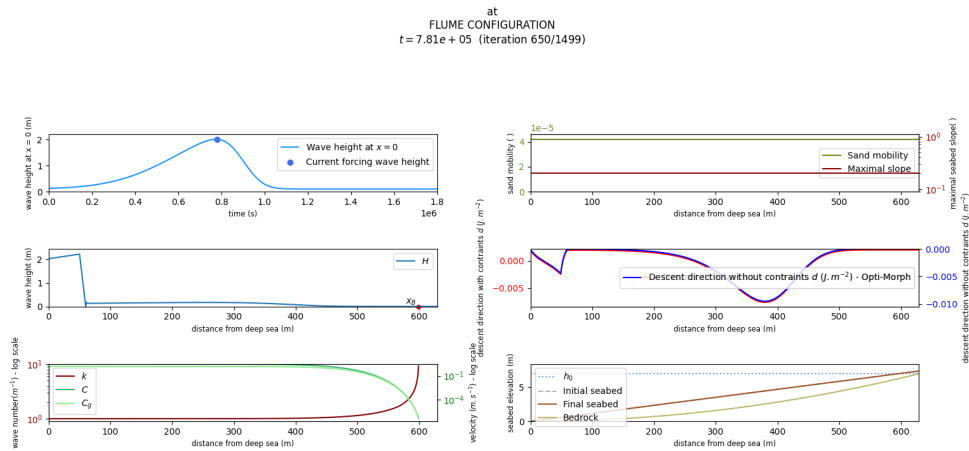


FIGURE 84 – Atténuation maximale

Pas de création de barre, c'est plutôt rassurant.

Remarque : on a eu une discussion avec M. Bouchette pour savoir comment étaient implémentés ces atténuations dans les autres modèles hydros + **VOIR ROLLER**. Si on atténue sur le premier point du domaine d'atténuation ou au dernier... Exemple :

ronan_test
FLUME CONFIGURATION
t = 7.20e + 05 (iteration 600/1499)

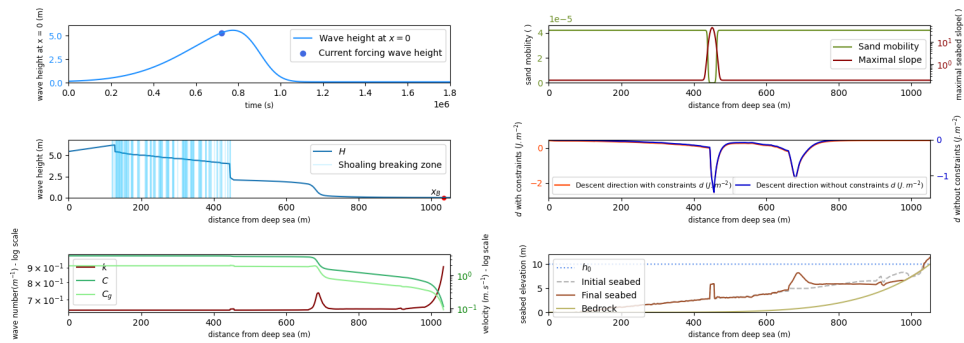


FIGURE 85 – Simulation sans atténuation

ronan_test_at.0.3
FLUME CONFIGURATION
t = 7.20e + 05 (iteration 600/1499)

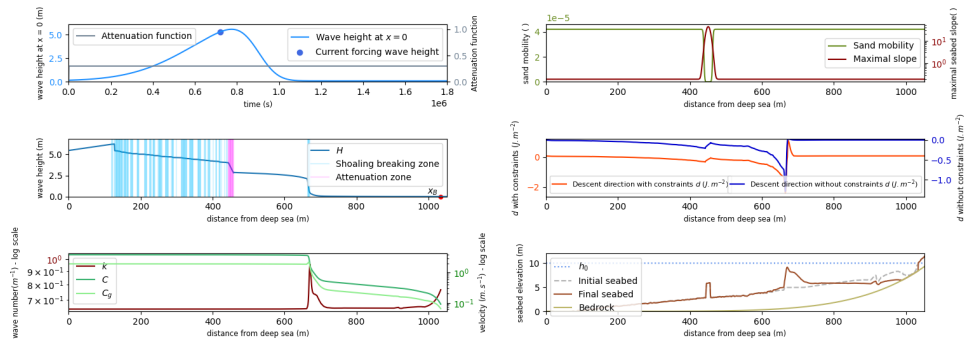


FIGURE 86 – Avec atténuation de 30%

Ici le problème relevé est que l'atténuation faite par le modèle ne prends plus en compte l'atténuation géométrique due au fait que la structure est à une hauteur donnée. Ce qui nous donne donc un résultat faux car on obtient un déplacement morpho plus grand pour une hydro atténuée...

"Bricole" temporaire : En attendant, on prendras le domaine d'atténuation sur la seconde moitié de la structure afin que l'hydro décroissante due à la géométrie soit prise en compte.

Les bugs ont été corrigés et donnent les résultats suivants par exemple :



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



ronan_test_no-at
FLUME CONFIGURATION
t = 7.81e+05 (iteration 650/1499)

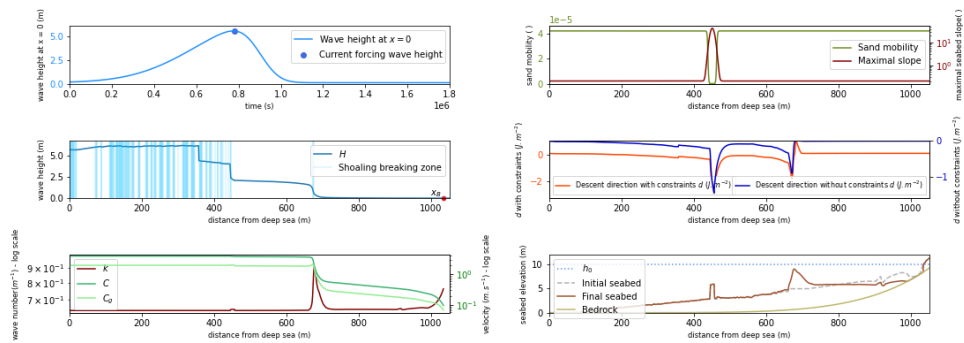


FIGURE 87 – Simulation sans fonction d'atténuation

ronan_test_at-struct[444,458]
FLUME CONFIGURATION
t = 7.81e+05 (iteration 650/1499)

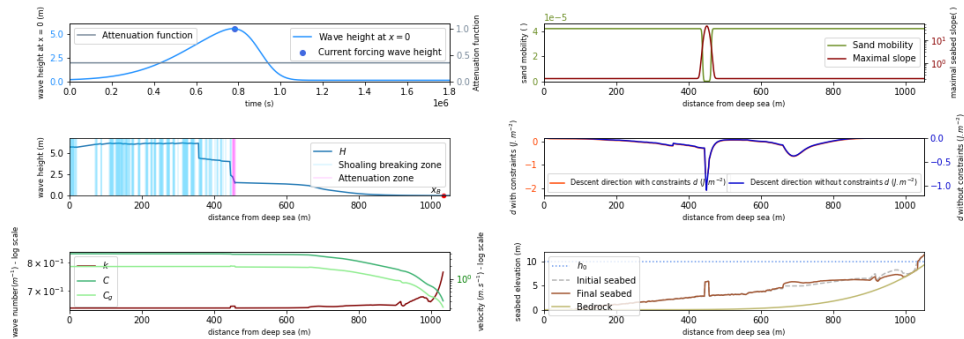


FIGURE 88 – Simulation avec fonction d'atténuation à 35%

Stabilité du modèle à tailles du domaine différentes en conservant une pente de plage constante

Afin de vérifier la stabilité du modèle, on lance dans un premier temps plusieurs simulations à $h = [7, 14, 21, 35] \text{ m}$ et $\Omega = [600, 1200, 1800, 3000] \text{ m}$ pour les mêmes forçages :

- Une simulation de 1 semaine
- Hauteur d'eau $H_{\max} = 2\text{m}$
- Mobilité habituelle : $4.25\text{e-}4$
- Bathy de pente $1.1\text{e-}2$ sur une longueur de domaine Ω

On lance dans un premier temps **que l'hydro** et on obtient un résultat très curieux :

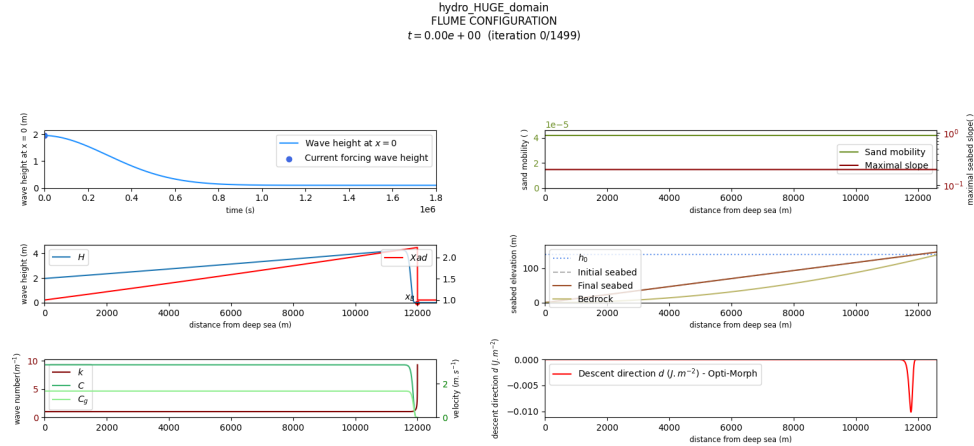


FIGURE 89 – Bug sur le dernier modèle hydro

sur cette figure, on remarque que l'hydro semble avoir un problème étant donné qu'on est en profondeur infinie sur tout le domaine $[0, 11\ 000]$: la hauteur de vague n'est pas censée augmenter autant. On a donc cherché à comprendre d'où venait cette augmentation de l'hydro qu'on a pas autant sur un domaine plus petit et on a observé (en **rouge**) que cela venait du coefficient χ_{AD} .

Rappel du modèle : - Governing equations :

$$H(x, t) = \chi_{AD}(x) \begin{cases} [(1 - \alpha_W(x)) H_0(t) + \alpha_W(x) H_0^w(x, t)] K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \text{ and } x < d_W \\ H_0^w(x, t) K_S(x, t) & \text{for } x \in \Omega_S \text{ and } x \geq d_W \\ \gamma h(x, t) & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

for all $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, where H_0^w is the weighted average of the seaward waves, $\alpha_W(x) = \frac{x}{d_W}$ over $[0, d_W]$ and χ_{AD} is an anti-dissipative term.

$$\chi_{AD}(x) = \begin{cases} \left(1 + a_{AD} \frac{x}{x_{\max}}\right)^{b_{AD}} - \left(1 + a_{AD} \frac{x_{\Omega_S^-}(x)}{x_{\max}}\right)^{b_{AD}} + 1 & \text{for } x \in \Omega_S \\ 1 & \text{for } x \in \Omega_B \end{cases}$$

where $x_{\Omega_S^-}(x)$ is the lower-bound of the connected subset of Ω_S where x is found. The parameters a_{AD} and b_{AD} allow the user to define the manner in which the waves dissipate; a_{AD} determines the slope of χ_{AD} and b_{AD} its quadratic behavior. An example of the anti-dissipative term is given in Figure 11 , with $b_{AD} > 1$.

En lançant ces mêmes simulations en retirant ce coefficient, on obtient les résultats suivants :

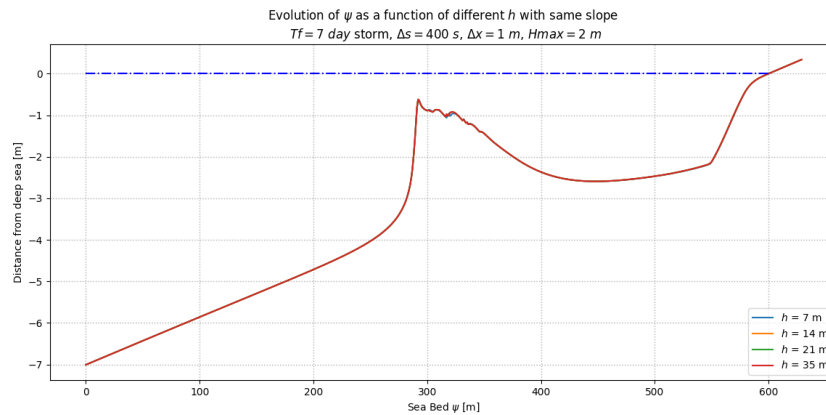


FIGURE 90 – Résultats pour différentes simulations à tailles de domaines à pente de plage constante

avec l'erreur L2 qui est comparée à la simulation de référence avec une profondeur $h = 35 \text{ m}$:

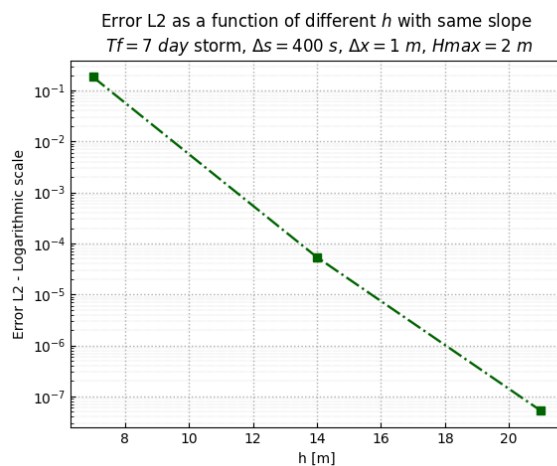


FIGURE 91 – Erreur pour différentes simulations à tailles de domaines à pente de plage constante

Comme on peut voir sur les deux graphiques précédents, les résultats montrent que le modèle est stable (avec ce modèle hydro) lorsqu'on augmente la taille du domaine tout en conservant la pente. Les hypothèses de profondeur infinies sont **bien respectés**.

Capture d'écran pour la rédaction multi-1D

En utilisant les travaux d'Azir, on peut extraire les captures d'écran de la zone étudiée pour la rédaction du multi-1D :

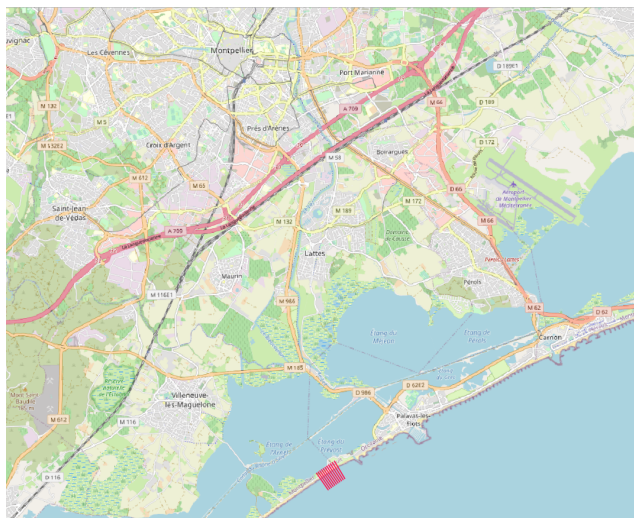


FIGURE 92 – Zoom 1

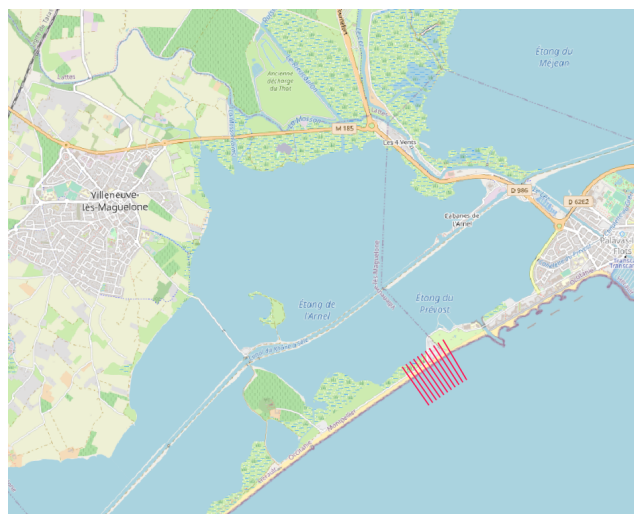


FIGURE 93 – Zoom 2



FIGURE 94 – Zoom 3

Compte rendu scientifique

Semaine 25-26 : 02/05/22-13/05/22

Convergence en Δx

On commence sur un **simulation COURTE** en simplifiant au **MAXIMUM** le modèle (pas de relaxation, modèle hydro simple, ...) avec les paramètres suivants :

- Une simulation de 30 minutes
- Hauteur d'eau $H_{max} = 2m$
- Mobilité habituelle : $4.25e-4$
- Bathy de pente $1e-2$ sur 600m

on peut voir ces paramètres ci-dessous :

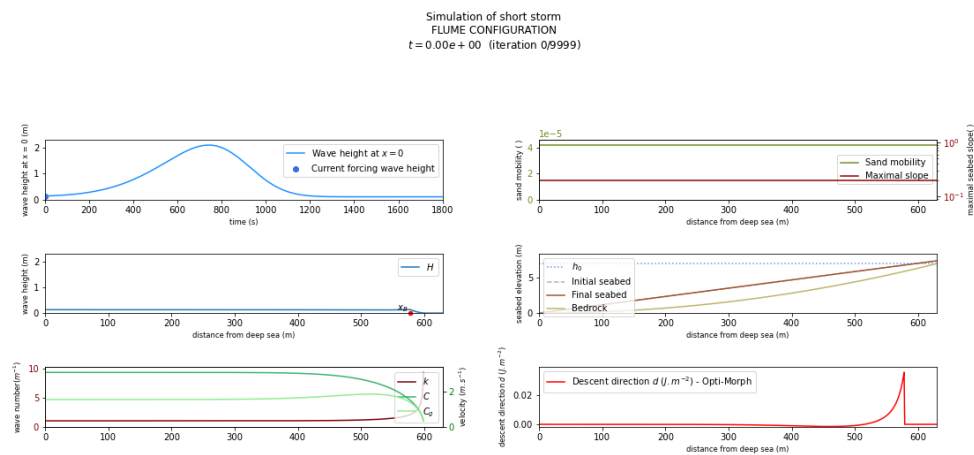


FIGURE 95 – Initialisation

Sur cette simulation, on effectue dans un premier temps des tests sur la convergence **temporelle** en Δt et on obtient le résultat suivant :

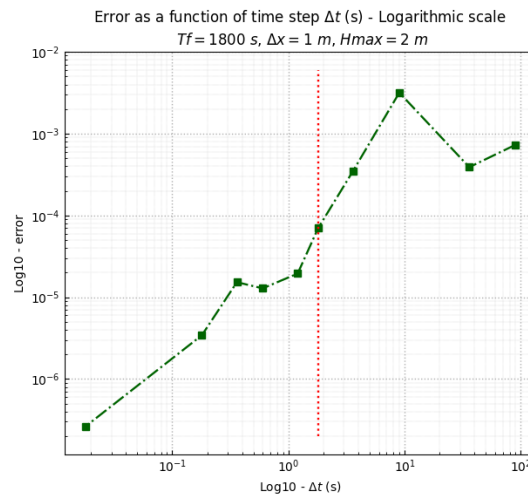


FIGURE 96 – Convergence en Δt

on décide donc de prendre en pas de temps de référence $\Delta t = 1.8 \text{ s}$ correspondant à la barre rouge pour essayer la convergence spatiale. On obtient ensuite les résultats suivants :

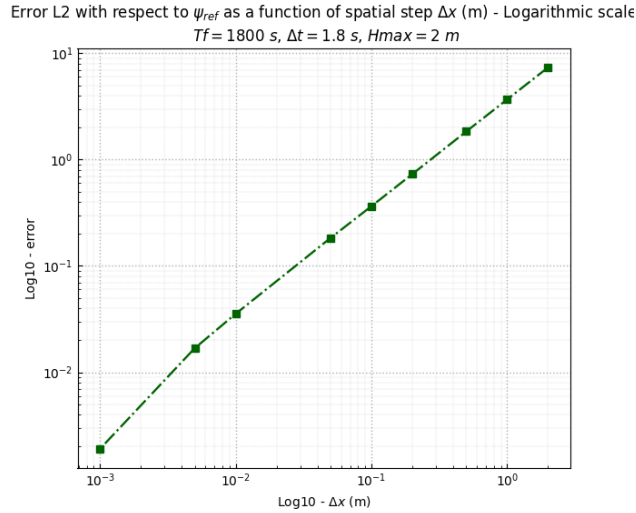


FIGURE 97 – Convergence en Δx

On remarque que la convergence semble se faire mais **TRES LENTEMENT** comparé à la convergence temporelle. Pour donner un ordre de grandeur, le pas de temps de référence a été calculé en plus de 12 heures et cette simulation a été très simplifiée.

On va tout de même essayer d'observer ce que cette convergence pourrait donner pour une simulation **plus longue** avec les paramètres de simulations habituelles d'une tempête sur 7 jours :

- Une simulation de 1 semaine
- Hauteur d'eau $H_{max} = 2\text{m}$
- Mobilité habituelle : $4.25\text{e-}4$
- Bathy de pente $1\text{e-}2$ sur 600m

on peut voir ces paramètres ci-dessous :

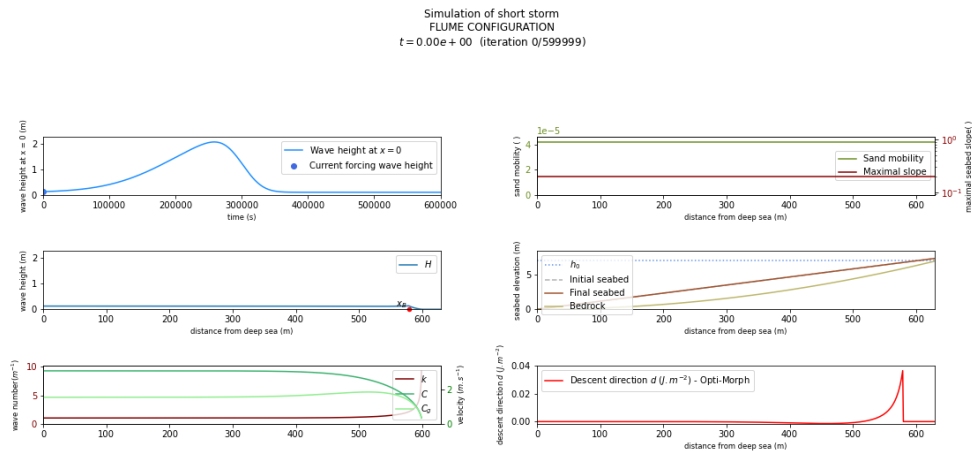


FIGURE 98 – Initialisation

et on obtient cette fois-ci directement la convergence spatiale suivante :

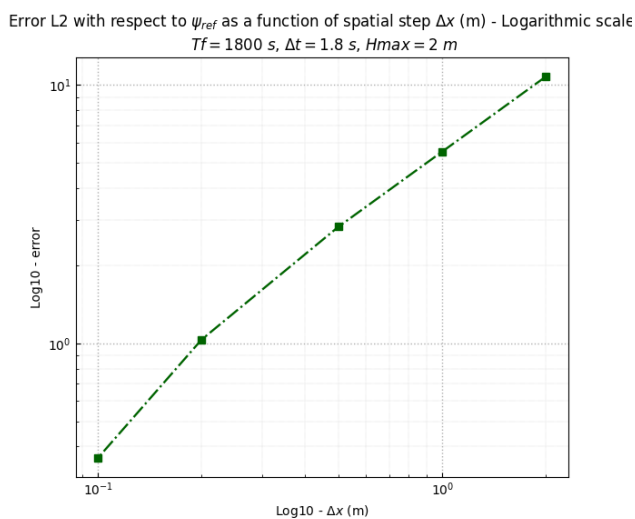


FIGURE 99 – Convergence en Δx

Ici, on remarque que la convergence n'est pas terminée comme le montre les affichages suivants :

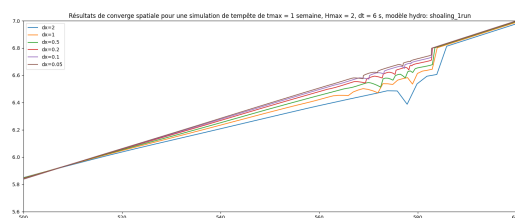


FIGURE 100 – Convergence en Δx

Les temps de calculs pour les dernières simulations sont **très longs** et pourtant le modèle hydro est très simple (calculs rapides). Il semblerait que la convergence spatiale soit difficile à atteindre rapidement contrairement à la convergence temporelle.

Multi-1D

Les figures produites pour l'abstract d'ICCE sont les suivantes :

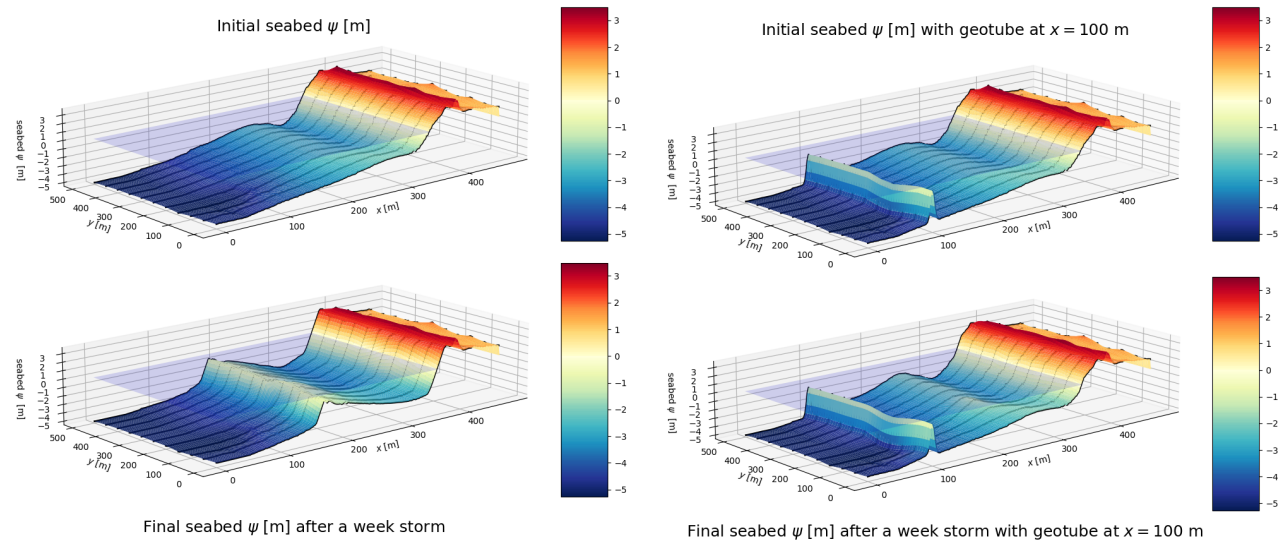


FIGURE 101 – Figures ICCE

Celles-ci représentent le multi-1D sur 11 transect avec la simulation habituelle d'une tempête sur une semaine.

D'autres essais ont été faits comme par exemple l'utilisation de géotube sous forme de gaussienne comme on peut voir ci-dessous :

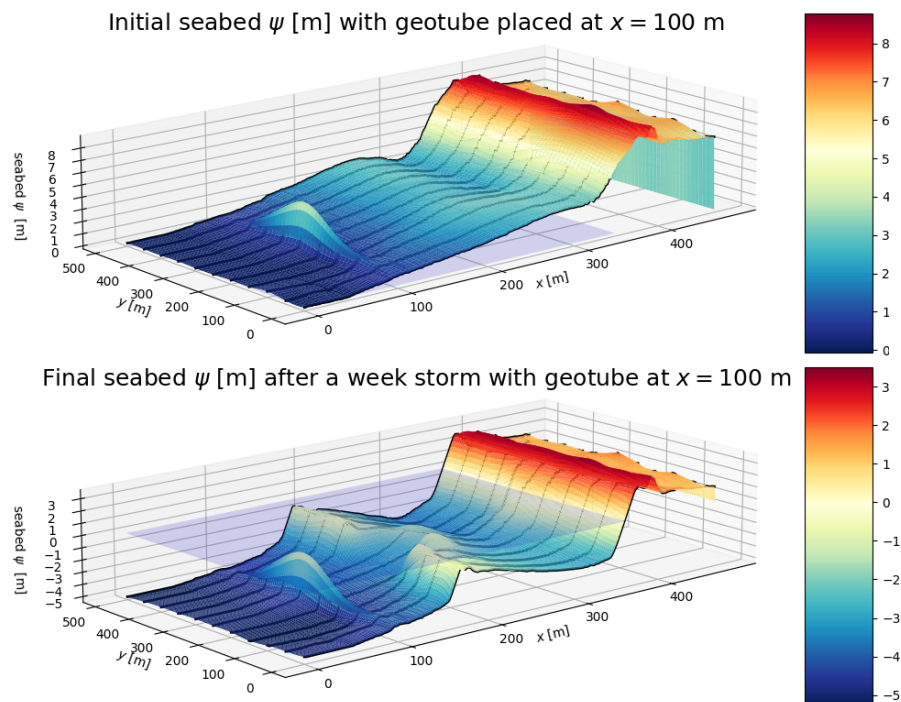


FIGURE 102 – Géotube en produit par une gaussienne

Les prochains travaux pour le multi-1D sont les suivants :

- Finalisation du script permettant de lancer sur le cluster les multi-transect
- Modélisation du courant longshore

Fonction d'atténuation

Fonction mise en m=place, fonctionnelle sur l'hydro mais pas encore différenciée dans le modèle. Exemple de résultats posant des problèmes :

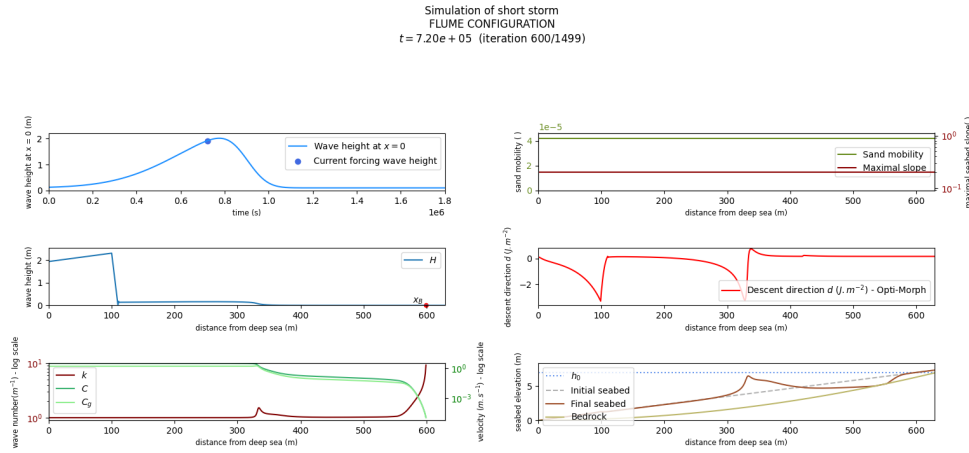


FIGURE 103 – Simulation avec fonction d'atténuation de 100%

On relève les problèmes suivants :

- Le modèle hydro a une mémoire et donc une hauteur d'eau se recrée après l'atténuation : dans la pratique ce n'est pas si embêtant car cette fonction est censée atténuer et non bloquer l'hydro : on utilisera jamais une atténuation à 100%.
- Une barre se forme malgré une hydro **très faible**. L'explication vient **possiblement** du fait que le modèle hydro n'a pas encore été différencié sur l'intervalle de la structure. Mais ceci ne devrait tout de même pas laisser la barre se créer car l'intervalle est différent ? à méditer

Nouvel affichage en post-traitement

Exemple ci-dessous :

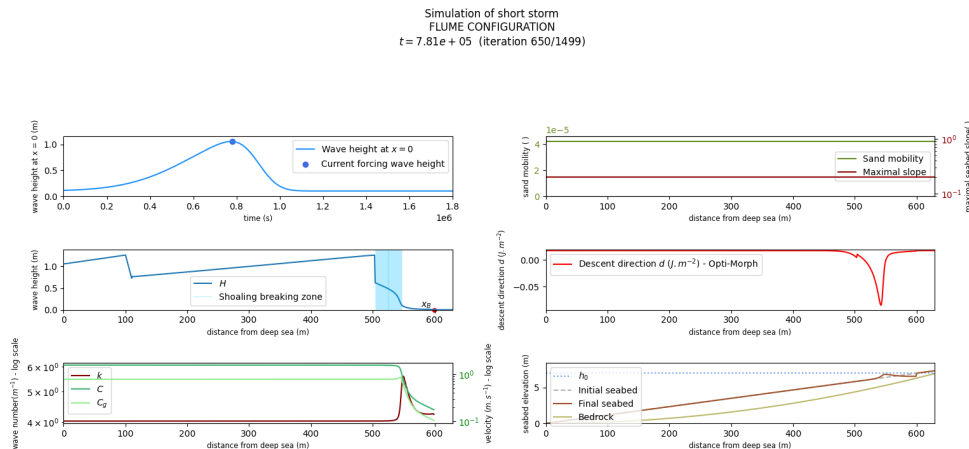


FIGURE 104 – Post-traitement OptiMorph

Grille de simulation sur différentes pentes à période de vague T6

Une grille de simulation a été effectuée faisant varier les angles de pente [0.45e-2, 0.5e-2, 0.9e-2, 1e-2], les mobilités [1e-5, 1e-4, 1.25e-4, 5e-4, 1e-3] et les longueurs de domaines [2000, 4000]. On a obtenu les résultats suivants :

Evolution of ψ with configuration mobility=1e-05 - Forcing - Strom with parameter Hmax= 2 m, Tmax= 1 week, dt= 400 s, dwin= 100

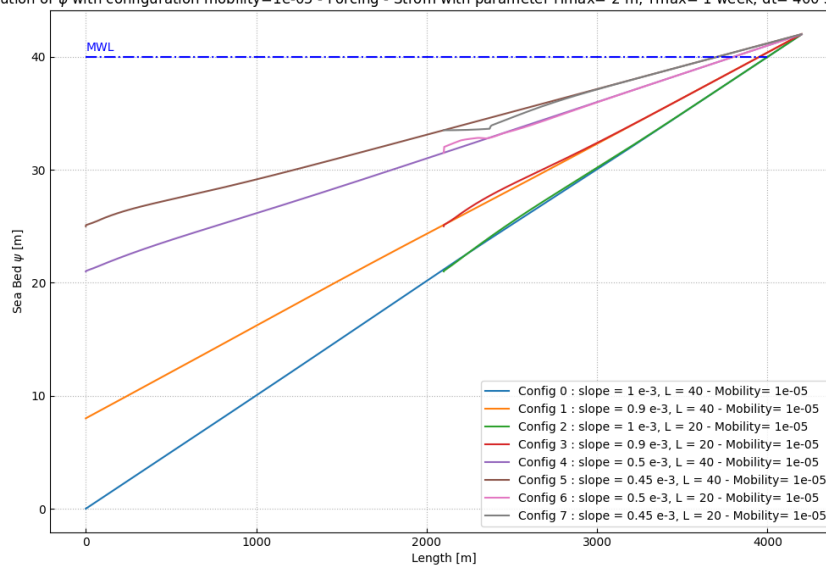


FIGURE 105 – Mobilité 1

Evolution of ψ with configuration mobility=0.0001 - Forcing - Strom with parameter Hmax= 2 m, Tmax= 1 week, dt= 400 s, dwin= 100

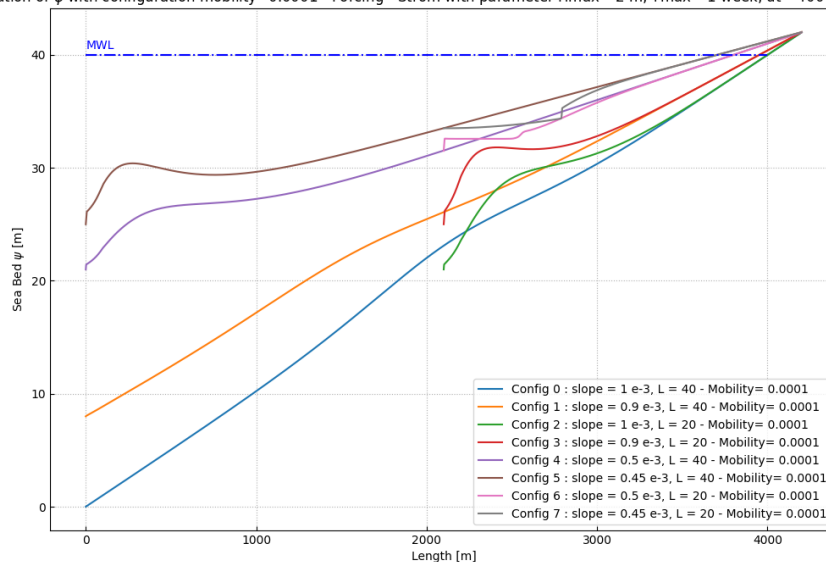


FIGURE 106 – Mobilité 2

Evolution of ψ with configuration mobility=0.000125 - Forcing - Strom with parameter Hmax= 2 m, Tmax= 1 week, dt= 400 s, dwin= 100

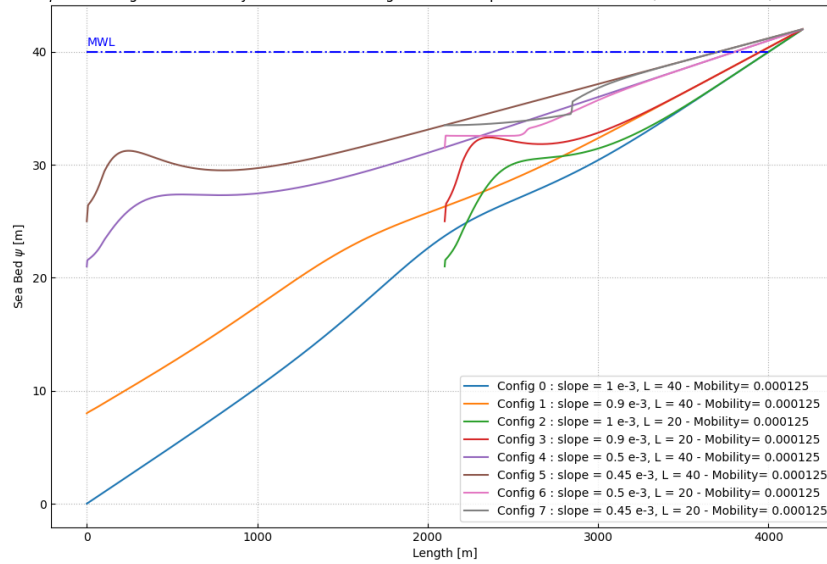


FIGURE 107 – Mobilité 3

Evolution of ψ with configuration mobility=0.0005 - Forcing - Strom with parameter Hmax= 2 m, Tmax= 1 week, dt= 400 s, dwin= 100

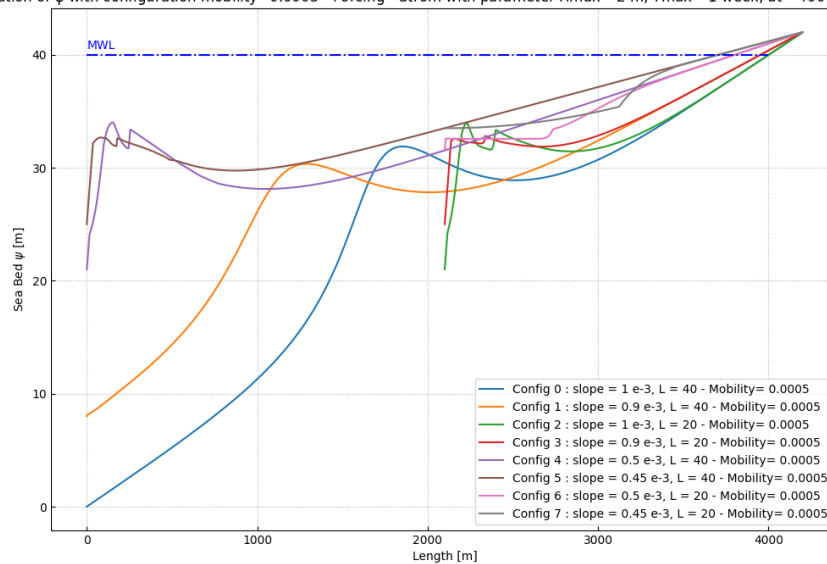


FIGURE 108 – Mobilité 4

Evolution of ψ with configuration mobility=0.001 - Forcing - Strom with parameter Hmax= 2 m, Tmax= 1 week, dt= 400 s, dwin= 100

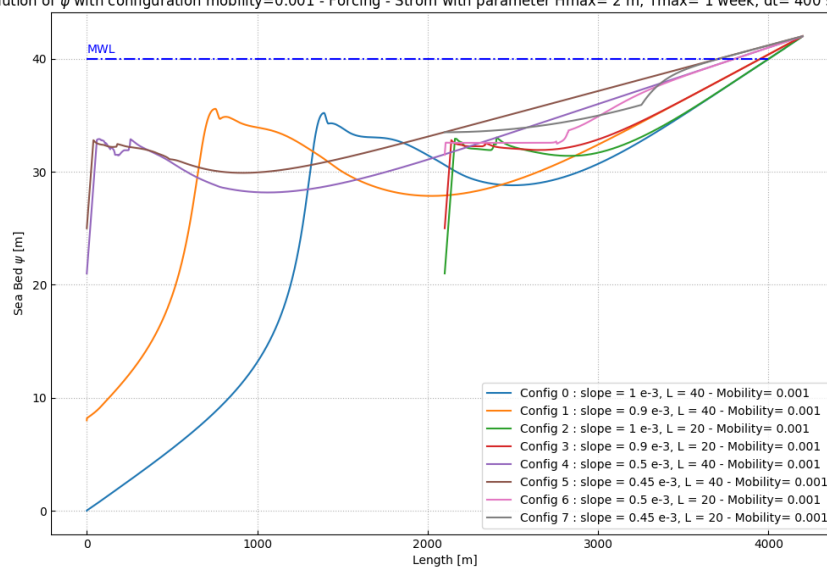


FIGURE 109 – *Mobilité 5*

Compte rendu scientifique

Semaine 24 : 25/04/22-29/04/22

Convergence en dx

En changeant le simplifiant le modèle à fond avec les éléments suivants :

- Retrait de la régulation `d = regulate_seabed(x, psi, d, mobilitytab)`
- Retrait de la relaxation `psi = slopecst(psi, Mslope, rho0, x)`
- Passage à un modèle hydro très simple pour être sûr que le dx n'intervient pas : `shoaling_1run`
- Réglage de l'initialisation en changeant le pas spatiale dx : `x = np.arange(0, xshore+xcoast, xstep)`

on constate toujours que le modèle ne converge pas en dx ...

Par exemple si on prends l'exemple ci-dessous avec une simulation à deux dx différents et un modèle très simple : `shoaling_1run`, on obtient la figure suivante :

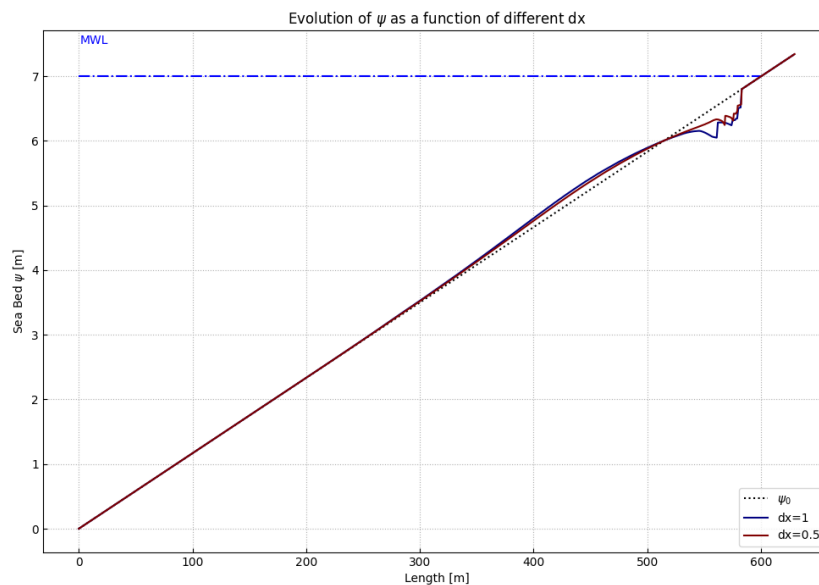


FIGURE 110 – Différents pas spatiaux pour le modèle `shoaling_1run`

Nota : sur cette simulation, la création de la barre est très faible à cause du modèle hydro utilisé.

Interrogation : en implémentant le programme, on suppose deux simulations de domaine $L = 1500$, une à $dx = 1$ et l'autre à $dx = 0.5$. Ces deux simulations auront la même valeur de `xstep` et pourtant la longueur de la moyenne glissante (`dwin`) ne devra pas être de la même longueur dans les deux cas.

Version "plus propre"

- Ajout de l'affichage du grad dans les fenêtre de post-traitement
- Gif automatique sur l'ensemble des images de post-traitement
- Commentaire sur toutes les parties du code "inutiles" pour la version utilisée

Exemple sur la figure ci-dessous :

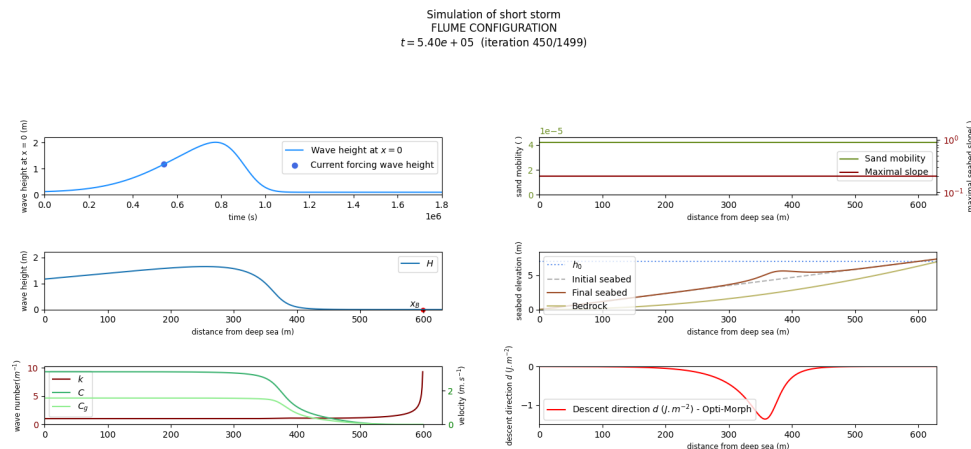


FIGURE 111 – *Nouvel affichage de résultats*

Réflexions sur le papier ICCE : "résultats préliminaires"

En reprenant les transect d'Emile, on peut les représenter sur un affichage 3D de la manière suivante :

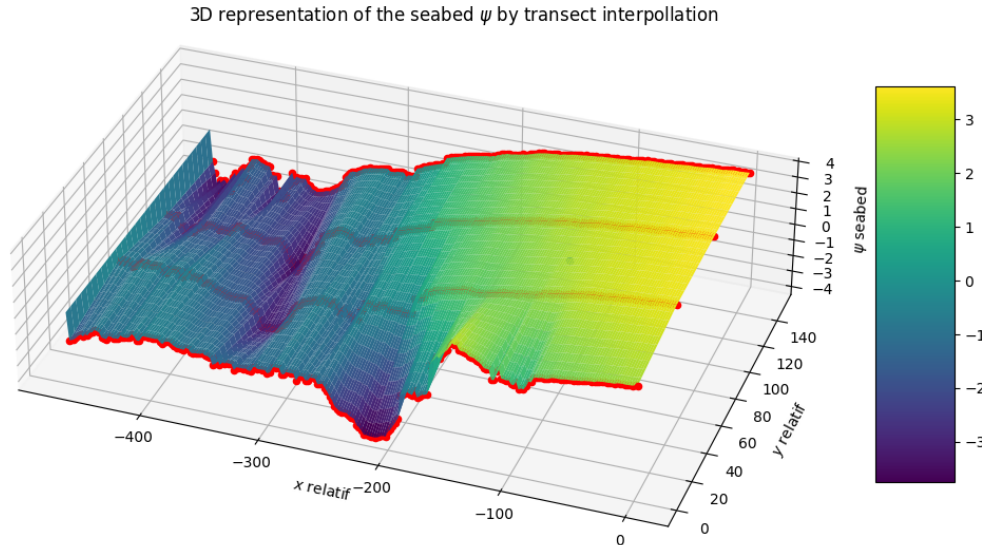


FIGURE 112 – *Représentation d'une plage par interpolation des 4 transect rouge*

Il suffit ensuite de simplement lancer le calcul sur chacun de ces transect pour obtenir une évolution de la bathy ψ totale. Ceci étant vrai si on suppose qu'il n'y a pas de déplacements de sable latéraux, pas de courant longshore. Sortir un graphique de "résultat" préliminaire pourrait être une bonne idée à mettre dans l'abstract d'ICCE ?

Différentes pentes

Ajout des résultats suivants :

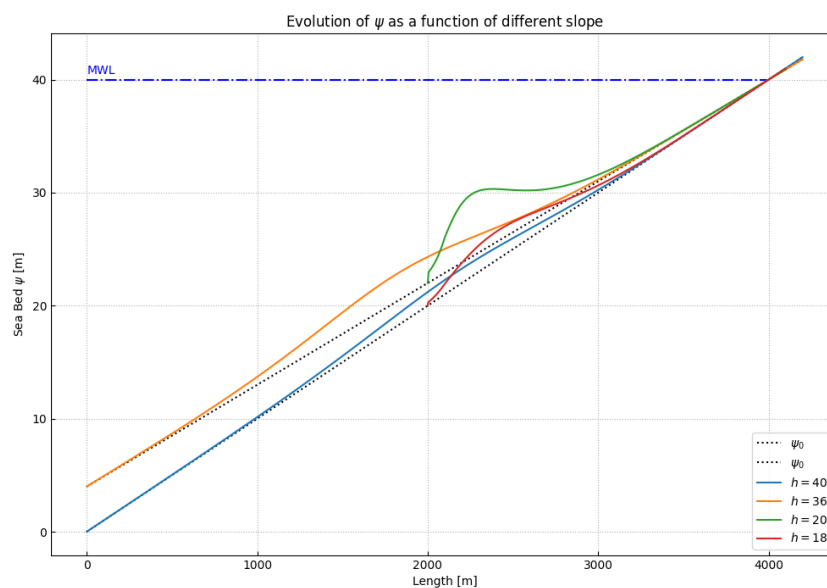


FIGURE 113 – Représentation de différentes pentes pour une simulation à T6

Réflexion sur la condition de passage de la houle au dessus d'une structure immergée indéformable

Point Soazig

Compte rendu scientifique

Semaine 23 : 18/04/22-22/04/22

Pause : vacances



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 22 : 11/04/22-15/04/22

Convergence en pas de temps de Copter

Pour être sûr des résultats de convergence, il a été intéressant d'essayer ces mêmes convergences pour des pas de temps Δx différents. Les simulations ont été effectuées de manière analogue aux simulations à $\Delta x = 1 \text{ m}$ pour $\Delta x = [0.5, 2] \text{ m}$. Et on obtient les résultats suivants :

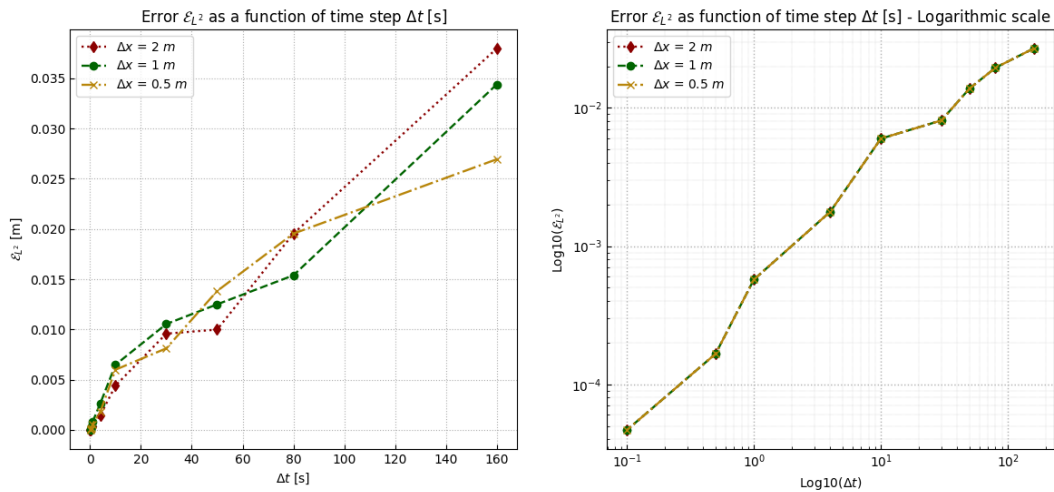


FIGURE 114 – Convergence pour différents Δx

À noter que le ψ_{ref} n'est pas le même entre chaque simulations étant donné que la convergence en pas spatial n'a toujours pas été corrigée : des solutions différentes pour des pas de temps différents. Le graphique qui semble intéressant à retenir est le suivant :

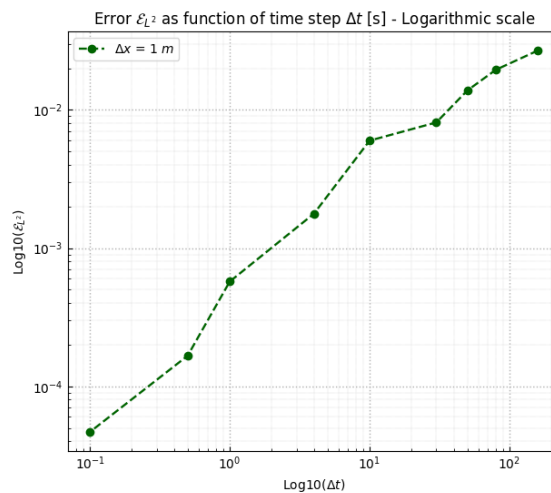


FIGURE 115 – Convergence pour article

Variation d'angle de plage

Une idée pour observer si la formation de la barre est réaliste ou non pour le modèle à $T = 6$ s est de faire varier l'angle de la plage : ici de 0.01 à 0.009 et d'observer où se forme la barre.

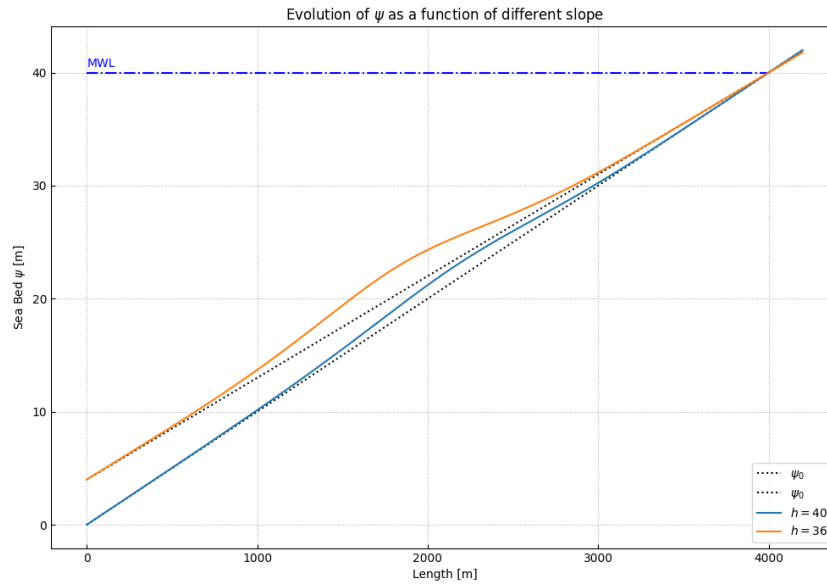


FIGURE 116 – Différentes pentes

Ici, curieusement, il semblerait que la barre avec un angle plus faible se forme avant l'autre.

Run ancienne et nouvelle version OptiMorph

En mettant à jour la version optimorph avec les derniers ajouts, on observe que l'ajout/changement du terme de conservation sableuse :

$$d_i = d_i \left(1 + \beta \frac{(\psi - \varepsilon \psi_0)_i}{\int_{\Omega} \psi_0} dx \right)$$

Simulation of short storm
FLUME CONFIGURATION
 $t = 1.80e + 06$ (Iteration 1499/1499)

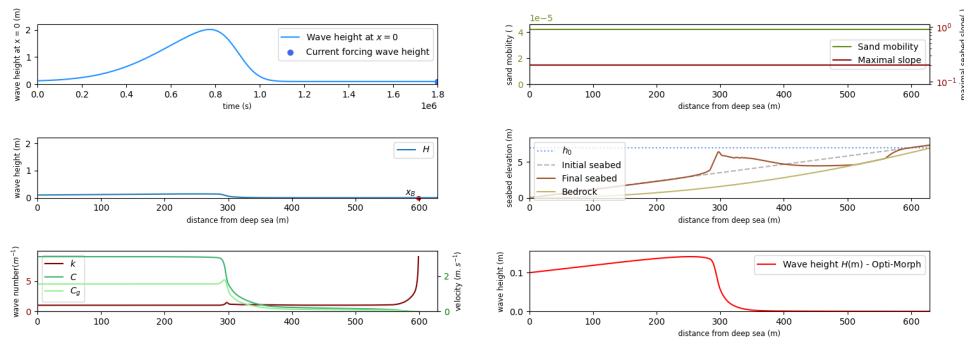


FIGURE 117 – Ancienne version

Simulation of short storm
FLUME CONFIGURATION
t = 1.80e + 06 (iteration 1499/1499)

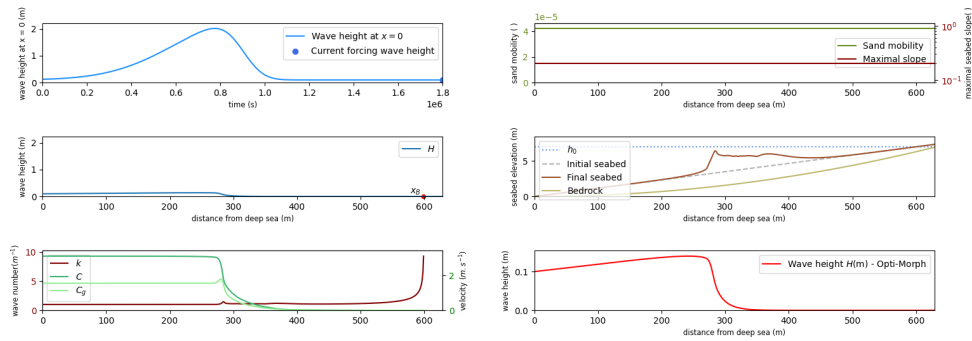


FIGURE 118 – Nouvelle version

Sur la nouvelle version, la fausse est plus petite. Ce résultat n'est pas forcément plus réaliste. Voir images de la simulation.

Variation des β

Etrangement, en faisant varier le β de l'expression ci-dessous :

$$d_i = d_i \left(1 + \beta \frac{(\psi - \varepsilon \psi_0)_i}{\int_{\Omega} \psi_0} dx \right)$$

on n'observe pas de grandes différences malgré le choix d'un β parfois très grand.

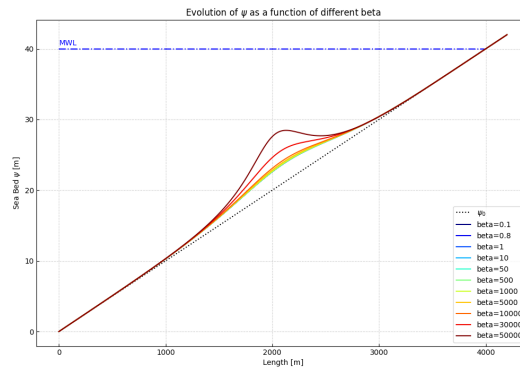


FIGURE 119 – Variation des β

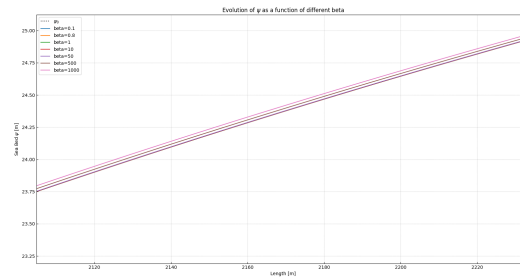


FIGURE 120 – Variation des β zoomé

Peut-être que l'erreur vient du programme ? Il a été implémenté de la manière suivante :

```
if self.getC("sand") == 1:
    err = 1.00
    d = d * (1 + beta * (psi - err*psi0) / intpsi0 * dx)
```

avec $\text{intpsi0} = \text{trapz}(\text{psi0}, x)$. La quantité multipliée par le β est très petite du fait que l'intégration de la bathy sur le domaine est très grande...

On a $\text{intpsi0} = 88\,158\,\text{m}^2$ dans cette configuration et $\max(\text{psi} - \text{err} * \text{psi0}) = 2$

Simulation sur le domaine entier en retirant conservation sableuse

En désactivant la conservation sableuse et relançant les simulations comparant les grad et le $\delta\psi$, il n'y a pas de différence notables comparé aux graphiques d'avant.

Note : 16% de sable en trop

Passage du code en vectoriel pour convergence en dx

En cours...Quelques traces de xstep :

```
xstep = x[1]-x[0]
dwin = 5
H1.setP("stepH", floor(25/xstep)) # for incremental model
H1.setP("Nwin", floor(dwin/xstep))
```

Extrait d'une fonction du modèle hydro avec l'utilisation de Nwin

```
w = zeros(Nwin)
for i in range(Nwin):
    w[Nwin-i-1] = exp(log(0.01) / (Nwin-1) ** 2 * i ** 2)

ibreak = Nwin

tab_ibreak = ones(len(x)) * Nwin

lcp = ones(len(x)) # linear combinaison parameter
ii = 0
for i in range(Nwin):
    lcp[i] = x[i] / dwin

Ks_0 = 1

for i in range(nbS_t):
    if i == 0:
        H0 = current_H0
    else:
        newHi = 0
        newCi = 0
        sumw = 0

        for j in range(min(i, Nwin, ibreak)):
            newHi = newHi + w[min(i,
                ↳ Nwin, ibreak) - j - 1] * H_t[i - j - 1]
            newCi = newCi + w[min(i, Nwin,
                ↳ ibreak) - j - 1] * C_t[i - j - 1]
            sumw = sumw + w[min(i, Nwin, ibreak) - j - 1]

        H0 = newHi / sumw
```

$$Hw[i] = H0$$

```
root@SLLH10-JBLEMMET:/home/ronan/Opt/Morpho# grep -r -i 'step1'
hydro_models/hydro_tools.py:def shoaling_incremental(nbs_t, nb8_t, h_t, sigma0, C0, theta0, current_H0, x, gamma, step1):
hydro_models/hydro_tools.py:    HB = H*(floor((1-1/step1)*step1)
hydro_models/hydro_tools.py:    CB = C*(floor((1-1/step1)*step1)
hydro_models/hydro_tools.py:bak1:def shoaling_incremental(nbs_t, nb8_t, h_t, sigma0, C0, theta0, current_H0, x, gamma, step1):
hydro_models/hydro_tools.py:bak1:    HB = H*(floor((1-1/step1)*step1)
hydro_models/hydro_tools.py:bak1:    CB = C*(floor((1-1/step1)*step1)
hydro_models/shoaling_incremental.py:        step1 = self.getP('step1')
hydro_models/shoaling_incremental.py:        k_t, C_t, Cg_t, h_t, XB_t, nb8_t, H_s, tab_xB, tab_nb8, tab_xB_end = shoaling_incremental(nbs_t, nb8_t, h_t, sigma0, C0, theta0, current_H0, x, gamma, step1)
hydro_models/shoaling_incremental.py:        step1 = self.getP('step1')
hydro_models/shoaling_incremental.py:        dh[i] = dh[i] + dsh[floor((1-1/step1)*step1)*K_s[i] + Hi[floor((1-1/step1)*step1)*dK_s[i]
hydro_models/shoaling_window.py:        step1 = self.getP('step1')
hydro_models/shoaling_window_LC.py:        step1 = self.getP('step1')
hydro_models/shoaling_window_LC_ADT.py:        step1 = self.getP('step1')
hydro_models/shoaling_window_LC_ADT.py:        step1 = self.getP('step1')
hydro_models/shoaling_window_LC_ADT.py:        step1 = self.getP('step1')
```

Rédaction

- 

Compte rendu scientifique

Semaine 20-21 : 28/03/22-08/04/22

Débuguage modèle morpho à $T_0 = 6$ s

Corriger le bug du code sur l'intégration trapz

On implémente la régulation du sable de la manière suivante dans la morpho :

$$d_i = d_i \left(1 + \beta \frac{(\psi - \varepsilon \psi_0)_i}{\int_{\Omega} \psi_0} dx \right)$$

Ceci fonctionne bien, il y a bien une évolution de la morpho quelque soit la période de vague.

Ayant eu comme résultat une morpho qu'à évolué à h_{20} et T_6 en amont, on cherche à comprendre si cela vient du modèle hydro ou simplement de la configuration particulière.

On effectue donc la même simulation pour une hauteur d'eau de cette fois h_{40} .

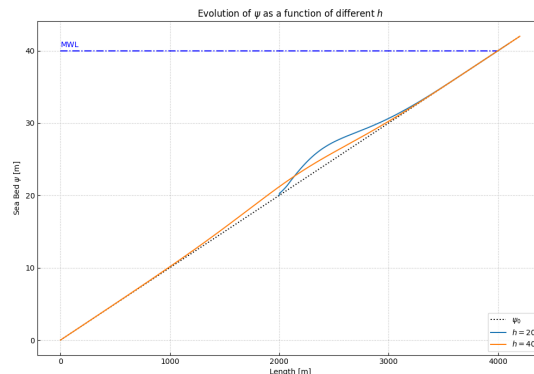


FIGURE 122 – Simulation à $T = 6$ s pour différentes hauteurs d'eau et une même simulation

On obtient, par grande surprise, une morpho qui a évoluée vers h_{20} ! Le problème ici peut donc venir des conditions physiques du problème. Etrangement, l'interaction entre la houle et la morpho devrait commencer seulement à h_4 et non pas h_{20} .

Convergence en temps de Copter

Ayant déjà fait des tests de convergence sur des cas de tempête de 1 semaine, on effectue cette fois-ci des tests sur une simulation qui sera confrontée aux données expérimentales afin d'inclure ces résultats dans l'article de MDPI.

Ayant un forçage avec des données de simulation de batteur, on utilise un module d'interpolation de python afin de pouvoir changer le pas de temps Δt tout en gardant le même forçage.

De manière analogue aux simulations de tempêtes et de convergence, on obtient les résultats suivants avec un ψ_{ref} correspondant à une simulation avec un $\Delta t = 0.02$ s et donc 75 000 itérations du modèle.

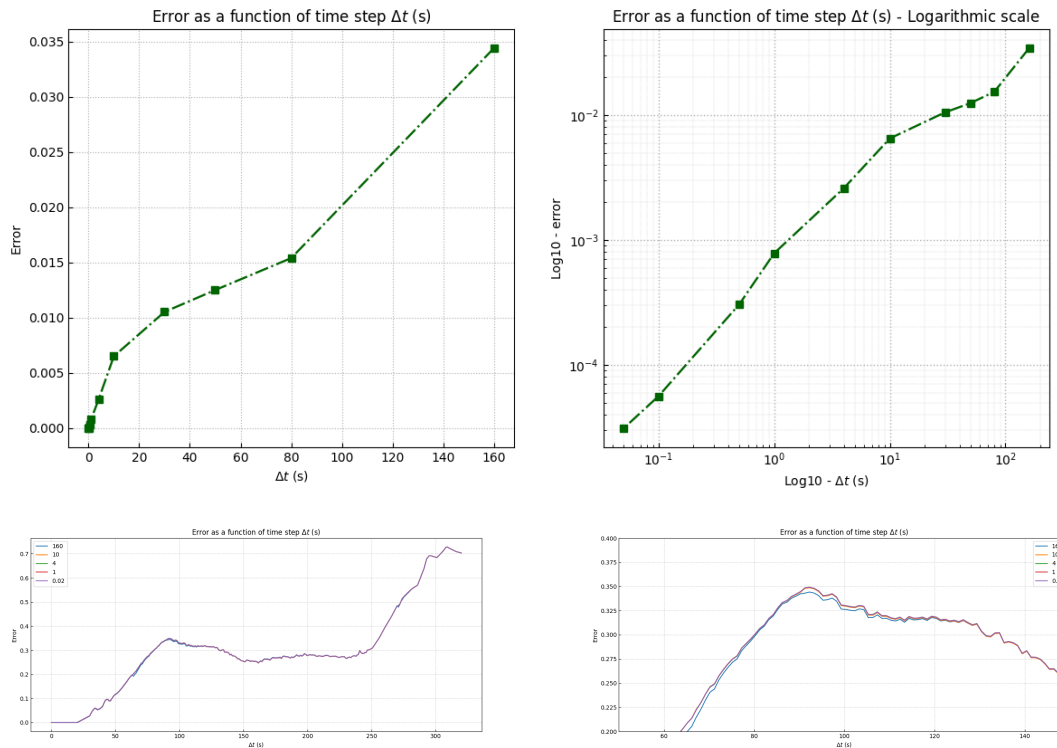


FIGURE 123 – Convergence en temps de Copter

On remarque que le modèle semble converger de manière linéaire vers la solution de référence. Même pour des pas de temps à $\Delta t = 10$ s, le modèle semble converger correctement. Si on prends un pas de temps à $\Delta t = 160$ s, la solution là n'est pas correcte.

Rédaction

- Mise en page du template pour le journal, continuation de la rédaction sur l'article de Mme Cook + rédaction sur la convergence en pas de temps
- Rédaction sur l'état de l'art de la morphodynamique des plages par calcul optimal
- Reflexions sur les chap1 chap2

Compte rendu scientifique

Semaine 19 : 21/03/22-26/03/22

Débuguage modèle morpho à $T_0 = 6\text{ s}$

On décide de sauvegarder les gradients d à toutes les itérations pour voir où le programme va exploser.

En affichant la sauvegarde de d sur $T_0 = 6\text{ s}$, on remarque que d peut atteindre des valeurs à 50 ce qui est totalement irréaliste.

On ajoute la majoration suivante sur le ψ :

```
psi = [psi[i]-sign(rho0[i]*Lambda[i]*d[i]*dt)*0.5*abs(min(rho0[i]*Lambda[i]*d[i]*dt, rho0[i]*dt*C[i])) for i in range(len(psi))]
```

ce qui correspond à :

$$\delta\psi = \text{sign}(-\Lambda\Upsilon d\delta t) \min(|\Lambda\Upsilon d\delta t|, u_{orb}(0)\Upsilon\delta t)$$

et surprise..., le problème n'est pas résolu, la morpho finit par exploser.

Etrangement, quand on calcul d au début du programme de morpho, celui-ci est "ok" et à la fin, celui-ci "explose". On décide donc de chercher lignes par lignes quel est le moment qui fait exploser d .

On finit par trouver la ligne suivante :

```
if self.getC("sand") == 1:
    err = 1.00
    d = d + beta * 2 * trapz(psi-err*psi0, x)
```

Très étrange au premier abord que cette ligne fasse exploser la morpho. Il faut savoir que $2 * \text{trapz}(\text{psi-err*psi0}, x)$ est un scalaire et donc on ajoute une valeur scalaire à d . Plus on ajoute de différences à d , plus l'intégration sera grande et plus la d augmentera etc.

On essaie de "tuner" ce terme avec les coefficients etc afin qu'il n'explose pas : sans succès.

On essaie de le désactiver et on obtient un résultat qui explose mais pas dès les premières itérations.

On ajoute donc la même majoration que ψ sur ce terme (1/2 de chaque) :

```
intg = 2 * trapz(psi-err*psi0, x)
d = [d[i]+sign(beta * intg)*0.5*abs(min(beta * intg, rho0[i]*dt*C[i])) for i in range(len(d))]
```

On obtient les résultats suivants :

- Avec majoration sur ψ en activant la partie intégration de différence de base

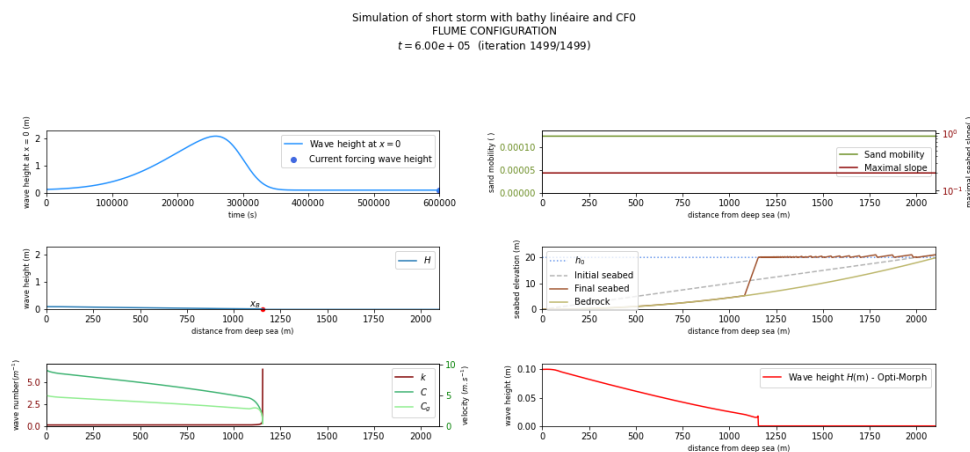


FIGURE 124 – Affichage avec majoration

- Avec majoration sur ψ en désactivant la partie intégration de différence

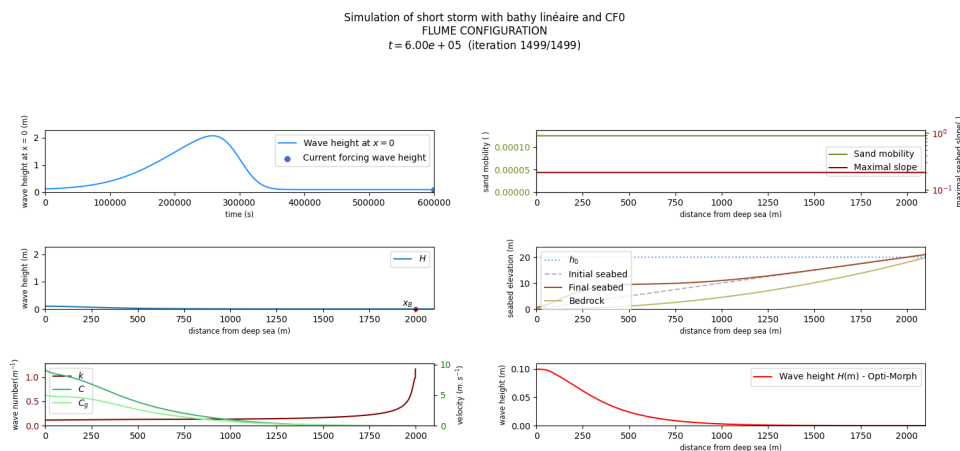


FIGURE 125 – Affichage avec majoration

- Avec majoration sur ψ en activant la majoration partie intégration de différence

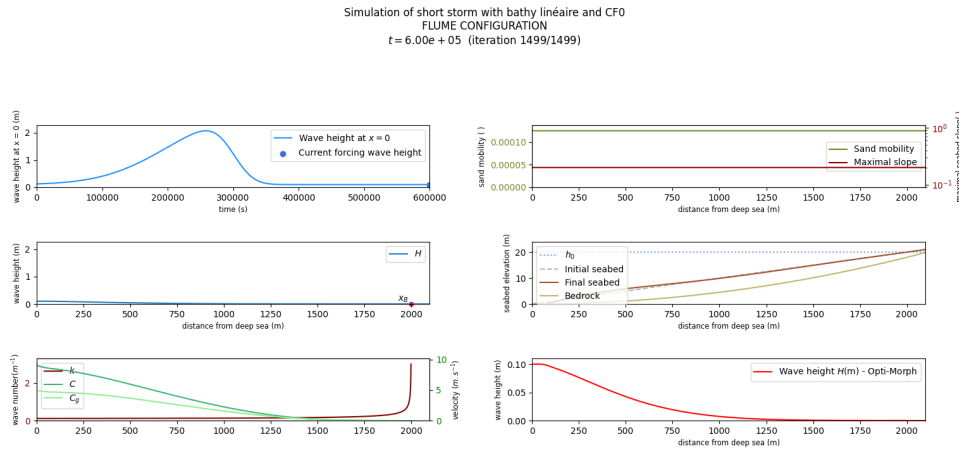


FIGURE 126 – Affichage avec majoration

Les résultats sont physiquement pas corrects mais il y a **tout de même la création progressif d'une barre!**
En essayant les deux majorations avec $T_0 = 2$ s, on obtient le résultat suivant :

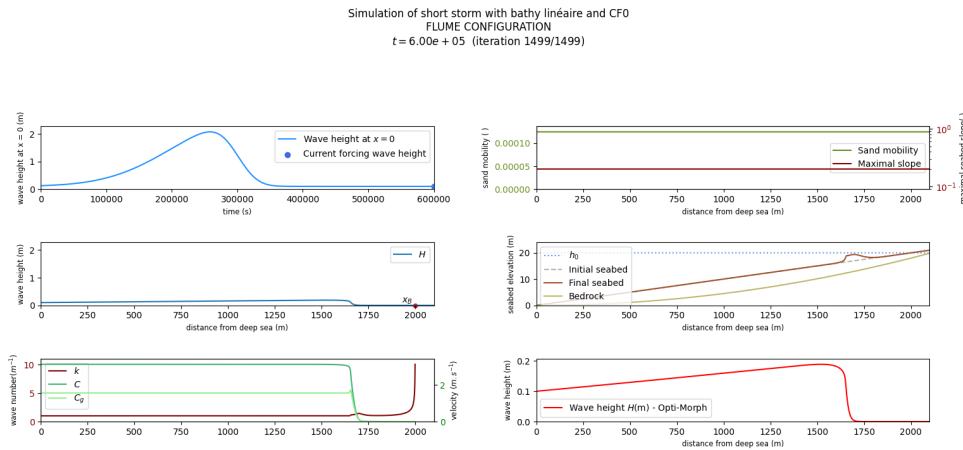


FIGURE 127 – Affichage avec majoration à T2

Sommaire chapitre 1 ?

1	Vers un modèle 1D robuste d'hydro-morphodynamique du littoral	2
1.1	Introduction	2
1.2	Présentation du modèle 2021	2
1.2.1	Équations gouvernantes	2
1.2.2	Fonctionnelle	3
1.2.3	Contraintes	3
1.3	Amélioration du modèle actuel par approche de fonctionnelles	3
1.3.1	Fonctionnelle à dissipation	3
1.3.2	Fonctionnelle à terme de travail	3
1.3.3	Fonctionnelle à terme tension de radiation	3
1.3.4	Fonctionnelle à terme de mémoire	3
1.3.5	Discussion	4
1.3.6	Conclusion	4
1.4	Amélioration du modèle actuel par approche de diverses	4
1.4.1	Introduction sur les différents axes d'améliorations	4
1.4.2	Ajout d'un terme de transport	4
1.4.3	Evolution du modèle hydro par mémoire de Ks	4
1.4.4	Discussion	4
1.4.5	Conclusion	4
1.5	Convergence temporelle du modèle	4
1.5.1	Introduction	4
1.5.2	Convergence en pas de temps	5
1.5.3	Complexité physique du modèle	6
1.5.4	Conclusion	7
1.6	Justification d'un choix pertinent de fonctionnelle	7
1.6.1	Introduction	7
1.6.2	Problème de résistance minimale de Newton	7
1.6.3	Analogie entre un système [flux d'air-avion] et un système [flux d'eau-bathymétrie]	10
1.6.4	Discussion	11
1.6.5	Conclusion	11
1.7	Conclusion	11

Compte rendu scientifique

Semaine 18 : 14/03/22-18/03/22

Question et réflexions pendant le Vercors

- Pourquoi ne pas essayer plusieurs n fois la descente par pas de temps ? Pour tendre plus rapidement vers le minimum ?
- Implémenter un calcul avec une perte de 3% de sable pour obtenir une simulation plus réaliste par rapport aux données expérimentales de Copter
- Calculer un pas de temps de référence BIEN PLUS PETIT (pas $\Delta t=60$).
- Parler plus de temps de calculs pour pouvoir comparer aux autres modèles
- Pourquoi ne pas comparer avec une simulation expérimentale de création de barre en bassin ? Simu Tempête

Simulation avec un calcul de fonctionnelle sur le domaine entier

Remarque de M. Sous intéressante, pourquoi calculer l'énergie de la vague seulement avant le déferlement ? En effet, il y a conservation de l'énergie TOTALE et non conservation de l'énergie de la houle. Celle-ci n'est donc pas constante sur tout le domaine ?

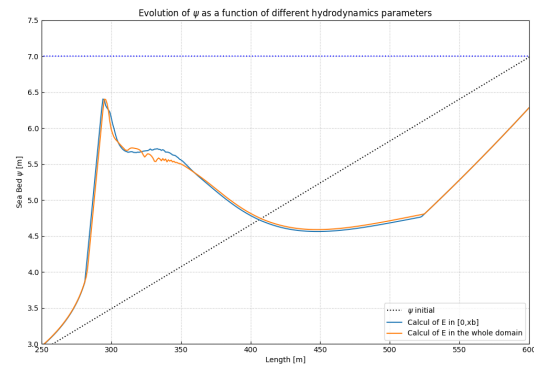
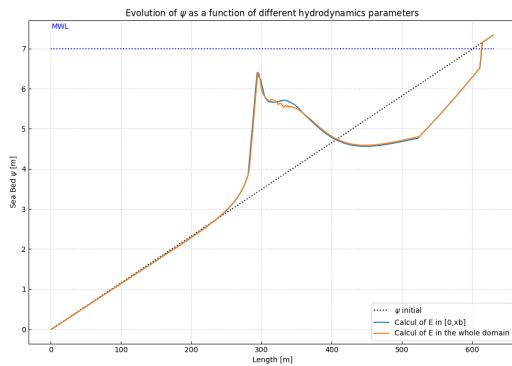


FIGURE 128 – Calcul de fonctionnelle sur $[0, x_S]$

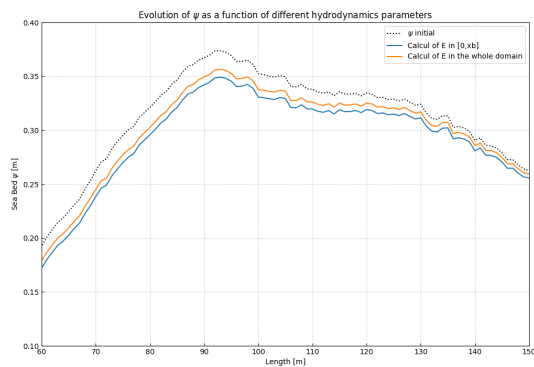
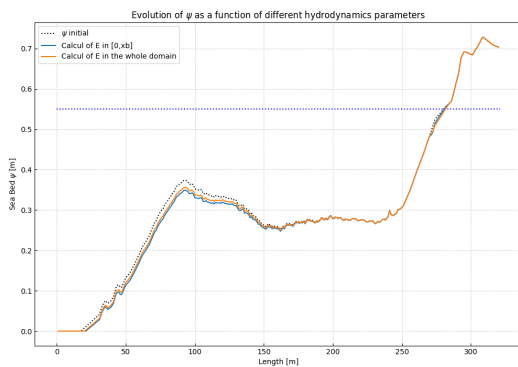


FIGURE 129 – Calcul de fonctionnelle sur $[0, x_S]$

Les résultats ne sont pas nécessairement meilleurs mais il convient de prendre en considération qu'utiliser cette fonctionnelle sur tout le domaine n'est pas aberrant.

Implémentation du terme temporel

Dans l'équation de descente :

$$\psi^{n+1} = \psi^n - \tau \Lambda \Upsilon d$$

on a $\tau = \frac{1}{\text{nombre d'itérations}}$, on a donc $\Delta t = \tau T_f$.

Si on suppose que on effectue une simulation de tempête sur 7 jours et une tempête sur 1 jour avec le même nombre d'itérations (même si le pas de temps Δt sera 7 fois plus petit), on aura nécessairement le même résultat si le forçage est configuré de la même manière.

Il est donc nécessaire de laisser seulement le Δt dans l'équation et non le τ . Sinon, la descente aura toujours la même "puissance" que ça soit pour une simulation à 1 jours ou n jours.

On rectifie donc l'équation de descente avec

$$\psi^{n+1} = \psi^n - \Delta t \Lambda \Upsilon d \quad \text{soit} \quad \psi^{n+1} = \psi^n - \tau T_f \Lambda \Upsilon$$

et on adapte la mobilité en conséquence. Par exemple, on arrive à une mobilité $\Upsilon = 10^{-4}$ avec les résultats suivants :

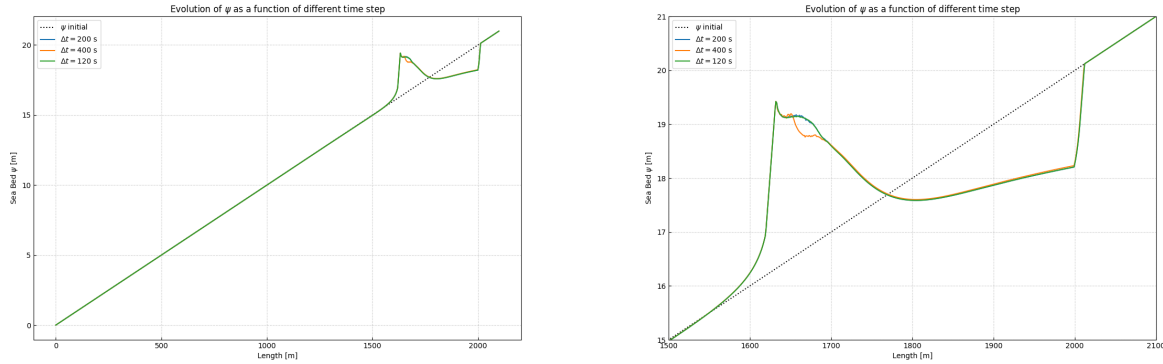


FIGURE 130 – Convergence en temps

On remarque sans surprise et toujours une solution qui semble converger vers une solution donnée.

Ajout d'une majoration dans l'équation de la descente

Une étape suivante importante serait d'implémenter une majoration dans l'équation de descente :

$$\delta\psi = \text{sign}(-\Lambda \Upsilon d \delta t) \min(|\Lambda \Upsilon d \delta t|, u_{orb}(0) \Upsilon \delta t)$$

Si on ajoute cette majoration à l'équation de descente, on se retrouve avec un cas limite égal à : $u_{orb}(0) \Upsilon \delta t$. Or, le $u_{orb}(0) \approx 1$ et donc le cas-limite est de $\Upsilon \delta t$. En prenant quelques valeurs numériques, on prends la mobilité à $\Upsilon = 10^{-4} \text{ m.kg}^{-1}$ et le pas de temps dans ce cas (tempête) à $\Delta t = 400 \text{ s}$. On arrive donc à un cas limite de déplacement de $u_{orb}(0) \Upsilon \delta t = 0.4 \text{ m}$ soit 40 centimètres, ce qui est peu pour 400 secondes de simulation !

Sans surprise, en lançant les calculs avec cette majoration, aucune mobilité n'apparaît.

→ revoir expression ?

Nouveaux résultats sur convergence temporelle Δt

Avec les remarques de M. Bouchette et Sam, on relance des simulations sur une plage de mobilités plus grande ainsi que des pas de temps plus petits afin de s'approcher d'un pas de temps réaliste et très similaire de ceux des modèles XBeach, Saint-Venant etc.

On obtient les résultats suivants :

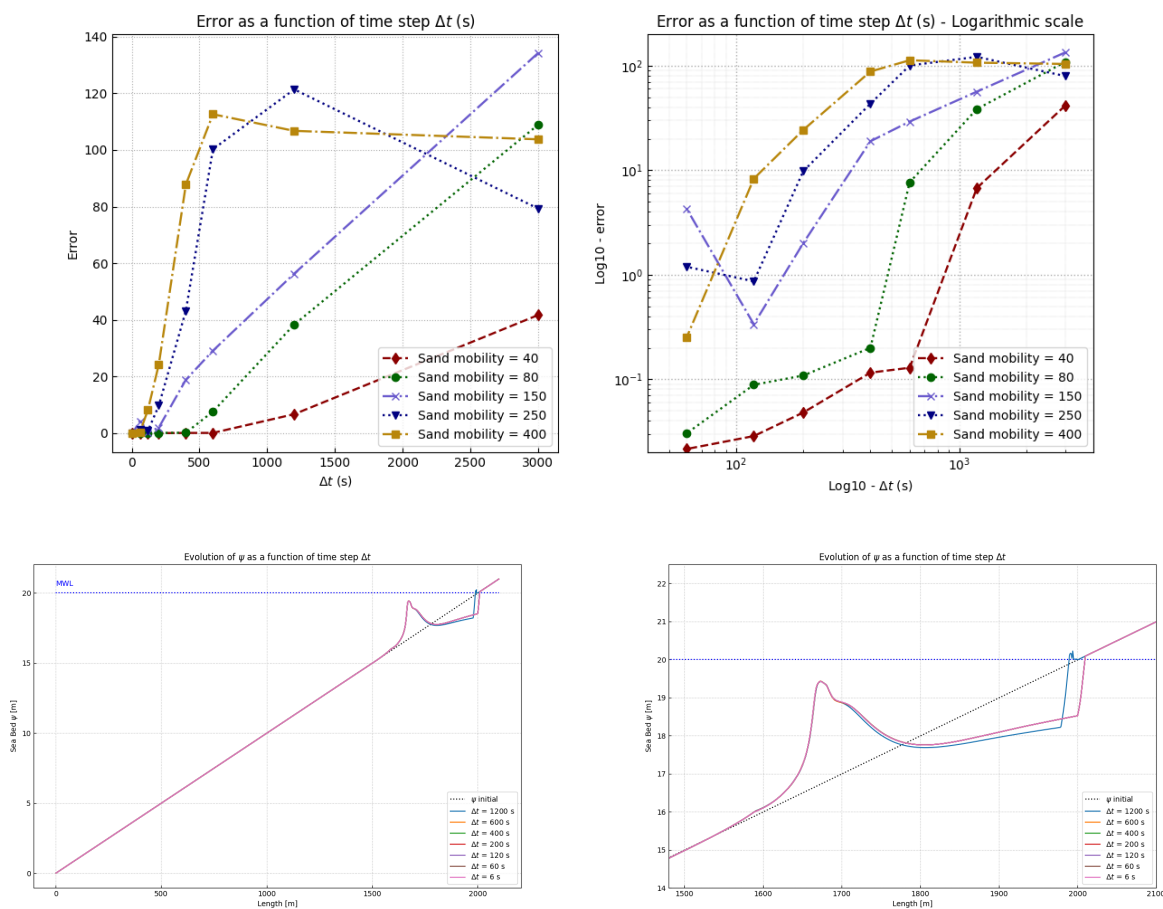


FIGURE 131 – Convergence en temps

On remarque qu'il y a cette-fois ci beaucoup plus de soucis pour converger lorsque la mobilité devient grande. Il est intéressant de regarder les affichages de rendu de simulations avec ces mobilités bien plus grandes :

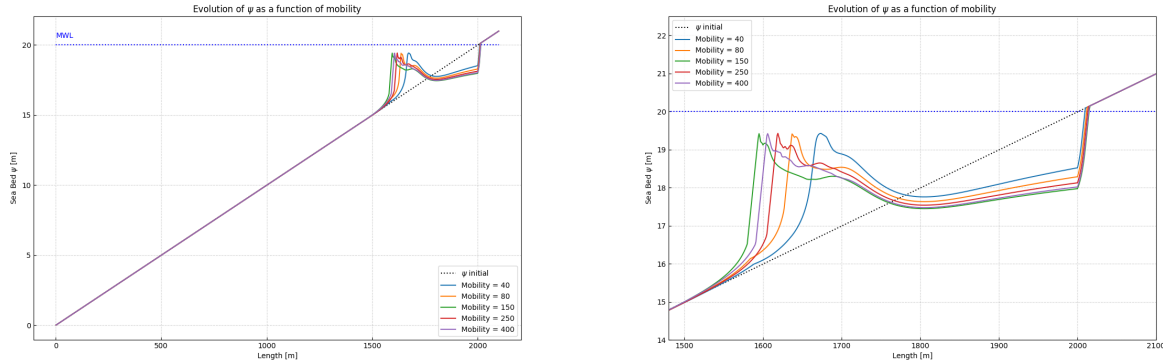


FIGURE 132 – Différentes mobilités

Changer la mobilité revient non pas à déplacer la barre mais surtout l'intensité de transition entre la bathy initiale ψ_0 et la barre finale ψ_f .

Il serait donc intéressant d'avoir des **données expérimentales** afin de caler la simulation pour voir quelle est la mobilité qui est la plus réaliste possible.

Simulation sans morpho : seulement hydro à $dw = 100$

En lançant seulement un modèle hydro en ayant désactivé toute la mobilité : équation de descente en commenté. On obtient un résultat hydro qui semblent cohérents.

- Scroll Figures__SCENARIO_CF0_T6_no-morpho

Avec morpho et $T_0 = 6\text{ s}$

Malgré que le modèle hydro a l'air correct, on remarque qu'il y a toujours un déplacement morpho très étrange dès les premières itérations à cette période. En creusant le modèle hydro où le problème subsiste pour la première fois, on remarque cherche à

Example of simulation with linear sandbed
FLUME CONFIGURATION
 $t = 6.00e + 04$ (iteration 50/1499)

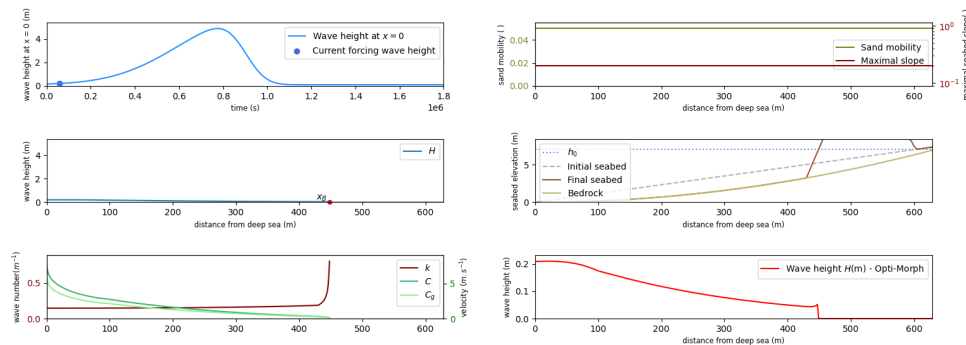


FIGURE 133 – Problème morpho

comprendre l'influence de la période sur et le $dwin$. RAS pour le moment.

Convergence dx : relaxation

En retirant le terme de relaxation dans le traitement morpho, on obtient les résultats suivants pour des simulations à différents pas d'espace dx .

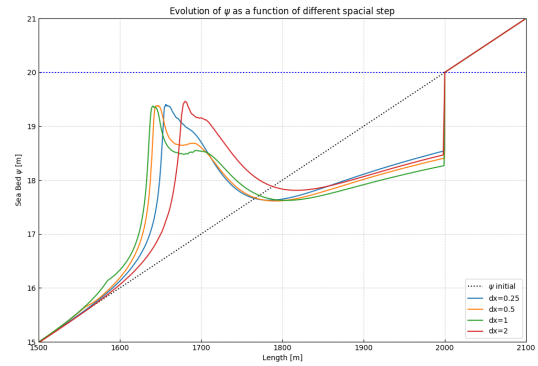
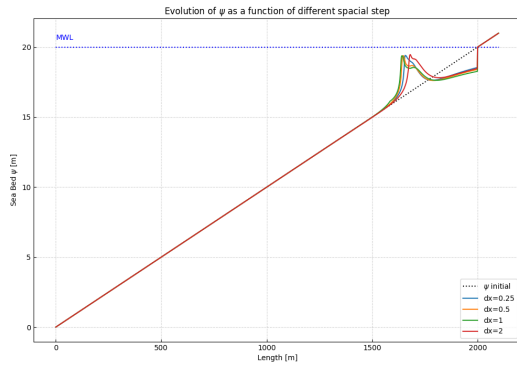


FIGURE 134 – Convergence spatiale

Cette fois-ci, il n'y a plus le problème de hauteur de barre car elles semblent toutes être de la même taille. Cependant, on remarque un décalage plus ou moins important. Des problèmes sur les différences finies etc doivent toujours être présents dans le code.

Compte rendu scientifique

Semaine 16-17 : 28/02/22-11/03/22

Convergence en pas de temps

En faisant varier le pas de temps, on arrive aux figures suivantes pour une mobilité de 40 :

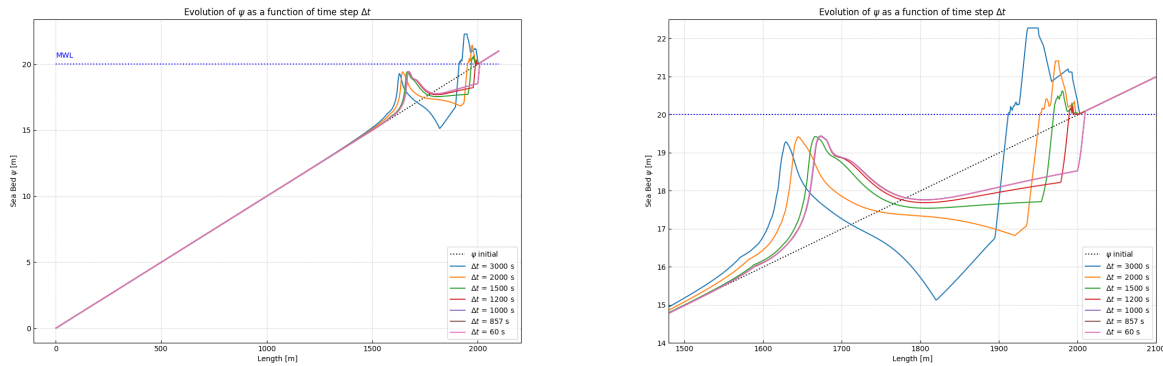


FIGURE 135 – Convergence en pas de temps

On prends une simulation de référence à $\Delta t = 60 \text{ s}$ ce qui correspond à 10 000 itérations.
On remarque qu'à partir de $\Delta t = 1000 \text{ s}$, la solution semble converger vers la solution de référence.

On cherche ensuite à évaluer l'erreur entre les solutions simulés et celle de référence. Pour se faire, on calculera l' "erreur" sous la forme suivante :

$$error = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\psi_{ref} - \psi_i)^2}.$$

avec n le nombre de points du domaine.

On trouve les courbes d'erreur suivantes avec des mobilités sédimentaires de 40,60,70.

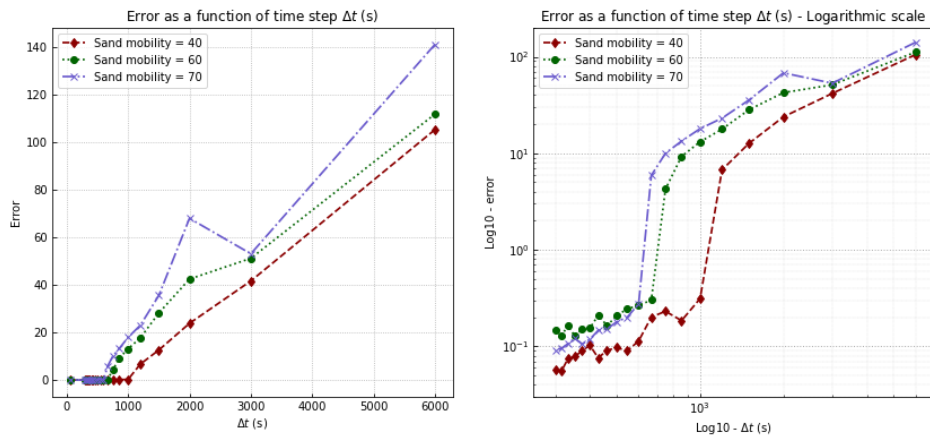


FIGURE 136 – Convergence en pas de temps

On remarque dans tous les cas une convergence certaine à partir d'un pas de temps $\Delta t < 500 \text{ s}$. Forcément, si la simulation est plus morphogène (mobilité supérieure par exemple), il sera nécessaire d'avoir un pas de temps plus petit pour avoir une convergence sur la simulation.

Simulation sur les différents modèles hydro

On essaie de tracer l'évolution de tous les modèles hydro en fonction du domaine. On trace ceci au pic de la tempête là où la hauteur de houle H est de 4 m . On obtient les résultats suivants :

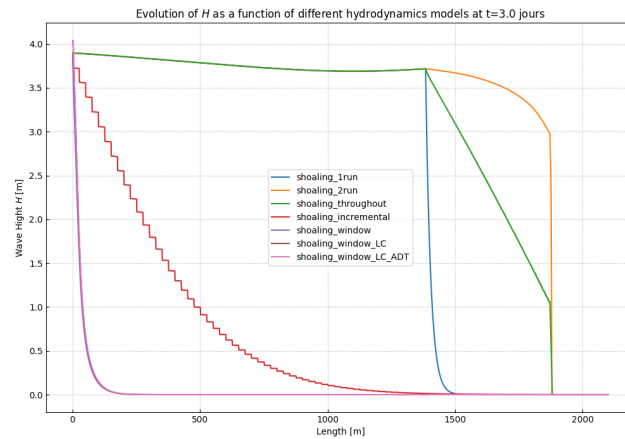


FIGURE 137 – Différents modèles hydro à période $T_0 = 6 \text{ s}$

En essayant les différents modèles hydrodynamiques sur une simulation de référence à $T_0 = 6 \text{ s}$, on obtient toujours la bosse d'acréction ci-dessous.

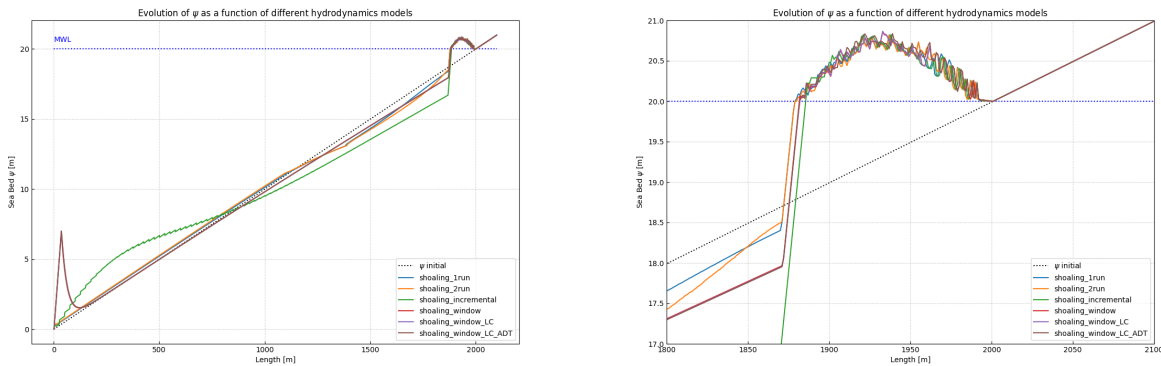


FIGURE 138 – ψ avec différents modèles hydro à période $T_0 = 6 \text{ s}$

Il est sûrement nécessaire de créer un nouveau modèle hydro ou de creuser les paramètres des derniers modèles.

Nouveau modèle hydro ?

En "tunant" les paramètres du dernier modèle hydro : on change le *dwini* de 5 à 200, on peut arriver à un déferlement de vague comme on peut voir ci-dessous :

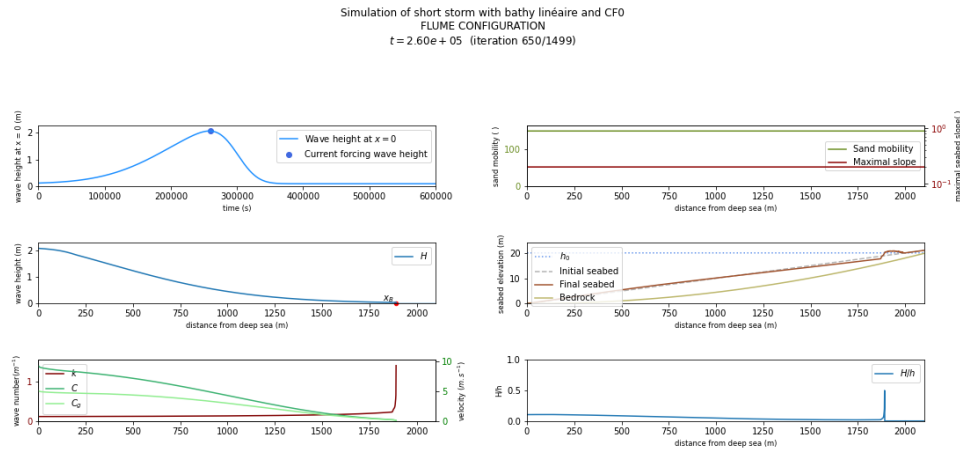


FIGURE 139 – Différents modèles hydro à période $T_0 = 6$ s

Le temps de calcul est bien plus long mais il y a bien déferlement. Or, on observe toujours le même résultat morpho pas très réaliste.

Une idée serait donc d'aller vers un nouveau modèle hydro de mémoire de K_s de la forme suivante :

$$K_s^* = (1 - \alpha)K_s^n + \alpha K_s^{n-1}$$

Il en découle simplement :

$$\nabla_\psi K_s^* = \alpha \nabla_\psi K_s^{n-1} + (1 - \alpha) \nabla_\psi K_s^n$$

Une relaxation entre le K_s au pas de temps précédent et le K_s actuel.

L'idée est bonne mais à mon avis, le problème ne vient pas exclusivement du K_s . En effet, celui-ci est borné entre [0,1.25] (voir fig ci-dessous) et tend très rapidement vers 1. Son influence n'est peut-être pas très grande par rapport au H qui lui est très faible.

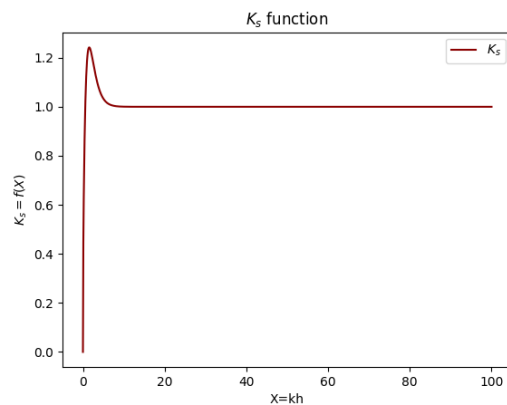


FIGURE 140 – Courbe du K_s

Pour voir l'influence de ce nouveau K_s^* , on trace le K_s et K_s^* sur D_x au cours du temps dans le post-traitement.

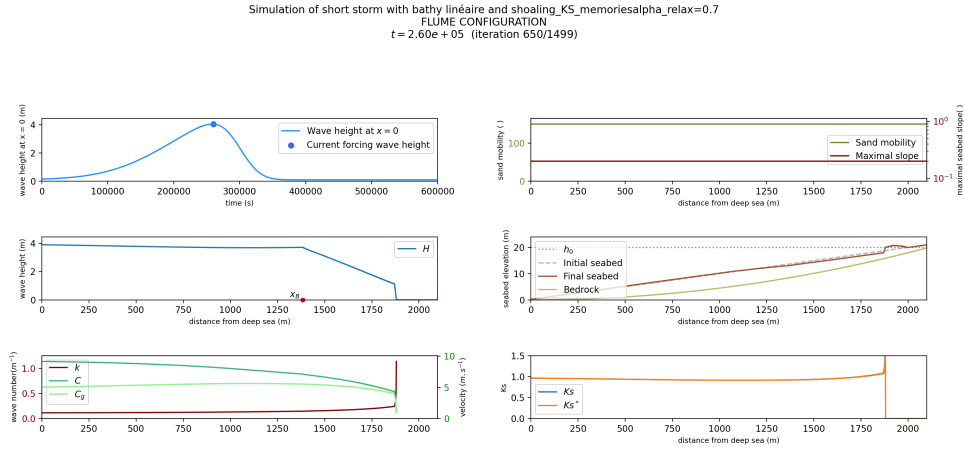


FIGURE 141 – Modèles hydro K_s mémoire à période $T_0 = 6$ s

On remarque qu'il n'y a pas beaucoup d'effet sur le K_s avec ce nouveau modèle. On pourrait aller plus loin avec des moyennes glissantes etc. On peut toujours regarder quelques résultats avec différents coefficients de relaxation.

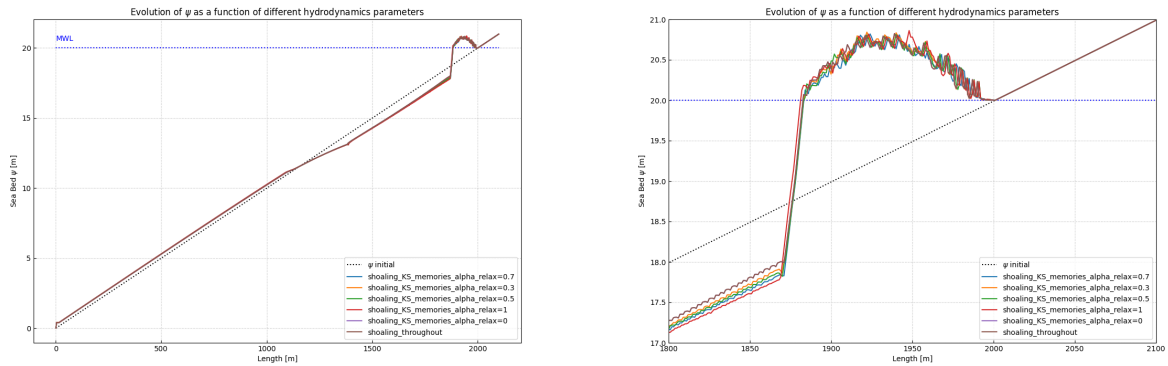


FIGURE 142 – Modèles hydro K_s mémoire à période $T_0 = 6$ s

Convergence en pas spatiale dx

Simulations visant à montrer une convergence en pas d'espace. Le but est donc de faire varier le pas spatiale dx jusqu'à observer une convergence du calcul.

En essayant de faire varier les pas spatiaux dx sur les valeurs : [0.25,0.5,1,2] (en mètres), on obtient les résultats suivants :

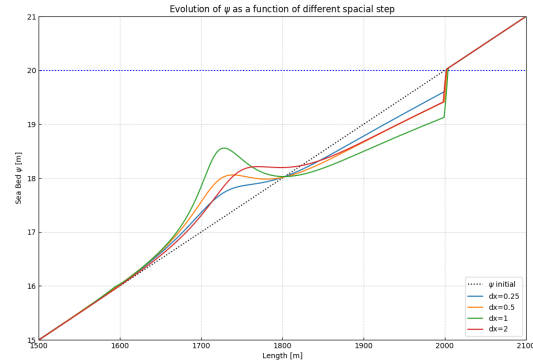
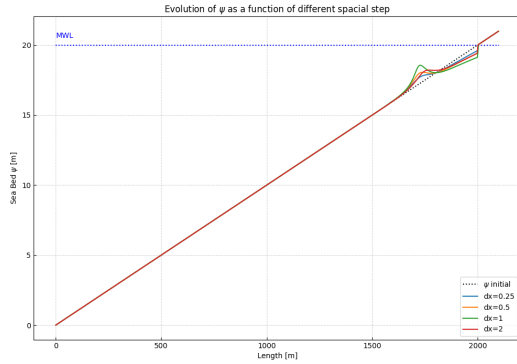


FIGURE 143 – Essai sur la convergence en pas spatiale pour une simulation à $T_0 = 2$ s

On observe que les résultats ne semblent pas converger vers une solution unique.

Plusieurs hypothèses possibles : le code a peut-être été implémenté sans prendre en compte le pas spatiale dx dans les discrétisations en différences finis par exemple. → **SANITY CHECK** du code.

Quelques hypothèses sur la "résolution" :

- Dans les résolutions différences finis, vérifier l'existence des dx
- Lors du calcul de $\nabla_\psi E = \nabla_\psi \frac{1}{8} \int_{\Omega_B} \rho g H^2$, on simplifie le résultat en $\nabla_\psi E = \frac{1}{8} [2\rho g \nabla_\psi H H]_{\Omega_B}$, on oublie peut-être un dx dans l'approximation ? Sinon on calcul simplement $\nabla_\psi \frac{1}{8} [\rho g H^2]_{\Omega_B}$?
- Il y a une fonction de relaxation dans le code qui relaxe en fonction des voisins. Si on discrétise le maillage d'avantage, il peut être normal d'obtenir des résultats différents à moins que le coefficient de relaxation varie en fonction du pas spatiale dx .

Compte rendu scientifique

Semaine 14-15 : 14/02/22-25/02/22

Multi-simulations :

1824 simulations à période de vague $T_0 = 6$

Afin d'obtenir des simulations réalistes, on s'intéresse toujours à des périodes de vagues plus réalistes. Les simulations fonctionnelles étaient celles avec un $T_0 < 2$ s.

On décide donc de lancer un grand nombre de simulations avec cette période de vague $T_0 = 6$ s.

Les critères que l'on fera varier seront les suivants :

- La hauteur de vague $H_0 = [2, 4]$ en mètres
- Le nombre d'itérations : $nb_{iter} = [1500, 3\ 000, 5\ 000, 10\ 000]$
- Le mobilité sédimentaire Λ de $10e - 3$ à $10e - 1$: 19 valeurs.
- Le forçage : on changera le facteur scale afin d'avoir une simulation plus ou moins morphogène. $scale = [1e5, 4e5]$
- La bathymétrie : on essaiera ces simulations sur 6 types de bathymétries différentes : celles évoqués dans les derniers comptes-rendus.

Ceci fait donc un nombre total de $2 \times 4 \times 19 \times 2 \times 6 = 1824$ simulations. On lancera ces simulations en array sur le cluster.

On peut dans un premier temps fixer des paramètres et regarder les différents résultats si on fait varier le pas de temps dt . On obtient par exemple le résultat suivant :

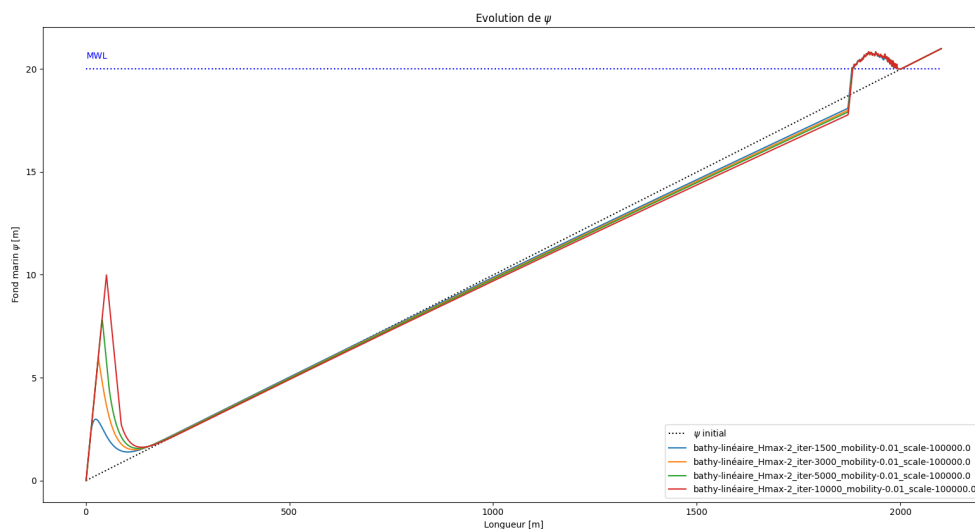


FIGURE 144 – Différents pas de temps

On remarque quelque chose d'annormal. Il semble que le pas de pas de temps ne soit pas fixé. En effet, lorsqu'on change le nombre d'itérations, l'intensité de la simulation augmente dramatiquement. Il convient donc de fixer une quantité dans l'équation gouvernant les changements morphodynamiques. Ces changements seront effectués dans la partie suivante.

On cherche ensuite à observer s'il y a des simulations réalistes dans toutes ces simulations :

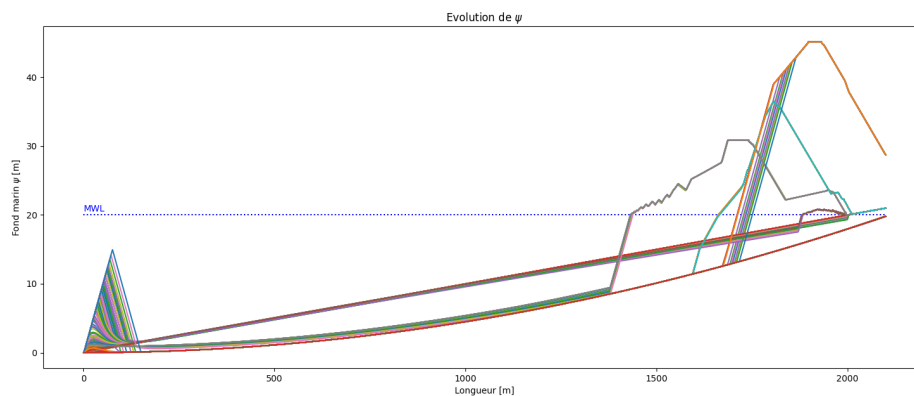


FIGURE 145 – Toutes les simulations pour la première bathy

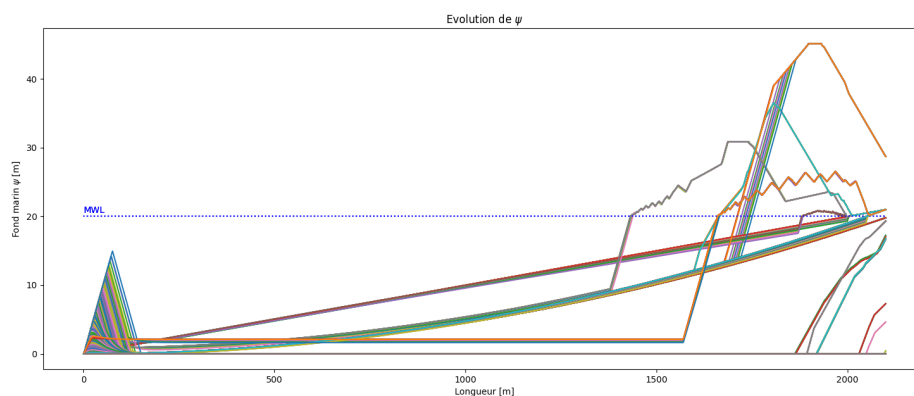


FIGURE 146 – Toutes les simulations pour la première bathy

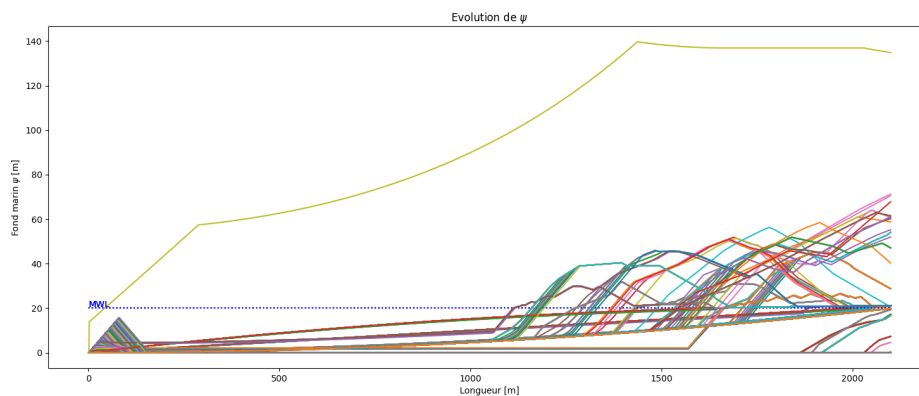


FIGURE 147 – Toutes les simulations pour la seconde bathy

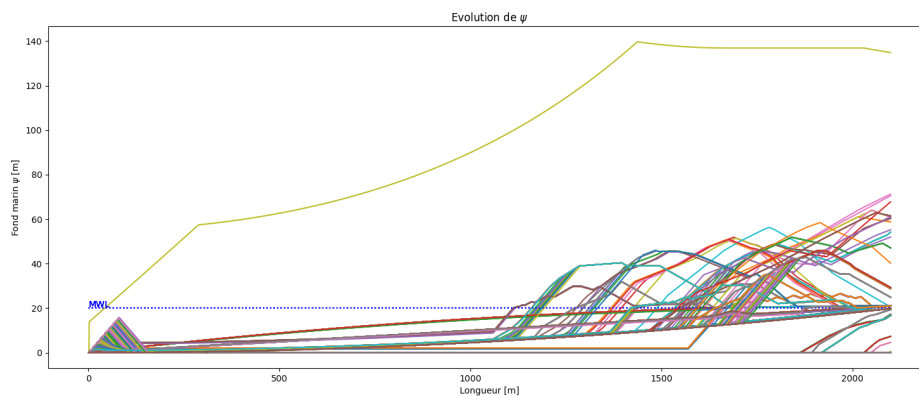


FIGURE 148 – Toutes les simulations pour la 3ème bathy

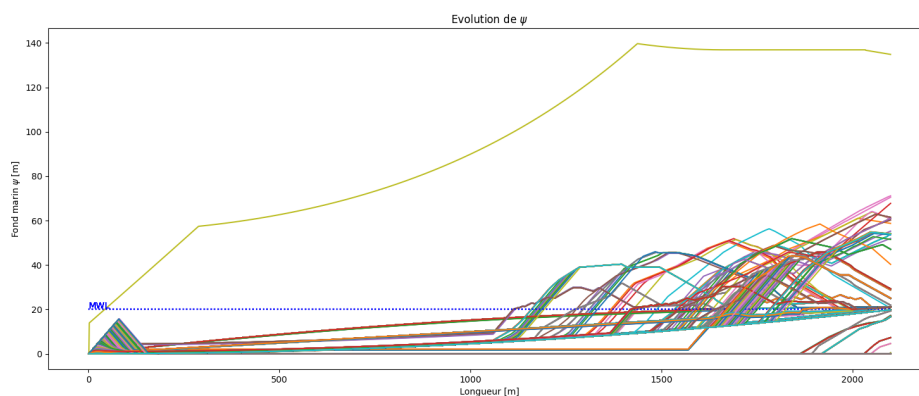


FIGURE 149 – Toutes les simulations pour la 4ème bathy

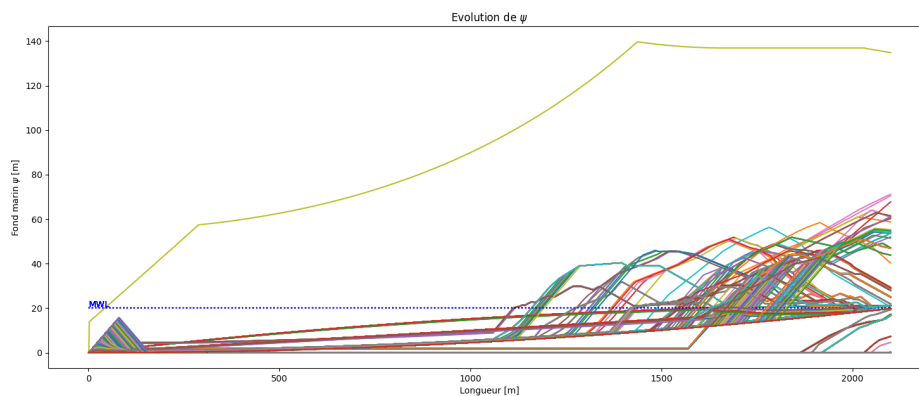


FIGURE 150 – Toutes les simulations pour la 5ème bathy

Quelque soit la bathymétrie, les résultats sont loin d'être réalistes.

Commentaire : La ligne suivante a été commenté dans le code afin que le code termine les itérations quelque soit la configuration : quelque soit la simulation. Ceci facilite le post-traitement des résultats :

```
if xS_t == -1 :
    print("PB : No intersection between seabed and h0")
    #sys.exit()
    #break
return xS_t, xB_t, nbS_t , nbB_t
```

Ceci veut donc dire que certaines simulations ont acrésés et le code aurait du s'arrêter à ce moment là.

Un axe pouvant expliquer ces résultats pourrait être que le **modèle hydro n'est plus adapté**? En effet, lorsqu'on regarde le déferlement de la houle, on remarque que la houle est présente seulement en amont de la simulation comme on peut voir ci-dessous :

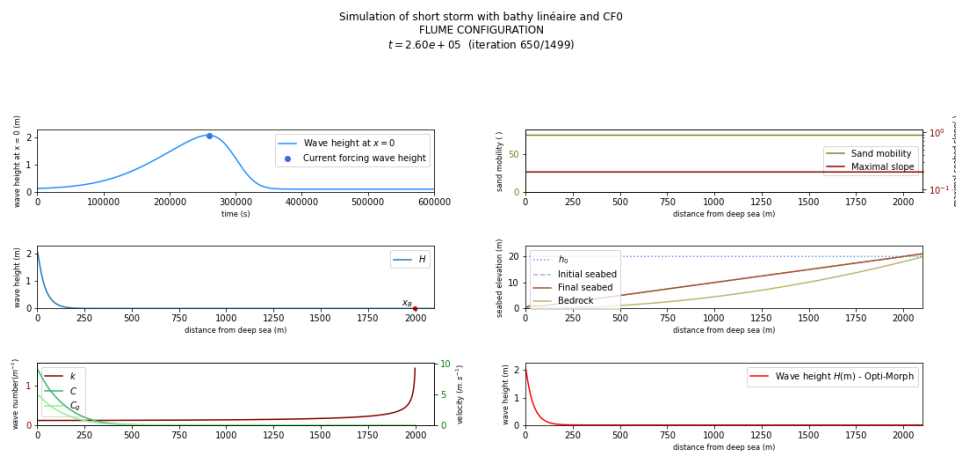


FIGURE 151 – Toutes les simulations pour la 5ème bathy

On a donc essayé de régler ceci en changeant les modèles hydro mais **sans succès**. En effet, il n'y a pas de barre qui se crée là où on le souhaite.

En changeant les affichages, on affiche une figure en $\frac{H}{h}$ puis juste en H et on se rend compte que la hauteur H ne se propage pas sur le domaine (en x).

On a essayé de changer les coefficients du modèle bAD et aAD et sans succès.

En repartant à un modèle simple de type shoaling, on arrive bien à un déferlement mais le résultat est toujours une accrétion et non une barre.

Implémentation d'un coefficient de temps τ

Lorsqu'on observe l'équation gouvernant notre système :

$$\psi_t = -\Lambda \Upsilon d$$

on s'attend à avoir une discrétisation de la manière suivante :

$$\psi^{n+1} = \psi^n - dt \Lambda \Upsilon d$$

or, il n'y a pas de dt . En effet, celui a déjà été rentré dans le Υ qui a été "tunné" afin d'obtenir de bons résultats.

Lorsqu'on cherche à effectuer des simulations plus "précises", il convient de changer le pas de temps.

On introduira donc le terme $\tau = \frac{1}{\text{nb itérations}}$ qui permettra de réguler les changements de pas de temps. L'équation devient donc :

$$\psi^{n+1} = \psi^n - \tau \Lambda \Upsilon d$$

On effectue des tests avec ce coefficient pour deux simulations à même temps final T_f avec un nombre d'itérations = 1500 et 3000. On observe les résultats suivants :

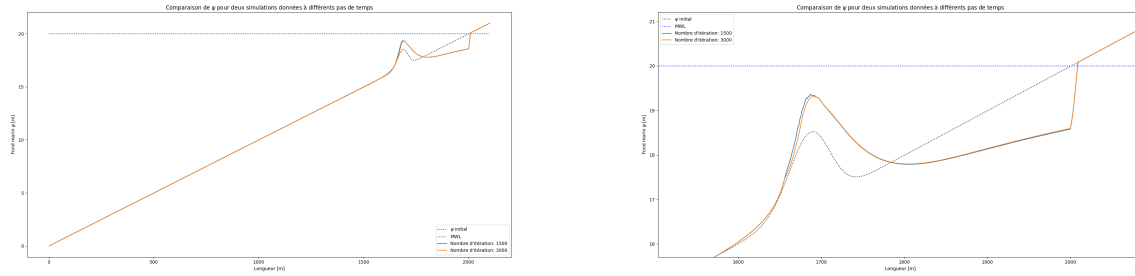


FIGURE 152 – Différents dt pour une même simulation

Sans surprises, la simulation avec un pas de temps plus faible semble plus précise. On peut calculer la norme \mathcal{L}_2 de la différence des deux ψ et on obtient 0.9. En considérant la taille du domaine dx , la différence par cellule est en moyenne de $4e-4m$ soit 0.45mm.

En faisant varier le pas de temps dt (on change le nombre d'itérations et on garde le même temps final T_f), on peut obtenir par exemple le résultat suivant : A partir d'un certain dt correspondant à 5000 et 10 000 itérations, la solution converge vers

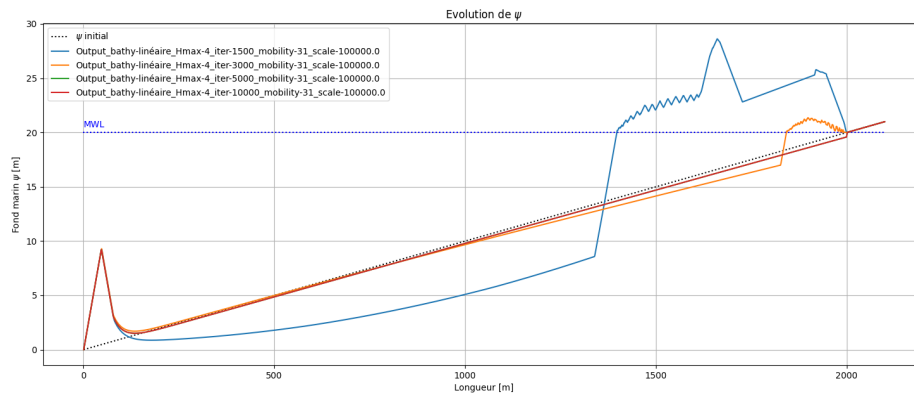


FIGURE 153 – Différents dt pour une même simulation

la même solution. En effet, les courbes vertes et rouges sont confondues. Il semblerait qu'il y ait donc nécessité d'un **critère de convergence** dépendant de dt .

Pour les prochaines simulations, il sera plus intéressant d'effectuer des simulations **réalistes** à période de vagues 2 s.

Vers une majoration limitant un code qui "explose"

Avec le papier de 2014, on a la majoration suivante :

$$|\psi_t \Delta t_{hydro}| \leq |u_{orb} \Delta t_{hydro}|$$

en développant avec l'expression de ψ_t , on arrive à :

$$|-\Lambda \Upsilon d \Delta t_{hydro}| \leq |u_{orb} \Delta t_{hydro}|$$

soit,

$$\Lambda \Upsilon \Delta t_{hydro} |d| \leq |u_{orb} \Delta t_{hydro}|$$

et donc on peut majorer le taux d'excitation Υ de la manière suivante :

$$\Upsilon_i \leq \frac{|u_{orb} \Delta t_{hydro}|}{\Lambda \Delta t_{hydro} |d_i|} = \Upsilon_{crit}$$

avec $d_i = \nabla_{\psi} J + \text{contraintes}$. On donnera donc la forme au nouveau Υ :

$$\Upsilon_{new} = \min(\Upsilon_{crit}, \Upsilon)$$

En implémentant ceci, les résultats ne nous donnent toujours pas la barre que l'on souhaite. La barre est toujours créée en amont du modèle. Peut-être dû à la conservation du sable ou même du modèle hydro.

Au outre, il est difficile de "caler" ce facteur majorant.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 13 : 07/02/22-11/02/22

Multi-simulations :

En reprenant la remarque de M. Bouchette ci-dessous :

Remarque de M. Bouchette : Changer la mobilité reviendrait à changer les propriétés du sable : il n'est pas concevable que le sable ait une dépendance en période de vague T_0 . Il convient donc de changer le paramètre d'excitation Λ afin de rendre compte d'un modèle plus physique.

Une idée d'implémentation serait d'ajouter optionnellement une 6eme colonne qui fera office de Λ_{crit} . On aura donc la relation $\Lambda = \Lambda_{crit} \phi$. S'il n'existe pas de 6eme colonne, alors ce vecteur sera unitaire afin d'éviter tout changements.

On implémente aisément cette partie de code.

On effectue des premiers essais en faisant varier le coefficient Υ_{crit} sur une simulation de référence à $T_0 = 2s$ où on simule une tempête sur un temps $T = 7j$ avec principalement 3 jours de tempête.

On obtient les résultats suivants :

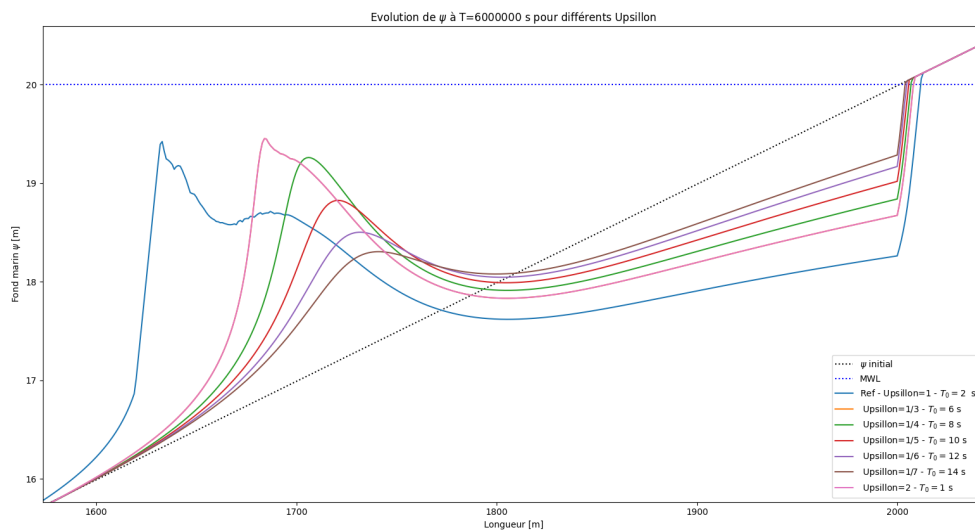


FIGURE 154 – Différents Υ_{crit}

Les résultats semblent assez réalistes avec un coefficient $\Upsilon_{crit} < 1/3$. Ce qui est au dessus de 1 n'est pas très réaliste pour la formation d'une barre.

On regarde ensuite si pour des bathymétries ψ différentes, on a des résultats semblables.

On essaie donc différentes bathymétries avec les coefficients $\Upsilon_{crit} = 2, 1, 1/3$. On obtient les figures suivantes :

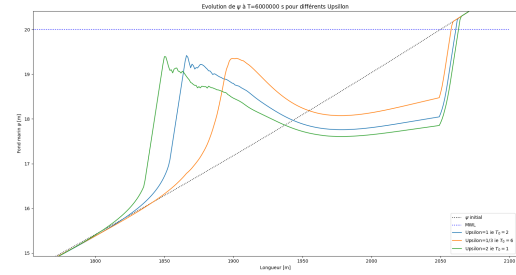
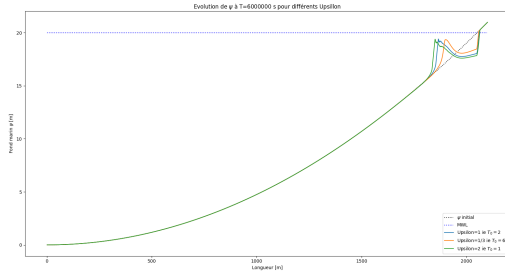


FIGURE 155 – Différents Υ_{crit} à bathymétrie convexe

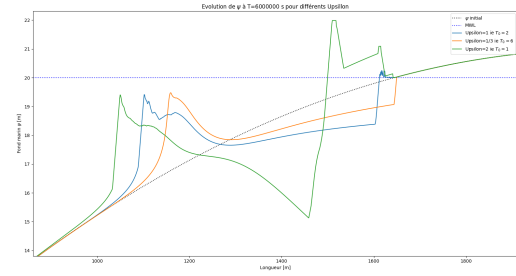
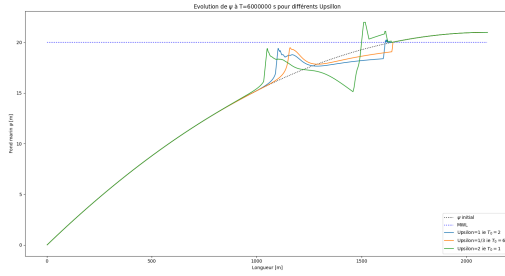


FIGURE 156 – Différents Υ_{crit} à bathymétrie concave

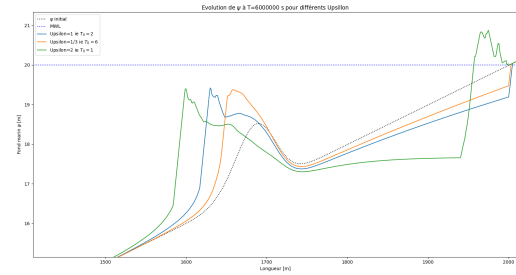
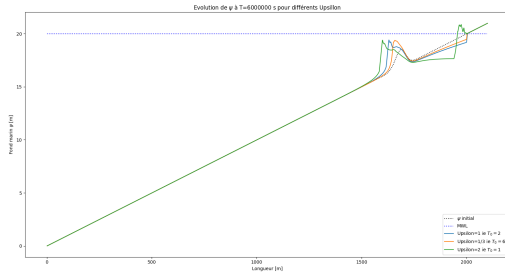


FIGURE 157 – Différents Υ_{crit} à bathymétrie réaliste

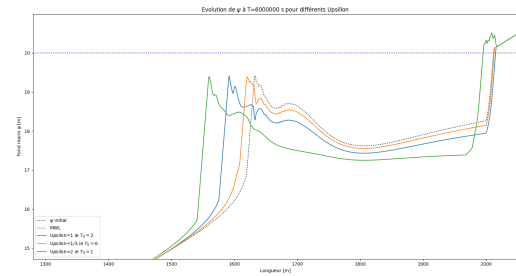
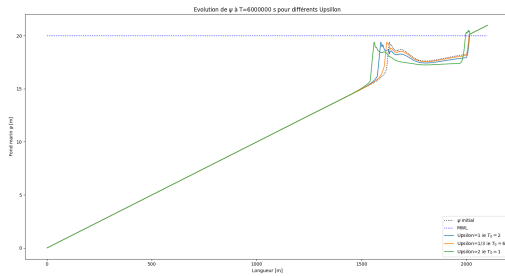


FIGURE 158 – Différents Υ_{crit} à bathymétrie de 1 bosse

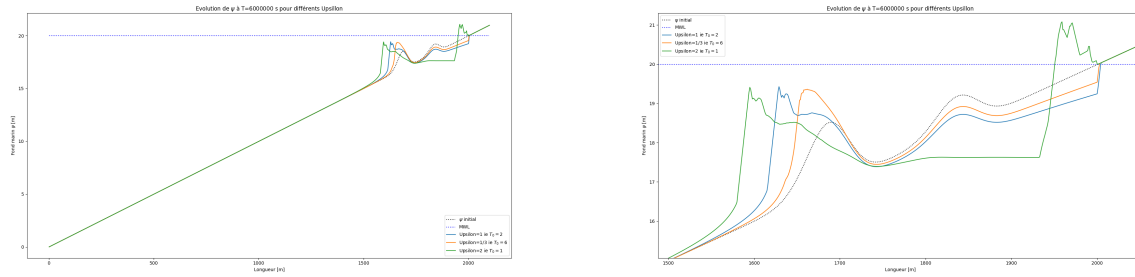


FIGURE 159 – Différents Υ_{crit} à bathymétrie de 2 bosse

Rédaction

- Avancement sur la partie justification sur notre approche. Voir `notes_lien_lagrange_opim.tex`.
- Début de rédaction du **Chapitre 1** justifiant les différentes fonctionnelles etc.

Compte rendu scientifique

Semaine 12 : 31/01/22-04/02/22

Multi-simulations :

On lance une simulations avec les critères suivants :

H_0	h_0	Dx	T_0
2	20	2000	6

On remarque sur la première simulation une barre irréaliste qui se forme : en environ 5h. Ensuite, la simulation se stabilise et n'évolue plus.

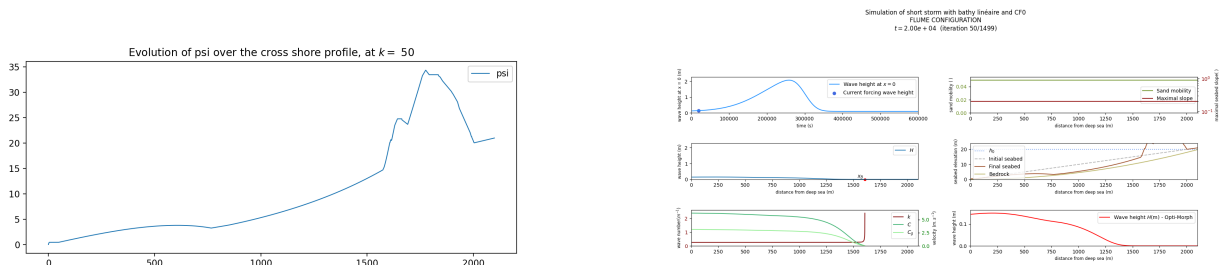


FIGURE 160 – Evolution du fond à (50/1500) itérations et 5H

On pourrait penser qu'il est nécessaire de changer la mobilité sableuse pour régler le problème. Celle-ci était à **0.05**. On essaie de d'autres mobilités comme **0.02** et **0.03** et on obtient les résultats suivants :

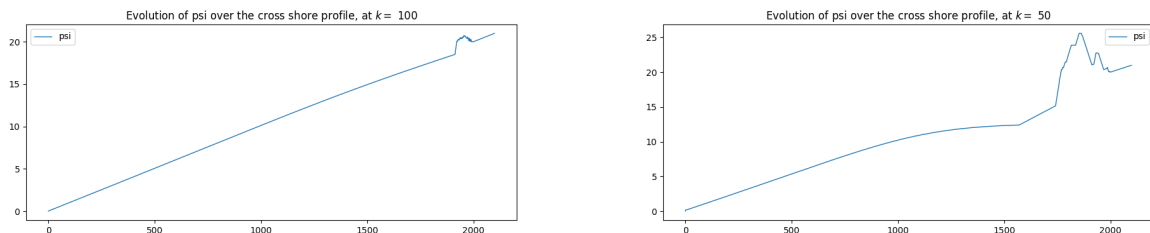


FIGURE 161 – Évolution du fond à (50/1500) itérations et 5H pour les mobilités de 0.02 et 0.03

De même, on n'observe pas d'évolution comme on le souhaiterai sur l'évolution de ψ . Une fois l'itération 50/100 atteinte, il n'y a plus d'évolution.

Autre point étrange : quand on fait défiler la simulation, on remarque que la forme de la vague censé déferler ne change pas : elle est simplement réduite en échelle comme on peut voir ci-dessous :

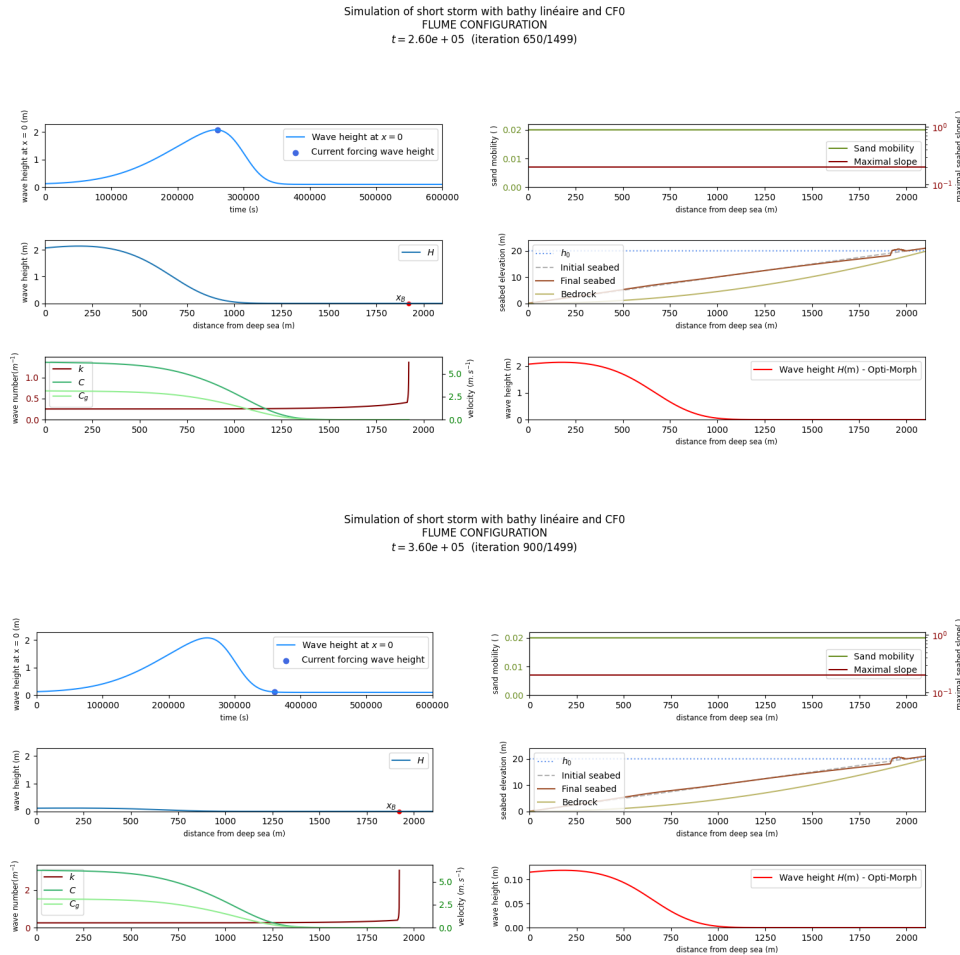


FIGURE 162 – Évolution du fond à sur deux itérations différentes : au pic de la tempête et après

Peut-être un bug quelque part, à creuser.

Après essais sur des **bathymétries différentes**, on constate qu'il y a toujours ce même résultat.

Pour les autres simulations, on partira sur une simulation avec les critères suivants pour être sûr d'être en **eau profonde** :

H_0	h_0	Dx	T_0
2	20	2000	6

Pour régler ce problème de période de vague, on a pu réfléchir à une approche analogue à celle des souffleries. Une approche par **similitude**. Dans les souffleries par exemple, on a qu'un seul nombre de Mach (par exemple M0.7) et on adapte les grandeurs (longueur d'aile, ...) pour avoir des résultats réalistes.

Ici, il suffit donc de partir sur une simulation de référence : pourquoi pas celle de Mme Cook avec la période de vague à $T_0 = 2$ et adapter les autres grandeurs en conséquence.

Si on récapitule les grandeurs dans un tableau :

ϕ	Adim
h_0, H_0, L, ψ	Dim ϕ
$T_\phi = 6$	$T_* = 2$
Υ mobilité	$\Upsilon_* \frac{T_*}{T_\phi}$

$$\begin{cases} L_* = aT_* \\ T_* = \alpha T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t_*} \frac{\partial t_*}{\partial t} \\ \frac{\partial x_*}{\partial x} = \frac{1}{L_*} \end{cases}$$

$$u_t + au_x = u_{t_*} + \frac{a}{L_*} u_{x_*}$$

Si on suit ce formalisme d'adimensionnement, la simulation ci-dessous :

H_0	h_0	Dx	T_0	Υ
2	20	2000	6	Υ

est équivalente aux paramètres suivants :

H_0	h_0	Dx	T_0	Υ
2	20	2000	6	$\Upsilon \frac{T_*}{T_0} = \frac{\Upsilon}{3}$

On compare les résultats avec et sans cette simulation :

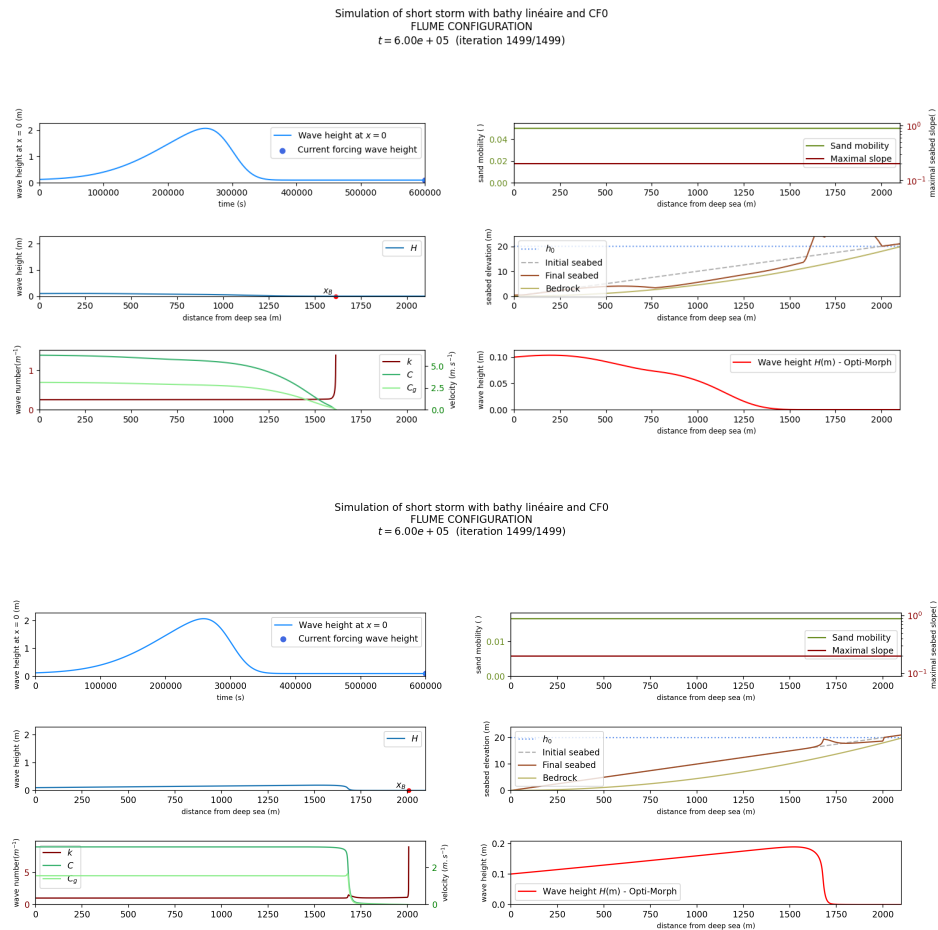


FIGURE 163 – Sans puis avec la simplification par similarité

Les résultats de cette simulation ont l'air très cohérents physiquement parlant.

Remarque de M. Bouchette : Changer la mobilité reviendrait à changer les propriétés du sable : il n'est pas concevable

que le sable ait une dépendance en période de vague T_0 . Il convient donc de changer le paramètre d'excitation Λ afin de rendre compte d'un modèle plus physique.

Une idée d'implémentation serait d'ajouter optionnellement une 6eme colonne qui fera office de Λ_{crit} . On aura donc la relation $\Lambda = \Lambda_{crit}\phi$. S'il n'existe pas de 6eme colonne, alors ce vecteur sera unitaire afin d'éviter tout changements.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Rédaction axe 4 :

Explication sur le problème de Newton

On pars de la paramétrisation suivante Figure 164 :

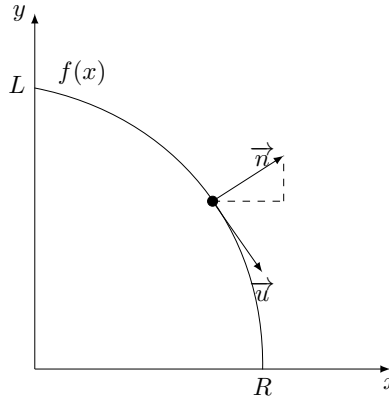


FIGURE 164 – Paramétrisation du problème de Newton

avec donc $y(0) = L$ et $y(R) = 0$ et $y' \leq 0$ et $y'' \geq 0$.

Pour retrouver l'Équation (??), on prends \vec{u} et \vec{n} deux vecteurs unitaires. On trouve un vecteur colinéaire à \vec{n} avec donc les coordonnées

$$\begin{pmatrix} dx \\ f' dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dx \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix}$$

Avec Taylor au premier ordre, on a le déplacement en y : $dy = f(x + dx) - f(x) = dx f'(x)$. Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial y}{\partial x} \end{pmatrix}$ est donc un bon candidat. Il ne reste plus qu'à le normaliser et on obtient :

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \\ \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \end{pmatrix}$$

On trouve facilement le vecteur :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \end{pmatrix}$$

Si on estime que chaque particule touche le solide, alors la quantité subis par particules est :

$$I = \vec{f} \cdot \vec{n} S = \vec{d} \cdot \vec{n} dx = ma \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

si on suppose que les champs d'accélération sont colinéaires au vecteur normal \vec{n} . Pour obtenir la force totale, il ne nous reste plus qu'à intégrer sur la surface totale $S = 2\pi x dx$ et on obtient :

$$J = I.S = 2\pi m a x dx \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = 2\pi m a \int_0^R \frac{x}{\sqrt{1+y'^2}} dx$$

ce qui revient à minimiser F si l'on retire les constantes et on simplifie la minimisation au dénominateur par croissance de la fonction $t \rightarrow \sqrt{t}$:

$$F = \int_0^R \frac{x}{1+y'^2} dx$$

On cherche donc à minimiser F avec l'Équation (??) de Euler-Lagrange. On a donc :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = -\frac{d}{dx} \left(\frac{2xy'}{(1+y'^2)^2} \right) = 0 \quad (9)$$

ce qui nous donne :

$$2xy' = C(1 + y'^2)^2 \quad (10)$$

Problème de trajectoire uniforme d'une particule de A à B

Pour cet exemple, on pars du problème :

$$\begin{cases} \dot{x} &= d \\ x(0) &= A \\ x(1) &= B \end{cases}$$

on sait que d est de la forme :

$$\vec{d} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \left(\frac{\frac{x_B - x_A}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}}{\frac{y_B - y_A}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}}} \right)$$

Si on pose $J = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$, on a rapidement :

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial (x_A - x_B)} = \frac{x_A - x_B}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}} \\ \frac{\partial J}{\partial (y_A - y_B)} = \frac{y_A - y_B}{\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}} \end{cases}$$

on aura donc bien $d = -\nabla J$

Si on généralise dans \mathbb{R}^n en posant les distances projetés sur les n sous la forme :

$$q_i = x_A^i - x_B^i \text{ avec } i = 1, \dots, n$$

et on pose la norme :

$$\|\vec{AB}\| = \left(\sum_{i=1}^n q_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On a donc d de la forme :

$$\vec{d} = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} = \begin{pmatrix} \frac{-q_1}{\|\vec{AB}\|} \\ \vdots \\ \frac{-q_n}{\|\vec{AB}\|} \end{pmatrix}$$

Si on calcul la dérivée partielle de la norme, on obtient :

$$\frac{\partial \|\vec{AB}\|}{\partial q_i} = \frac{q_i}{\|\vec{AB}\|}$$

Il convient donc de poser une fonctionnelle $J = \|\vec{AB}\|$, on aura bien :

$$\nabla J = \nabla \|\vec{AB}\| = -\vec{d}$$

Brachiochrone : approche différentielle

Rappel des solutions :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}C^2(t - \sin(t)) \\ y(t) = C^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \end{cases}$$

On suppose que le point de départ de ce problème est le point $A(x_0, y_0)$ et qu'on minimise une certaine fonctionnelle J telle que à chaque pas de temps Δt , on arrive vers une solution du problème de Brachistochrone jusqu'à arriver à $t = T$ où on aura atteint le point $B(x_1, y_1)$.

L'algorithme de descente nous donne $P^{i+1} = P^i - \Delta t \nabla F = P^i + \Delta t d^i$ où d^i est le vecteur de descente au temps $t_i = \Delta t i$ et P le point se déplaçant sur la courbe de Brachistochrone.

Si on part des solutions du problème de Brachistochrone, on a

$$d^{i+1} = \begin{pmatrix} x(t^{i+1}) - x(t^i) \\ y(t^{i+1}) - y(t^i) \end{pmatrix} = C^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\Delta t + \sin(t) - \sin(t + \Delta t)) \\ \cos(t) - \cos(t + \Delta t) \end{pmatrix}$$

Il conviendrait donc de trouver une fonctionnelle J de telle sorte que $-\nabla J = d$



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 11 : 24/01/22-28/01/22

Multi-simulations :

Conditions

```
def check_condition(H0, T0, h0, Dx) :  
    c1=2*lam(T0)/3.14159 #H0<<c1  
    c2=H0/h0 #Munk 0.55  
    c3=h0/Dx #1e-2 1e-3  
    print(c1, c2, c3)  
    return
```

Si on prends les conditions suivantes : $[H_0, T_0, h_0, Dx] = [2, 0.5, 10, 1000]$, on arrive aux conditions suivantes : $[c1, c2, c3] = [0.12, 0.2, 0.01]$ toutes les conditions sont respectées. Cependant, on a directement un choc comme on peut voir sur la figure ci-dessous :

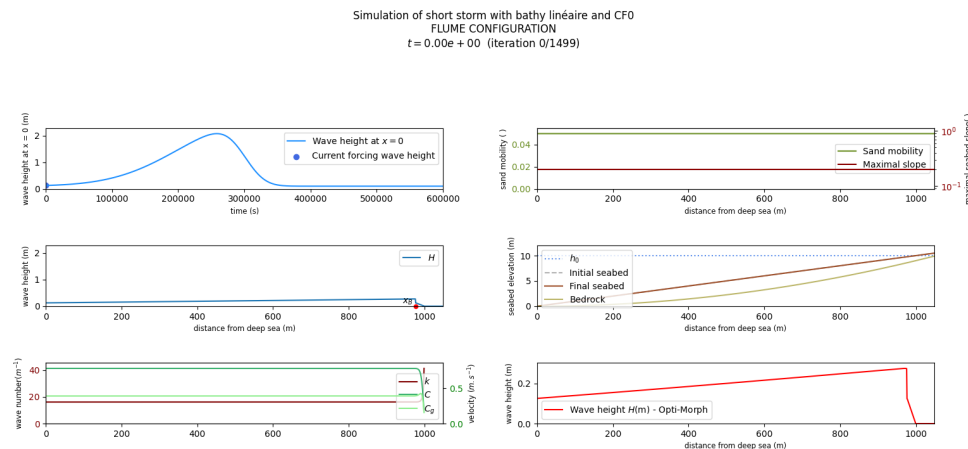


FIGURE 165 – Choc

Avec les conditions $[H_0, T_0, h_0, Dx] = [2, 2, 10, 1000]$ (en changeant la période T_0), les résultats ont l'air plus réalistes. Cependant, la condition $c1$ de pente n'est pas respectée.

Rédaction axe 4

Voir le tex notes_lien_lagrange_opim.tex

Premières réflexions sur l'exemple d'une particule en mouvement entre un point A et un point B

Pour la seconde approche, on utilisera la notion de transport optimal. On reprends l'exemple d'une particule qui se déplace uniformément dans un espace \mathbb{R}^2 à une vitesse constante v . Celle-ci partira du point $A(x_A, y_A)$ pour arriver jusqu'au point inconnu B' que l'on ne connais pas. On cherche à trouver la trajectoire optimale de cette particule de telle sorte qu'elle minimise une certaine fonctionnelle F . Pour ce problème, on cherchera donc à trouver la ou les trajectoires telles que les frottements subis par la particule soit minimisés.

On peut intuitiver le résultat : à chaque itérations, la particule se déplacera donc sur un disque. Si on ne respecte pas la condition de vitesse constante (et donc, pas de discontinuités possibles), on aura donc une infinité de trajectoires possibles. En respectant cette condition, on devrait obtenir une infinité de trajectoires dans \mathbb{R}^2 . Ces trajectoires arriveront à un point B' qui sera placé à

une distance $R = |B - A|$ de A . L'ensemble des solutions de \mathbb{R}^2 seront donc les points sur le cercle de rayon R et de centre A . Si on étant cette approche à un espace \mathbb{R}^n , on aura l'ensemble des points contenues sur hypersphère de rayon R et de centre A .

Pour poser notre problème, il convient de poser une fonctionnelle minimisant les frottements subis par la particule :

$$F = -\lambda v^2$$

avec λ une constante. Cette fonctionnelle est proportionnelle au carré de la vitesse. Or, dans notre cas, la vitesse est constante. Minimiser cette fonctionnelle n'a donc aucun intérêt.

Une particule se déplaçant à vitesse constante peut se déplacer soit de manière rectiligne, soit d'une manière courbée. On sait que le chemin le plus optimisé pour cette particule sera une chemin rectiligne et donc il pourrait être intéressant de minimiser la cambrure locale.

Une fonctionnelle candidate pourrait être :

$$F = \ddot{q}(t + T) - \ddot{q}(t)$$

Minimiser cette fonctionnelle assurerait d'avoir une trajectoire rectiligne. Cependant, celle-ci n'est pas forcément adaptée à une généralité de cas étant donné qu'elle suppose déjà que le résultat sera une trajectoire rectiligne. Par exemple, si on prenait un cas plus poussé comme le problème de Brachistochrone, on aurait une solution qui n'est pas une trajectoire rectiligne.

Une autre idée pourrait être de s'appuyer sur les travaux de Newton où il utilise une fonctionnelle minimisant la résistance d'un solide.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 10 : 17/01/22-21/01/22

Multi-simulations :

L'idée du dernier point a été de lancer une multitude de simulations avec une multitude de bathymétries et CI tout en essayant tout notre panel de fonctions de coût (CF).

L'intérêt est de pouvoir évaluer nos CF en fonction des différents profils ψ .

On crée donc un panel de bathymétrie comme sur la figure suivante :

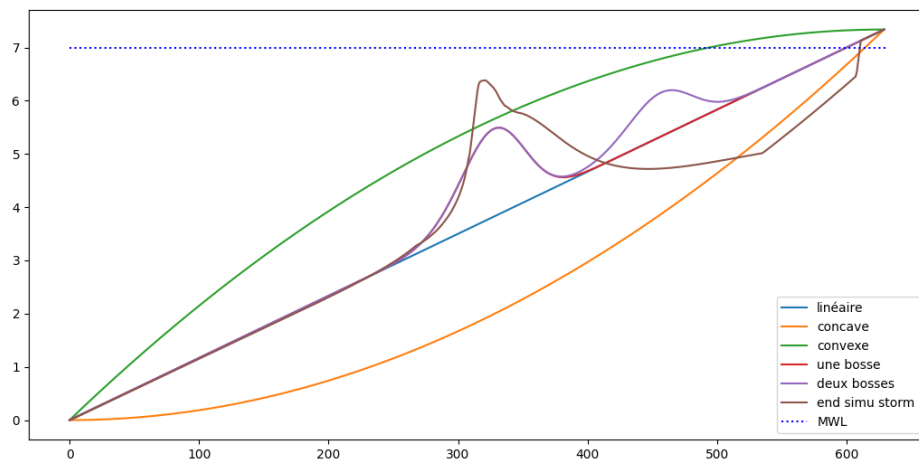


FIGURE 166 – Différents profils bathymétriques

Pour les **CI**, on se base principalement sur une tempête de quelques jours avec une simulation d'une semaine. Elle est représentée par une gaussienne décentrée.

Réflexions sur l'axe 4 :

Maîtrise des problèmes physiques d'optimisation :

- Problème de Dido
- Problème de Brachistochrone

Compte rendu scientifique

Semaine 9 : 10/01/22-15/01/22

Sanity check

En vérifiant dans le code, on remarque que le vecteur $d = (\nabla_{\psi} J + \text{contraintes})$ de la descente a bien pour valeurs des zéros à partir du moment où la vague se cass : x_B . Mais celui-ci change lorsqu'il y a une régularisation :

```
if self.getC("sand") == 1:
    err = 1.00
    d = d + beta * 2 * trapz(psi-err*psi0, x)
```

On ajoute donc au vecteur de descente d une quantité égale à $2\beta C_{move}$ avec $C_{move} = \int_{\Omega} (\psi(t) - \psi(0)) dx$: la quantité de sable déplacée.

L'accrétion peut donc se faire seulement grâce à cette quantité du vecteur qui sera non nulle sur tous les indices du vecteur d .

Une autre ligne pouvant produire de l'accrétion est la contrainte de pente :

```
psi = slopecst(psi, Mslope, rho0, x)
```

avec la contrainte de pente défini de la manière suivante :

```
def slopecst(psi, Mslope, mobility, x) :
    """
    Method that applies the slope constraint to the given seabed. If
    → the slope of the seabed is steeper than allowed, the seabed is corrected.
    """
    i0 = 0

    psi_forward = copy(psi)
    psi_backward = copy(psi)

    for i in range(i0+1, len(x)) :
        psi_forward[i] = min(max(-Mslope[i]*(x[i] - x[i-1]) +
        → psi_forward[i-1], psi[i]), Mslope[i]*(x[i] - x[i-1]) +
        → psi_forward[i-1])

    for i in range(len(x)-2, i0, -1) :
        psi_backward[i] = min(max(-Mslope[i]*(x[i+1] - x[i]) +
        → psi_backward[i+1], psi[i]), Mslope[i]*(x[i+1] - x[i]) +
        → psi_backward[i+1])

    return (psi_backward + psi_forward)/2
```

Nouvelle CF en $\nabla_x(S_{xx})$?

Pour comprendre l'implémentation de cette nouvelle fonctionnelle, il est nécessaire de faire un petit topos d'hydro sur les tensions de radiations :

Tensions de radiations S_{xx}

Lors d'un bilan en quantité de mouvement sur une vague, il est à noter qu'un excédent de flux est présent résultat du mouvement orbitale d'une vague que l'on peut observer sur la figure ci-dessous 167. Cet excédent se dissipe principalement sur les frottements de fonds.

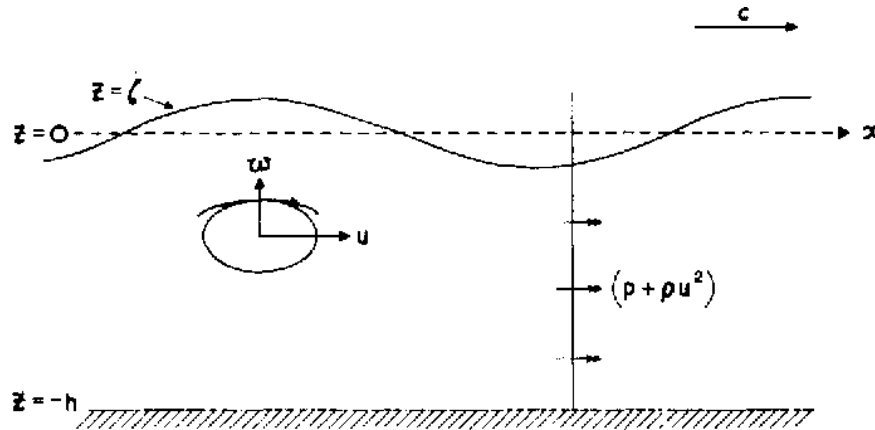


FIGURE 167 – Schéma de bilan de quantité de mouvement sur une vague

Longuet-Higgins & Stewart ont cherché à quantifier cet excédant de flux en notant la **tension de radiation** S_{xx} . Pour quantifier cette variable, il a été établi l'expression suivante :

$$S_{xx} = \overline{\int_{-h}^{\eta} (p + \rho \tilde{u}^2) dz} - \int_{-h}^0 p_0 dz$$

Le premier terme de cette expression est le flux totale de quantité de mouvement d'une vague moyenné. On y soustrait le flux moyen en absence de vague.

Cette quantité S_{xx} est donc à voir comme la différence entre la moyenne temporelle du flux de quantité de mouvement et le flux moyen en absence de vague.

Le travail de Longuet-Higgins & Stewart a été de simplifier l'expression de S_{xx} par une expression plus simple à savoir :

$$S_{xx} = \left(2 \frac{C_g}{C} - \frac{1}{2} \right) E = \frac{1}{8} \rho g \left(\frac{2kh}{\sinh 2kh} + \frac{1}{2} \right) H^2$$

Lien vers une nouvelle fonctionnelle

Mail de M. Sous : Si je me souviens bien, l'idée c'est de dire que les vagues vont transmettre de l'énergie au système shallow water (au sens du momentum) via le gradient de radiation stress. Sous forme d'énergie potentielle (terme pente) et d'énergie cinétique (terme inertie) qui va elle même se dissiper en partie par frottement sur le fond.

Une hypothèse pour tester une nouvelle fonctionnelle serait de dire que le système va essayer de minimiser son énergie au sens du momentum shallow water, i.e. minimiser les pentes et les courants en son sein. Nb : Il s'agit bien des pentes moyennes et des courants moyens maintenus au sein du système, il faut bien noter la différence entre cette énergie là (depth-averaged, wave-averaged, liée à la momentum balance), et l'énergie des vagues.

Donc si on suppose que c'est bien ça que le système va chercher à minimiser par des adaptations morphologiques, il devrait donc chercher à minimiser les mécanismes par lesquels cette énergie lui est transmise. Donc il devrait chercher à réduire les gradients spatiaux de contraintes de radiation, car ce sont eux qui transmettent l'énergie des vagues (au sens moyenné) dans le système shallow water. Donc je mettrais ça dans la fonctionnelle :)

Vous prenez un modèle de distribution spatiale de H_s et C_g , comme vous voulez (simple explicite comme Mme Cook, ou plus complet en couplant à une équation d'action). Déduisez-en les gradients de contrainte de radiation, et cherchez à les minimiser par adaptation du fond.

La nouvelle approche serait d'émettre le postulat que *le système va essayer de minimiser son énergie au sens du moment : minimiser les pentes et les courants de celui-ci*. L'idée transmise à travers cela est de supposer que le système cherche à *minimiser les mécanismes par lesquels cette énergie lui est transmise*. Ce qui reviendrait dans notre cas à réduire le gradient spatial de la contrainte de radiation. Pour être plus clair, on chercherait à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$J = \nabla_x(S_{xx})$$

On a donc

$$\nabla_\psi J = \nabla_\psi(\nabla_x(S_{xx})) = \nabla_x(\nabla_\psi(S_{xx})) = \frac{1}{4}\rho g \nabla_x \left[H \nabla_\psi H \left(\frac{2X}{\sinh(2X)} + \frac{1}{2} \right) + H^2 \nabla_\psi X \frac{\sinh(2X) - 2X \cosh(2X)}{\sinh^2(2X)} \right]$$

avec $X = kh$ et par simplification $\nabla_\psi X = -k$.

On a donc une expression de $\nabla_\psi J = \nabla_x A$, il ne reste plus qu'à différencier par méthode des différences finies.

On a cherché à comparer les nouvelles fonctionnelles suivantes :

CF 17	$J = C_g H^2$
CF 18	$J = S_{xx}$
CF 19	$J = \nabla_x S_{xx}$

On obtient les résultats suivants pour la simulation de tempête de 30 jours.

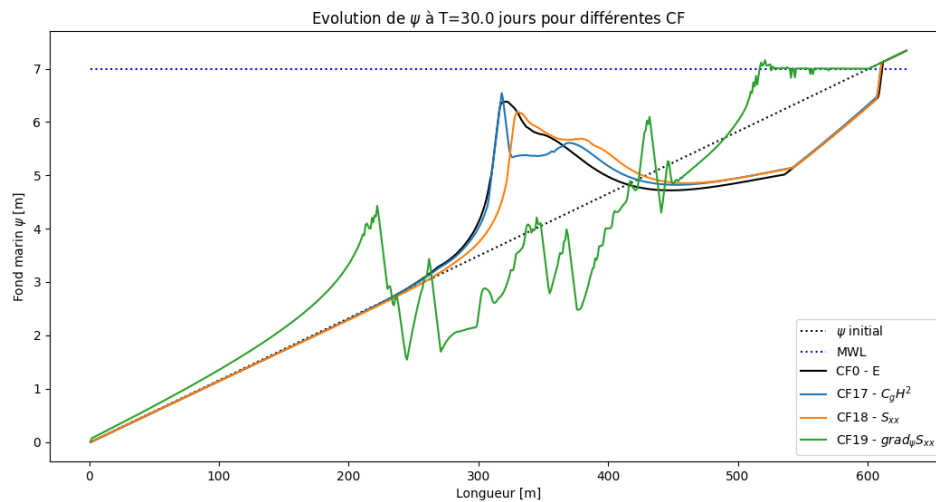


FIGURE 168 – Différentes fonctionnelles pour une simulation de tempête

On cherche à obtenir un déplacement de la barre vers la côte. On remarque qu'il y a déplacement seulement sur la fonctionnelle en S_{xx} : cela peut-être intéressant de regarder ce que cela donne pour la simulation de canal. Pour ce qui est de la fonctionnelle en $J = \nabla_x S_{xx}$, les résultats sont difficilement validables...

Pour la simulation en comparaison avec xBeach les résultats suivants :

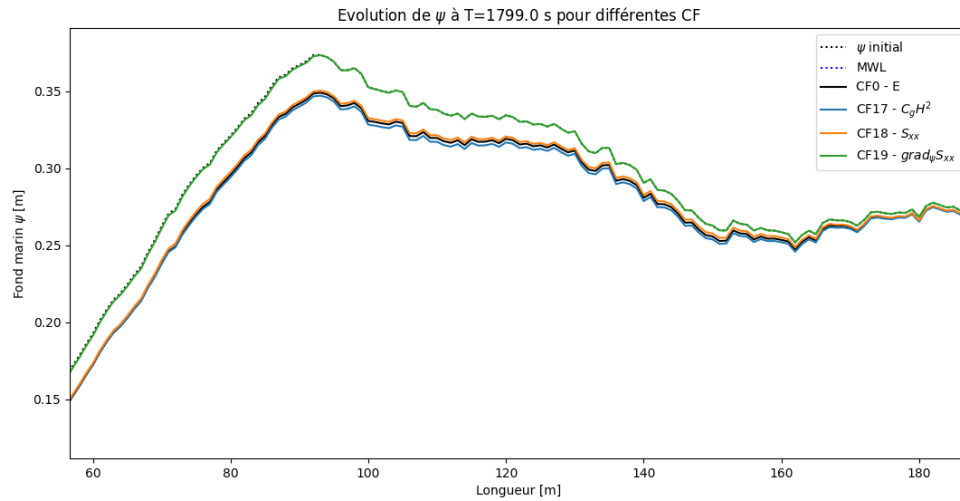


FIGURE 169 – Différentes fonctionnelles pour une simulation en canal

On ne remarque pas le déplacement de la barre que nous souhaitons. La CF en $J = \nabla_x S_{xx}$ a un effet moindre, il n'y a pas de grand déplacement par rapport à la bathymétrie initiale.

Le seul moment où nous avons eu un déplacement de la barre était en implémentant un schéma de transport. Peut-être qu'il est nécessaire de creuser par-là ?...

CF en $C_g H$ et $(C_g H)^2$?

Après discussion avec M. Mohammadi, on a pu établir une fonctionnelle représentant un "travail". Les résultats obtenus sont les suivants :

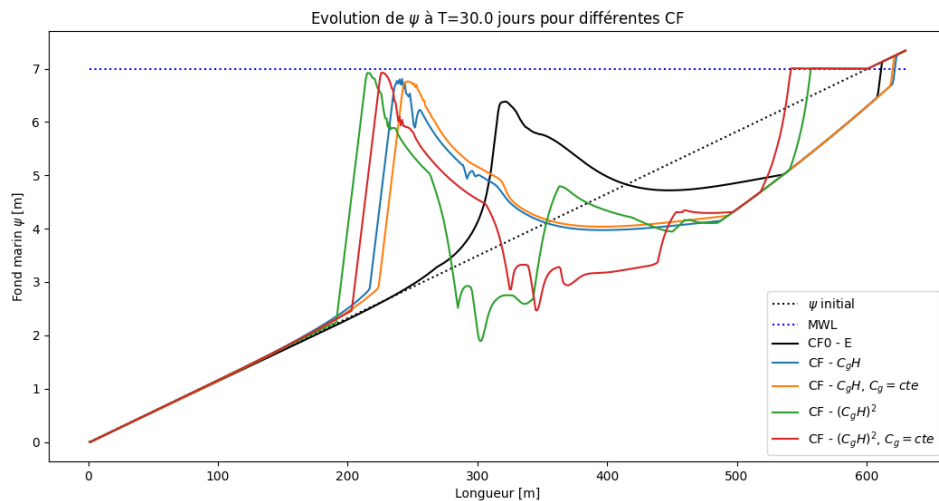


FIGURE 170 – Fonctionnelle CF17

Chose intéressante : un déplacement de la barre arrive à être observé. Cela peut traduire une réalité physique. Cela donne l'idée de switcher éventuellement d'une fonctionnelle à une autre en fonction des cas donnés.

Compte rendu scientifique

Semaine 8 : 03/01/22-07/01/22

Réponses Mme Cook :

Question 1 : Il y a une erreur de frappe dans la définition de C_g , mais le code est juste. C'est $\sinh(2kh)$ au dénominateur. En posant $X := kh$ on a donc en fait

$$\begin{aligned} U &:= \tanh(X) \left(1 + \frac{2X}{\sinh(2X)} \right) \\ &= \tanh(X) \left(1 + \frac{X}{\sinh(X) \cosh(X)} \right) \quad \text{car } \sinh(2X) = 2 \sinh(X) \cosh(X) \\ &= \tanh(X) + \frac{X}{\cosh^2(X)} \quad \text{car } \tanh(X) = \frac{\sinh(X)}{\cosh(X)} \end{aligned}$$

ce qui nous mène bien au terme sous la puissance $-3/2$ dans le code. Ainsi, en dérivant la fonction $K_S := U^{-1/2}$ par rapport à ψ , on a

$$\nabla_\psi K_S = -\frac{1}{2} U^{-3/2} \nabla_\psi U,$$

avec

$$\begin{aligned} \nabla_\psi U &= \nabla_\psi X \left[\frac{1}{\cosh^2(X)} + \frac{\cosh^2(X) - 2X \sinh(X) \cosh(X)}{\cosh^4(X)} \right] \\ &= \nabla_\psi X \frac{2 \cosh^2(X) - X \sinh(2X)}{\cosh^4(X)} \end{aligned}$$

ce qui correspond bien au second terme dans le code. Pour répondre à ta seconde question, j'avais mis en commentaire la multiplication par nabla_k car le terme en h est négligeable face au k . On rentre donc le k dans la "grosse formule".

Question 2 : On en a parlé avant les fêtes ; j'ai divisé l'équation de dispersion par g , qui ne dépend pas de ψ .

Question 3 : La configuration actuelle du code n'utilise pas cette fonction. L'explication de cette méthode est détaillée dans le polycopié du cours de M. Mohammadi et J.H. Saiac, Modélisation et optimisation numériques, Section 17.7.1. J'utilise la première formule de cette section avec $x = \psi$ et $J = x_B$.

Ensuite, le calcul sur tout le domaine semble trop trop chronophage et le code devient vite inexploitable. On peut donc supposer que $\nabla_\psi x_B = 0$ sur certains zones de Ω , mais c'est seulement pour accélérer le calcul numérique. Si tu veux calculer $\nabla_\psi x_B$ sur tout le domaine, tu peux. - On suppose que $\nabla_\psi x_B(x) = 0$ pour $x > x_B$. L'élévation du fond n'a plus d'influence sur la position du déferlement quand le déferlement a déjà eu lieu. - Si on augmente le fond de ε , les seuls changements sur la position de x_B seront dans un voisinage des maximums locaux. Donc, on ne fait le calcul par différences finies que dans ces zones et on pose $\nabla_\psi x_B = 0$ sinon. Remarque : x_B ici est le premier point de déferlement.

Question 1

Dans l'annexe ci-dessous, tu arrives à l'expression de $\nabla_{\psi} K_S$ suivante :

$$\nabla_{\psi} K_S = -\frac{1}{2} U^{-3/2} \nabla_{\psi} U$$

avec $U = \tanh(kh) \left(1 + \frac{2kh}{\sinh(kh)}\right)$ et $X = kh$.

$$\nabla_{\psi} U = \nabla_{\psi} X \left[\frac{1}{\cosh^2(X)} \left(1 + \frac{2X}{\sinh(X)}\right) + 2 \tanh(X) \frac{\sinh(X) - X \cosh(X)}{\sinh^2(X)} \right]$$

Dans le programme `hydro_tools.py` et la fonction `nablaKS(k, h)` ci-dessous :

```
def nablaKS(k, h):  
    """  
    Function which calculates the gradient of the reflective  
    ↪ coefficient in the definition of H with respect to psi.  
    """  
    nabla_K =  
    ↪ -0.5*(10**(-10)+tanh(k*h)+k*h/(cosh(k*h)**2))**(-3/2)*(-2*k*(cosh(k*h),  
    ↪ +k*k*h*sinh(2*k*h))/(cosh(k*h)**4)  
    nabla_k = (nabla_wn(k, h)*h-k)  
  
    return nabla_K #*nabla_k
```

La première partie : $-0.5*(10**(-10)+\tanh(k*h)+k*h/(\cosh(k*h)**2))**(-3/2)$ correspond au $-\frac{1}{2}U^{-3/2}$ mais à quoi correspond la seconde partie ? J'ai bien compris que la variable `nabla_k` calculait $\nabla_{\psi} X = h\nabla_{\psi} k - k$. Avec

$$k_{\psi} = \frac{k^2}{\cosh(kh) \sinh(kh) + kh}$$

Mais à quoi correspond donc la seconde partie ?

$$\frac{-2k \cosh^2(kh) + k^2 h \sin(2kh)}{\cosh^4(kh)}$$

Normalement on devrait avoir égalité avec la seconde partie de $\nabla_{\psi} U$:

$$\left[\frac{1}{\cosh^2(X)} \left(1 + \frac{2X}{\sinh(X)}\right) + 2 \tanh(X) \frac{\sinh(X) - X \cosh(X)}{\sinh^2(X)} \right]$$

En faisant quelques tests entre les deux expressions, on ne peut pas vraiment égaliser les deux, peux-tu m'éclairer sur ce point ?

Autre question : pourquoi avoir mis en commenté la multiplication par `nabla_k` qui correspond au $\nabla_{\psi} X$?

Question 2 :

En reprenant l'expression :

$$\sigma^2 = gk \tanh(kh)$$

tu arrives à dériver des deux côtés pour obtenir

$$k_{\psi} = \frac{k^2}{\cosh(kh) \sinh(kh) + kh}$$

Peux-tu m'éclairer sur cette différenciation ?

Question 3 :

Dans le programme `hydro_tools.py` et la fonction `gradxB`, tu fais le calcul de $\nabla_{\psi} xB$ en précisant par la méthode des différences finis.

Peux-tu m'éclairer sur ton point de départ pour réussir à arriver à cette routine ? Sur quoi t'appliques les différences finis...

Compte rendu scientifique

Semaine 7 : 27/12/21-31/12/21

Vacances



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Compte rendu scientifique

Semaine 6 : 20/12/21-23/12/21

Implémentation d'un terme de mémoire dans le schéma numérique

Une idée provenant de M. Mohammadi serait de rajouter un terme à la fonctionnelle gardant le déplacement du sable en mémoire.

$$J = \frac{1}{8} \rho_w g \int_{\Omega_S} H^2 dx + \rho_s g \int_{\Omega_S} (\psi(t) - \psi_0(\tau - t))^2 dx$$

En dérivant, on arrive à l'expression suivante :

$$\nabla_\psi J = \frac{1}{4} \rho_w g \int_{\Omega_S} H \nabla_\psi H dx + 2 \rho_s g \int_{\Omega_S} (\psi^n - \psi^{n-1}) dx$$

En utilisant l'expression de $\psi_t = -\Lambda \Upsilon \nabla_\psi J$, on obtient (si on ne tient pas compte des contraintes) :

$$\psi^n = \psi^{n-1} - dt \Lambda \Upsilon \nabla_\psi J$$

Si on suit le schéma donné par M. Mohammadi :

$$\nabla_\psi J = \nabla_\psi J_H + 2 \rho_s g (\psi^n - \psi^{n-1})$$

On arrive au développement suivant :

$$\psi^n = \psi^{n-1} - dt \Lambda \Upsilon \nabla_\psi J_H + dt \Lambda \Upsilon \rho_s g (\psi^n - \psi^{n-1})$$

soit :

$$\psi^n (1 - dt \Lambda \Upsilon \rho_s g) = \psi^{n-1} (1 - dt \Lambda \Upsilon \rho_s g) - dt \Lambda \Upsilon \nabla_\psi J_H$$

soit :

$$\psi^n = \psi^{n-1} - dt \Lambda \Upsilon \frac{\nabla_\psi J_H}{1 - dt \Lambda \Upsilon \rho_s g}$$

Cette équation n'est pas totalement vraie étant donné que des contraintes sont appliquées dans $\nabla_\psi J$. Cependant, cela donne une idée globale : l'intensité de la descente varie donc selon un coefficient dépendant de la vitesse orbitale Λ : on retourne sur le même genre de tentatives que les anciens travaux ?

Nouveau terme dans la fonctionnelle en $\partial_x (C_g H^2)$

L'approche de la semaine 5 était de développer la double dérivée. Or ceci faisait parfois appel à des méthodes de différences finies sur certains termes comme par exemple $\nabla_x \psi$.

Donc quitte à faire des différences finies, autant en profiter sur quelque chose de plus utile...

On avait la fonctionnelle de la forme suivante :

$$\nabla_\psi J \approx \rho g \left(\frac{1}{4} \int_{\Omega_S} H \nabla_\psi H dx - f \int_{\Omega_S} \nabla_x (H^2 \nabla_\psi C_g + 2 H C_g \nabla_\psi H) dx \right)$$

On peut donc "résoudre" ce problème facilement en posant : $Jd = (H^2 \nabla_\psi C_g + 2 H C_g \nabla_\psi H)$, on obtient rapidement $\nabla_x Jd$ avec le schéma centré : $\nabla_x Jd_i = \frac{Jd_{i+1} - Jd_{i-1}}{2dx}$. Les bords seront traités avec un schéma centré gauche ou droit. Sans le terme énergétique dans la fonctionnelle, on arrive rapidement à des résultats aberrants :

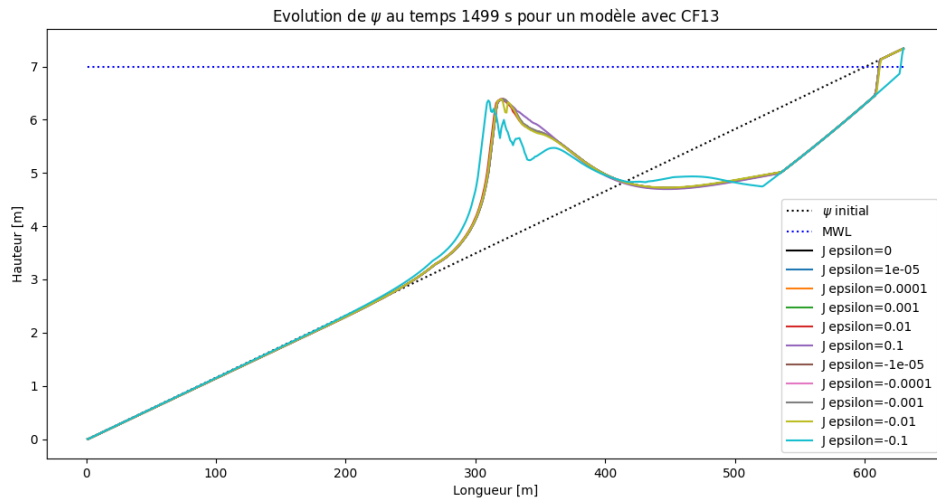


FIGURE 171 – Ajout d'un terme de mémoire sur le sable

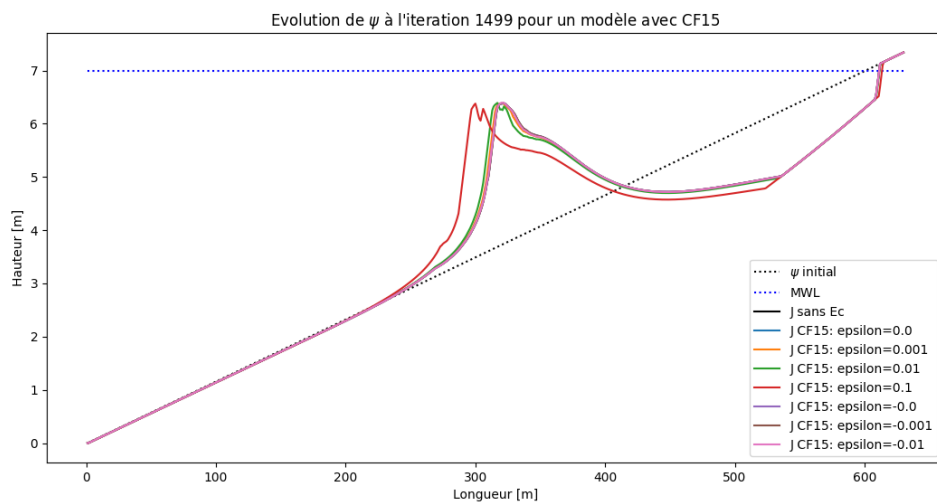


FIGURE 172 – Terme énergétique et dissipation

Compte rendu scientifique

Semaine 5 : 13/12/21-17/12/21

Implémentation d'un terme de transport dans le schéma numérique

Une nouvelle approche est d'ajouter un terme de transport vers la plage (d'où $-V$) pour modéliser le courant.

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n + \rho [-V^n \nabla_x \psi^n + \varepsilon h |V^n| \Delta_x \psi^n - \Lambda \Upsilon \nabla_\psi J(\psi^n)]$$

avec condition de stabilité : $\rho \leq \min \left(\frac{h^2}{h |V_i^n| + \varepsilon h |V_i^n|} \right)$

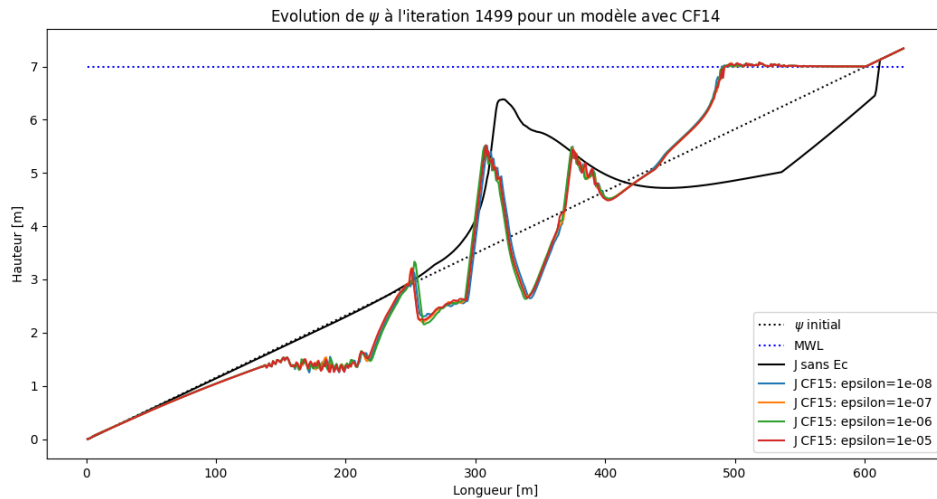


FIGURE 173 – Seulement le terme de dissipation

En simplifiant le schéma numérique et discrétisant en différences finis centrées, on arrive rapidement à l'équation suivante :

$$\psi_i^{n+1} = \psi_i^n \left(1 - 2 \frac{2\varepsilon |V^n| \rho}{h} \right) + \psi_{i-1}^n \left(\frac{2\varepsilon |V^n| + V^n}{2h} \right) \rho + \psi_{i+1}^n \left(\frac{2\varepsilon |V^n| - V^n}{2h} \right) \rho - \rho \Delta \Upsilon \nabla_\psi J(\psi^n)$$

Les conditions de bords ici on été choisis assez arbitrairement en créant deux points fictifs dans le prolongement de la plage : $\psi_{-1} = 2\psi_0 - \psi_1$ et $\psi_{n+1} = 2\psi_n - \psi_{n-1}$.

Un premier test à vitesse constante $V = 1e - 3 \text{ m/s}$ a donné les résultats suivants pour la simulation de tempête :

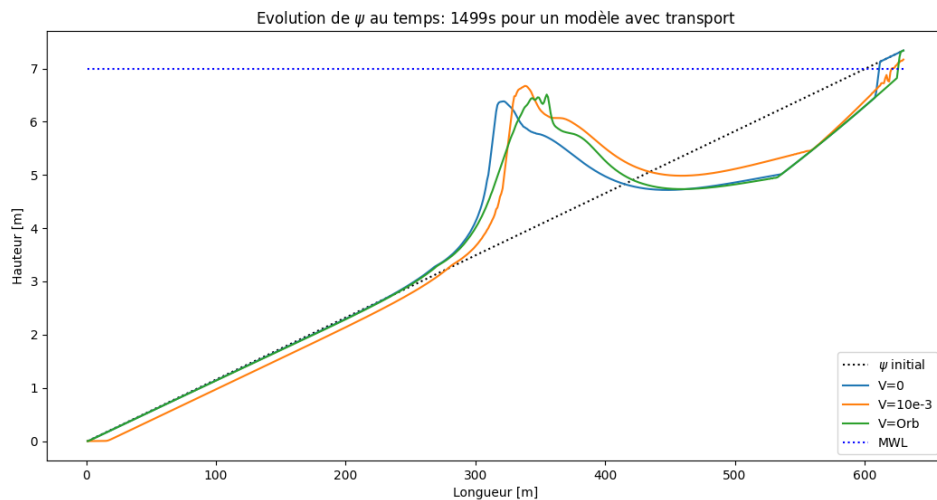


FIGURE 174 – Avec et sans schéma de transport

Ici, on pourrait croire que le "décalage" de la plage sableuse en amont de la simulation pourrait venir des conditions limites : cela pourrait venir d'une condition de Neumann (c'était d'ailleurs la première idée de BC). Or, ce décalage vient du fait que la vitesse a été imposée comme constante selon x. Il y a donc un transport de la plage sur cet axe que ça soit en amont ou en aval. Bien choisir la vitesse est donc nécessaire afin d'obtenir des résultats cohérents. Ici on a réessayé en reprennant une vitesse orbitale ? Ce terme étant déjà présent en coefficient de la direction de la descente, il n'est pas forcément nécessaire de l'ajouter dans le transport.

Un autre cas intéressant serait de réessayer ce schéma de transport avec le cas de comparaison xbeach.

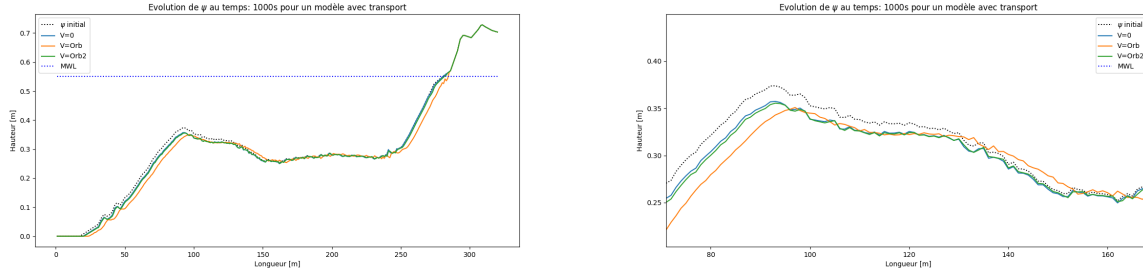


FIGURE 175 – Avec et sans schéma de transport

Ici, on obtient les résultats ci-dessus. Ce ne sont pas les résultats que nous souhaitons. La bosse ne se décale pas comme on le voudrait. Peut-être qu'il serait nécessaire d'avoir un courant qui se déplace aussi selon z et non seulement selon x .

Nouveau terme dans la fonctionnelle en $\partial_x(C_g H^2)$

Une idée venant de M. Sous Sous serait d'ajouter un terme en $\partial_x(C_g H^2)$ dans la fonctionnelle. En effet, ce terme étant proportionnelle à η la surface libre de l'eau, il pourrait rendre compte d'une physique plus réaliste. Il représenterait la dissipation ? La fonctionnelle retenue (pour le moment) étant sous la forme :

$$J = \rho g \frac{1}{8} \int_{\Omega_s} H^2 dx$$

avec le nouveau terme de dissipation, on obtiendrait la fonctionnelle suivante :

$$J = \rho g \left(\frac{1}{8} \int_{\Omega_s} H^2 dx - f \int_{\Omega_s} \nabla_x(C_g H^2) dx \right)$$

soit :

$$J = \rho g \left(\frac{1}{8} \int_{\Omega_s} H^2 dx - f \int_{\Omega_s} (H^2 \nabla_x C_g + 2 H C_g \nabla_x H) dx \right)$$

avec f un coefficient en s^{-1} .

Si l'on calcul le gradient de cette nouvelle fonctionnelle, on obtient :

$$\nabla_\psi J \approx \rho g \left(\frac{1}{4} \int_{\Omega_s} H \nabla_\psi H dx - f \nabla_\psi \int_{\Omega_s} (H^2 \nabla_x C_g + 2 H C_g \nabla_x H) dx \right)$$

Le développement sera laissé au lecteur. Deux points peuvent être embêtants : $\nabla_\psi \nabla_x C_g$, cela peut se faire à la main (très long) ou bien plus simplement avec un algorithme de calculs formel comme Sympy. Le second est le calcul de $\nabla_\psi \nabla_x H_s$, on peut sûrement itérer en posant le premier terme : $\nabla_\psi \nabla_x H_s = 0$?

Compte rendu scientifique

Semaine 4 : 06/12/21-10/12/21

Implémentation d'Ec

Unité de ε

Le terme énergétique de la fonctionnelle étant en Joules : $J.m^{-2}$ en $kg.s^{-2}$, le terme de frottement $\varepsilon \rho U_{orb}^2$ doit être de même homogène à des joules. ρ étant en $kg.m^{-3}$ et U en $m.s^{-1}$, il en découle que ε est en m^{-1} .

Valeurs de ε

En reprenant l'étude sans géotubes à plage constante, on essaie différentes valeurs de ε afin de quantifier celle-ci :

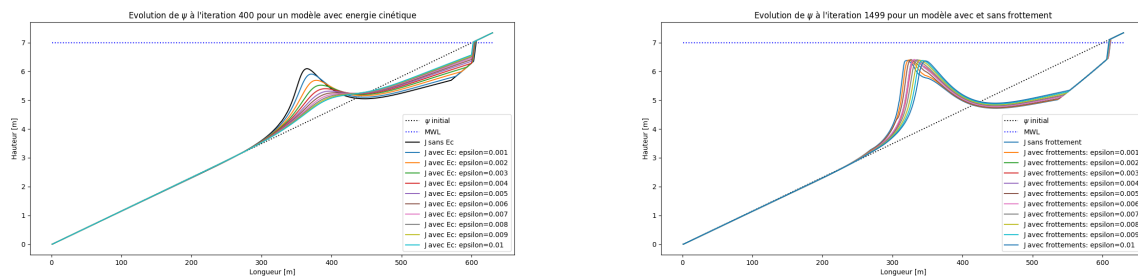


FIGURE 176 – Différentes valeurs de ε pour une simulation donnée

Ici, on remarque que le point d'apex (sommet de la "bosse") se retrouve translaté vers la droite. Plus il sera grand, plus la "bosse" sera lissée et décalée vers le sens de la pente.

Une seconde étude intéressante pourrait être de reprendre celle qui compare x-beach/optimorph/exp et voir si cette fonctionnelle pourrait être meilleure. En faisant varier de même les coefficients ε , on obtient le graphique suivant :

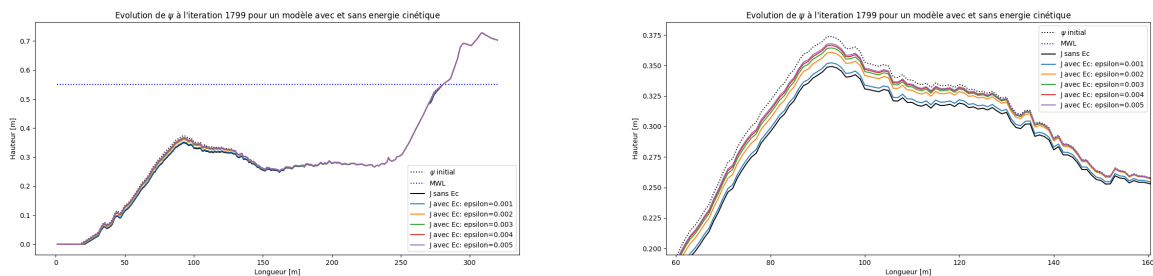


FIGURE 177 – Différentes valeurs de ε pour une simulation donnée

Ici, on remarque que ce coefficient ε modélise simplement une translation entre la plage initiale et la plage simulée sans frottement. Ici, malheureusement, on a pas la translation de la "bosse" dans le bon sens.

L'article de Mme Cook lui nous donne les résultats suivants :

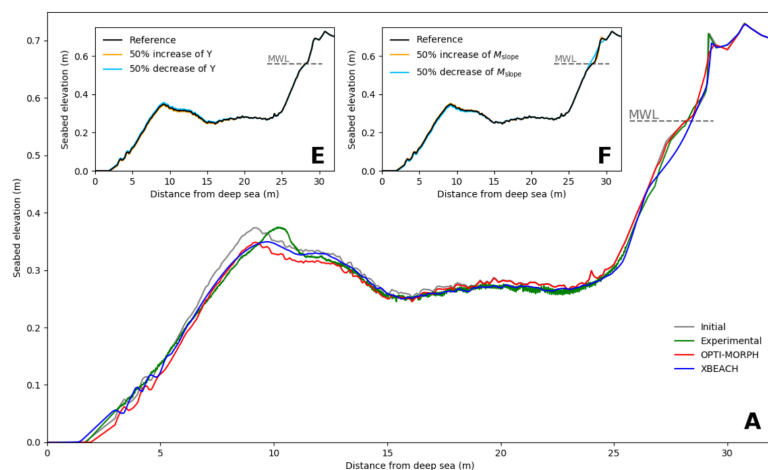


FIGURE 178 – Données de l'article de Mme Cook

Ici il est difficile de conclure sur une amélioration de ces résultats. Le problème de la "bosse" assez haute et décalée subsiste.

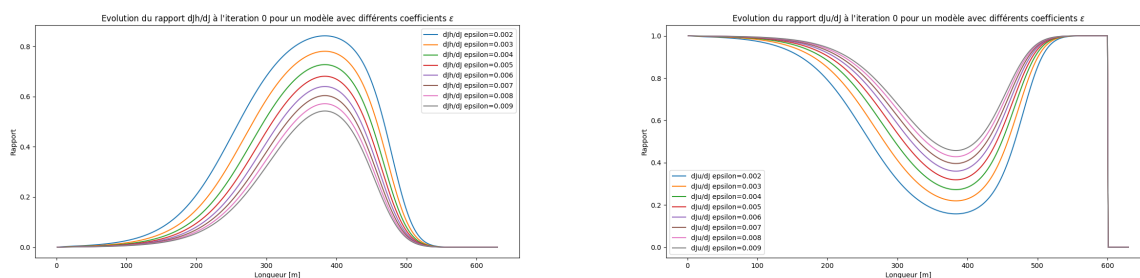


FIGURE 179 – Iteration 0

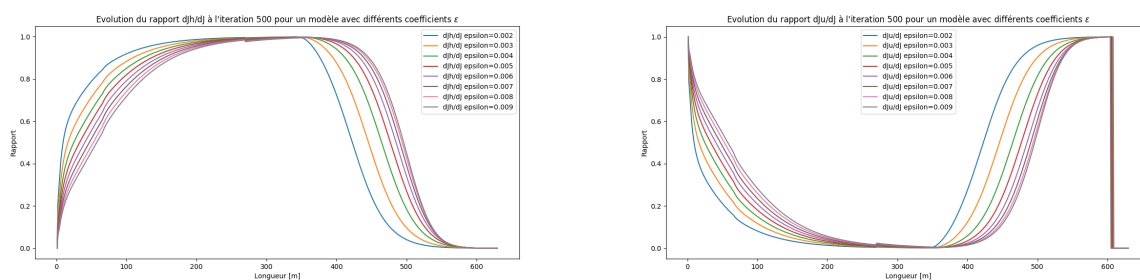


FIGURE 180 – Iteration 500

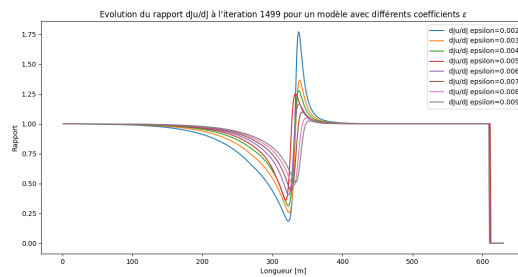
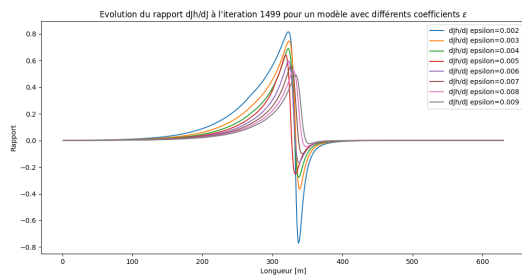


FIGURE 181 – Iteration 1499

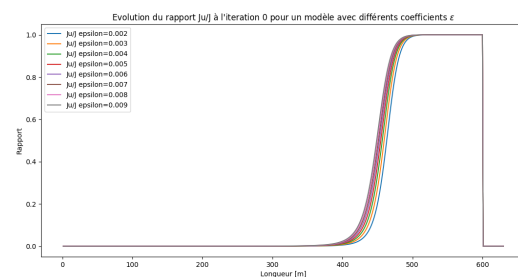
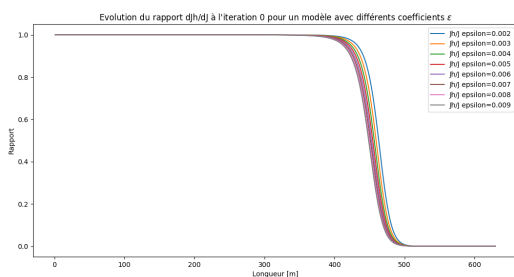


FIGURE 182 – Iteration 0

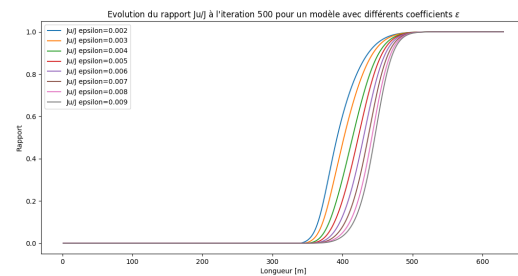
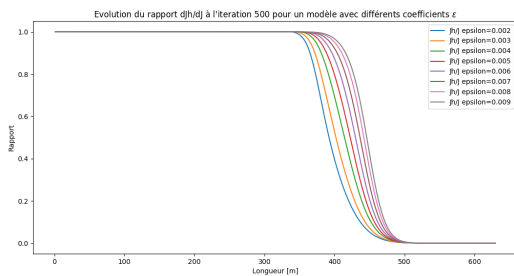


FIGURE 183 – Iteration 500

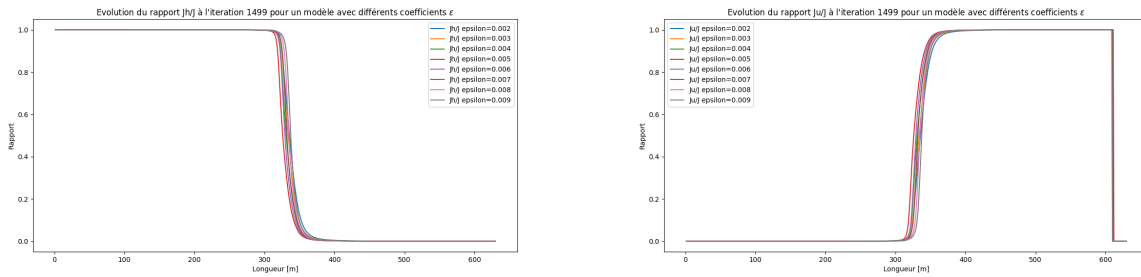


FIGURE 184 – Iteration 1499

Grille pour l'optimisation de 2 géotubes

Après avoir lancé en parallèle 2414 calculs sur le cluster meso, on obtient la figure ci-dessous :

Quantité de sable déplacée en fonction de la position de 2 géotubes

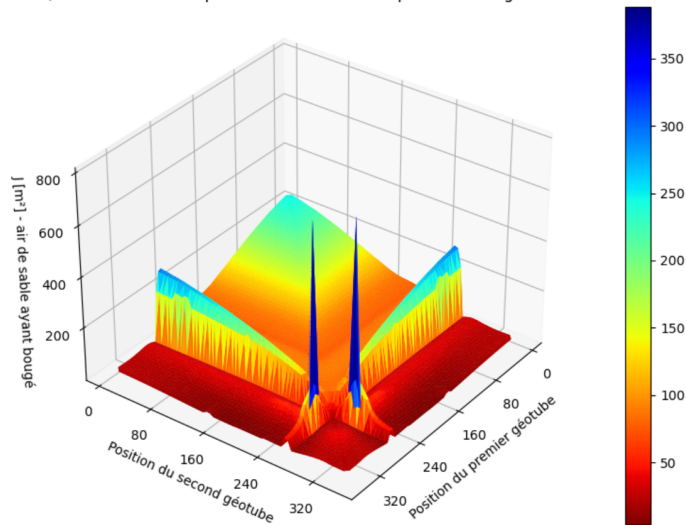


FIGURE 185 – Grille à 2414 points

Le minimum ici est en 180, 350 et vaut 3.66. On remarque quelques points parasites : ceux sur l'axe 240 et un point particulier en [260, 295]. En regardant les résultats de cette simulation pour le point [260, 295, 802]

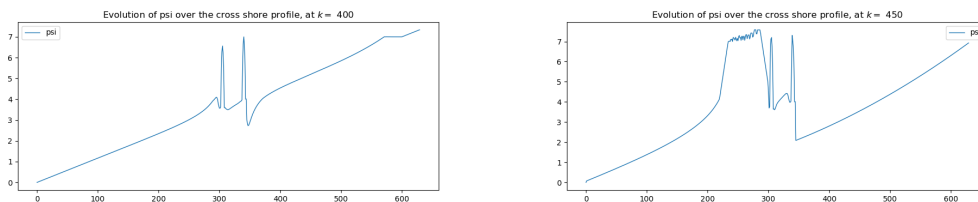


FIGURE 186 – Comparaison pour la configuration de géotubes en 260, 295

Il semble y avoir un soucis dans le calcul, pas d'explication pour le moment.

Compte rendu scientifique

Semaine 3 : 26/11/21-03/12/21

Implémentation de frottement

L'idée est d'implémenter une énergie cinétique dans le modèle. Celle-ci représente un courant. Pour ce faire, on modifie la fonctionnelle initiale :

$$J = \int_{\Omega_s} \rho g H^2 dx$$

en une nouvelle fonctionnelle :

$$J = \int_{\Omega_s} (\rho g H^2 - \varepsilon \rho U_{orb}^2) dx$$

Pour implémenter cela, on a donc besoin de calculer $\nabla_{\psi} J$ et donc le calcul de $\nabla_{\psi} U_{orb}$.

On part donc de l'expression de la vitesse orbitale :

$$U_{orb} : \Omega \times [0, h_0] \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

$$(x, \psi) \longmapsto \frac{\cosh(k(x)(h(x) - (h_0 - \psi)))}{\cosh(k(x)h(x))}$$

En posant $U_{orb} = \frac{u}{v}$, on arrive à $\nabla_{\psi} U_{orb} = \frac{\nabla_{\psi} u \cdot v - u \nabla_{\psi} v}{u^2}$. On a :

$$\nabla_{\psi} u = \sinh(k(h - (h_0 - \psi))) [k_{\psi}(h + \psi - h_0) + k(h_{\psi} + 1)]$$

or $h_{\psi} = -1$ car $h = h_0 - \psi$ d'où :

$$\nabla_{\psi} u = \sinh(k(h - (h_0 - \psi))) k_{\psi}(h + \psi - h_0)$$

$$\nabla_{\psi} v = \sinh(kh) [k_{\psi}h - k]$$

$$k_{\psi} = \frac{k^2}{\cosh(kh) \sinh(kh) + kh}$$

En calculant la partie frottement du gradient de manière analogue à la partie énergétique, on peut comparer les résultats suivants :

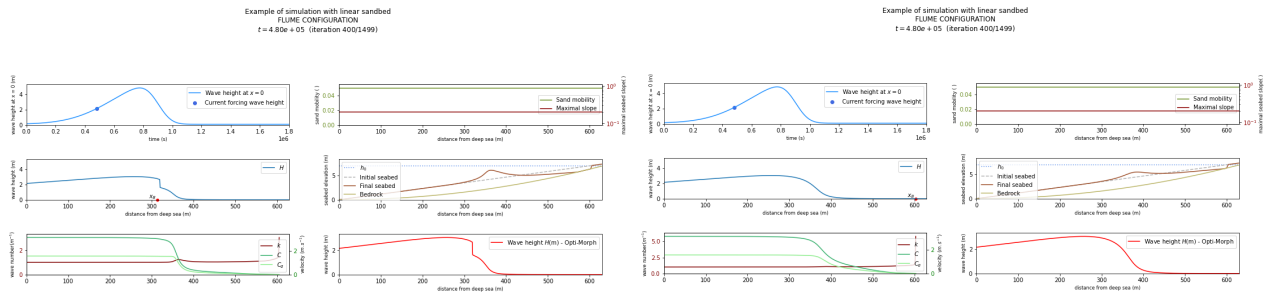


FIGURE 187 – Comparaison à deux CF

On peut comparer les fonds à différents instants :

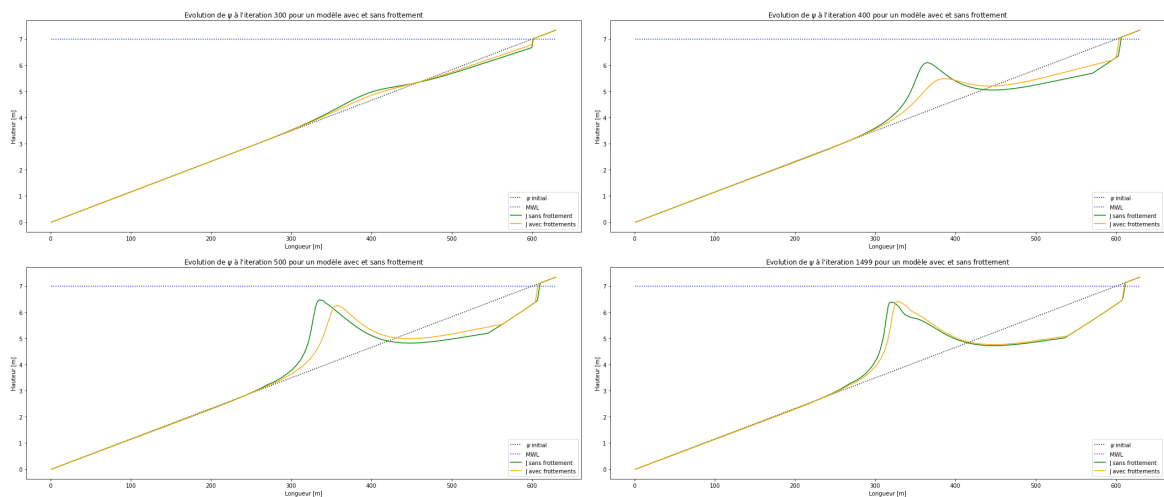


FIGURE 188 – Comparaison à deux CF

On observe un décalage de des deux plages dans le temps.

Grille pour l’optimisation de 2 géotubes

On essaie plusieurs positions de manière brutale en faisant une grille. On obtient :

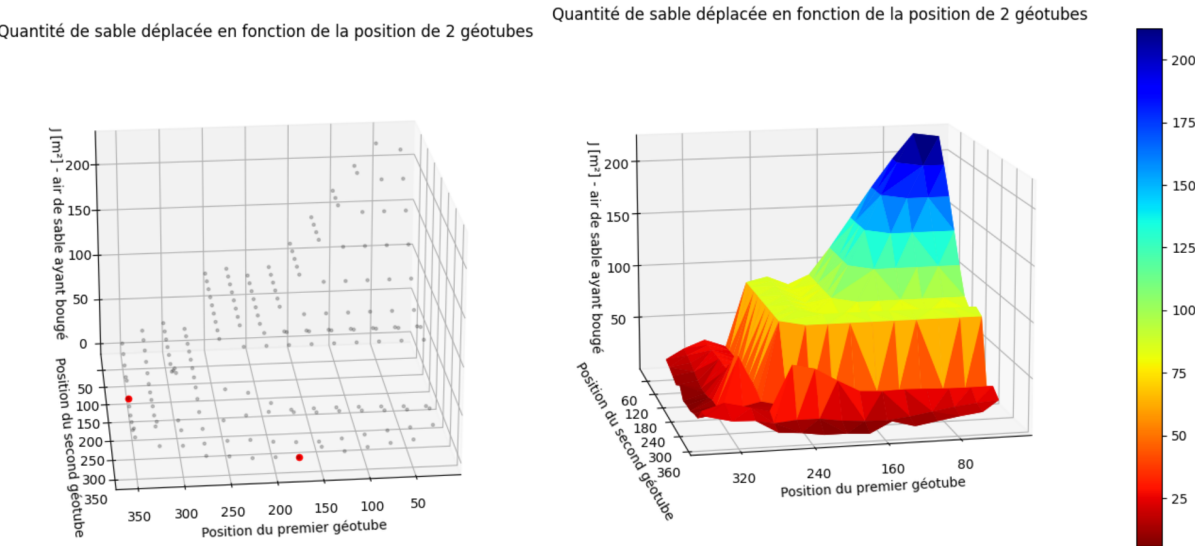
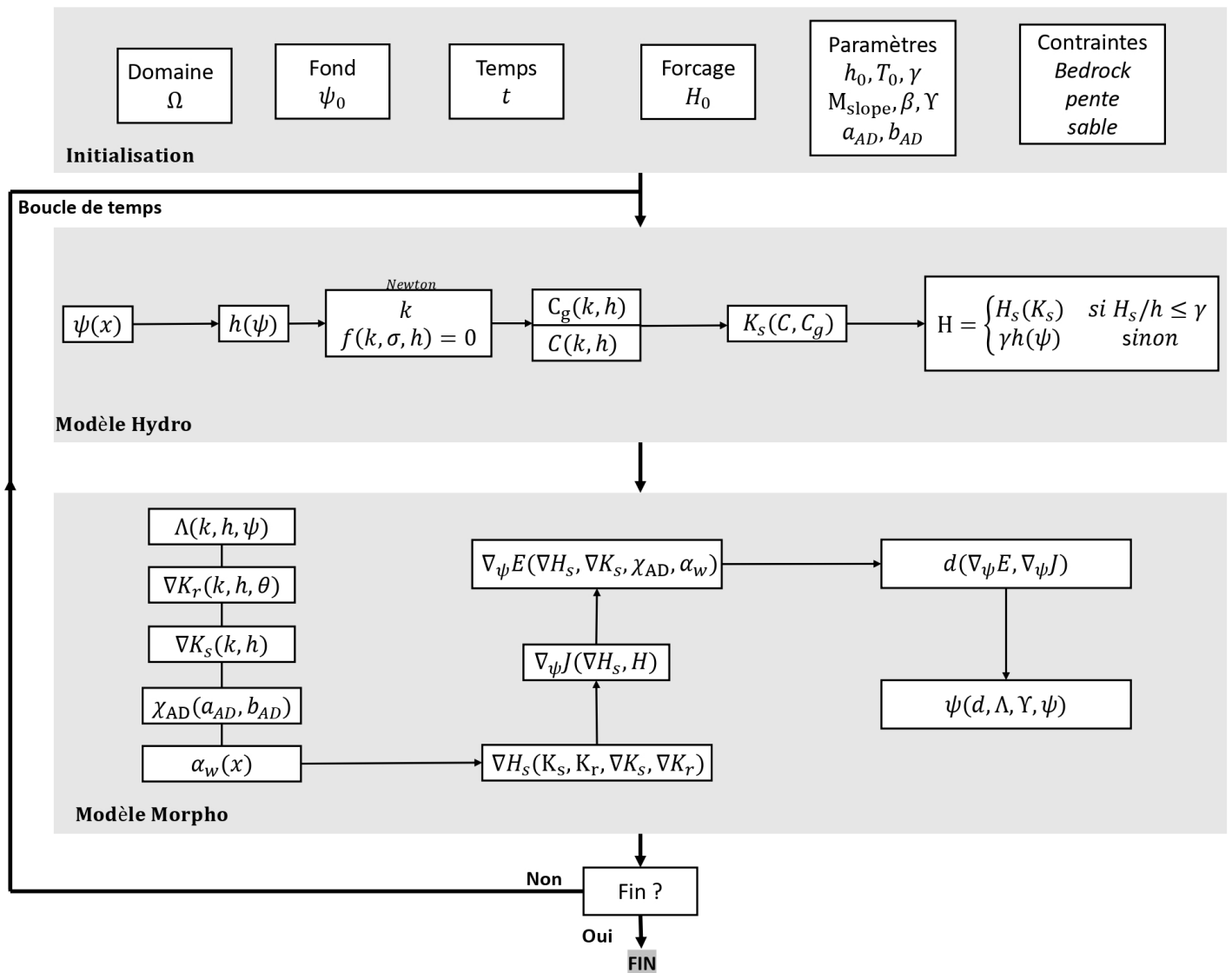


FIGURE 189 – Fonction de coût

Ici le coût min est à [175,350] pour un coût de 3.71 m^2 qui est supérieur à celui trouvé par GA. Il faudrait affiner le grille pour avoir un résultat plus précis.

Fonctionnement du programme Toufan



Compte rendu scientifique

Semaine 2 : 22-26/11/21

Prise en main du code de calcul Opti-Morph

2 géotubes :

- Compréhension de la fonction `creategeotube` du fichier `create_geotube.py`.
- Création d'une fonction `create2geotube` : ajout d'un second polynome pour créer un second géotube, ajout de deux nouveaux rho, modification de la variable `newrho` et `newslope` : fonctions Υ et Λ .
- Cas d'application d'optimisation de positionnement.

Application : positionnement optimal de 2 géotubes :

L'idée est de trouver la meilleure position pour les deux géotubes afin que ce système de protection soit utilisé au mieux. Pour se faire, la démarche d'optimisation choisie sera celle d'utiliser un **algorithme génétique**. Celui-ci va :

- Créer une population de N_{pop} couples de positionnements de géotubes : sous la forme $[x1, x2]$.
- Choisir aléatoirement deux éléments de la population.
- Evaluer le coût de chacun avec une fonction J qui sera défini plus tard.
- Copier le meilleur candidat dans le mauvais et le faire muter (principe de mutation expliqué plus tard)
- Itérer cette méthode jusqu'à convergence de la population vers un minimum (on l'espère) global.

Fonction coût :

Ici, le choix de la fonction coût sera la quantité de sable déplacé. On peut traduire ça simplement par :

$$J = \int_{\Omega} |\psi_f - \psi_0| dx \quad (11)$$

avec ψ_f et ψ_0 le fond marin initial et le fond marin final. Cette quantité représente l'air de sable ayant bougé entre l'état initial et final. Cette fonction peut être amenée à évoluer.

Mutation :

Ici le principe de mutation sera simplement un opérateur qui déplacera aléatoirement les deux géotubes sur un intervalle $[x_{1/2} - 10, x_{1/2} + 10]$. Cette fonction peut être amenée à évoluer.

Résultats :

Notre algorithme semble avoir convergé vers un minimum global comme on peut voir sur la figure ci-dessous :



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Quantité de sable déplacée en fonction de la position de 2 géotubes

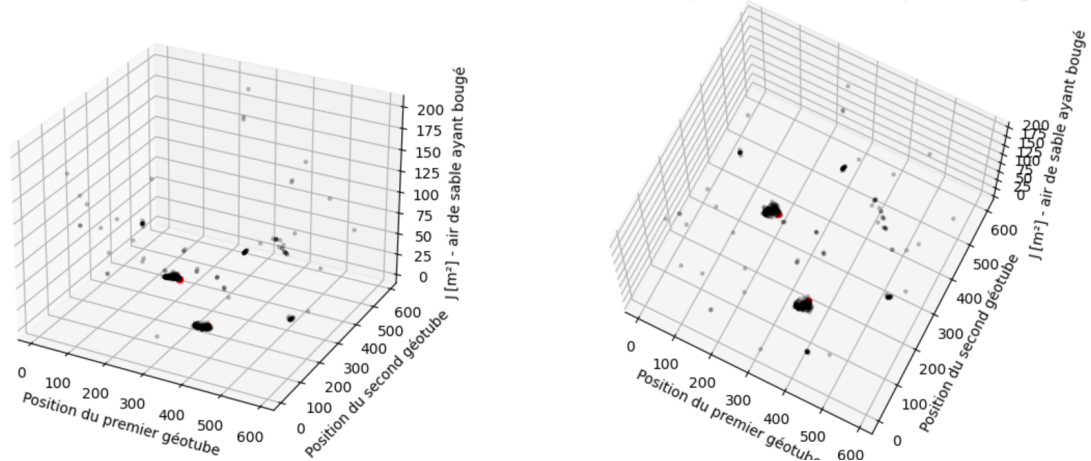


FIGURE 190 – Convergence de l'algorithme génétique

Cet algorithme semble avoir convergé vers une configuration $[x_1, x_2] = [183 \ 350]$ où la surface de sable déplacée est seulement de $J = 3.67 \text{ m}^2$.

En traçant différents résultats ci-dessous :

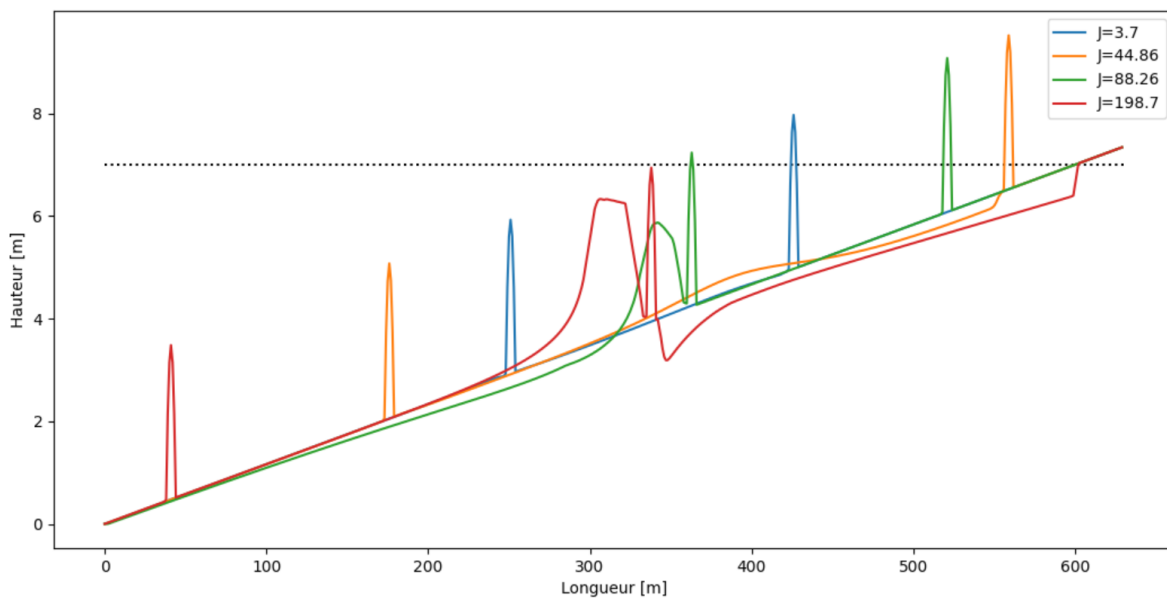


FIGURE 191 – Positionnement optimal des géotubes

on s'aperçoit rapidement que la configuration optimale (bleue) faire intervenir un géotube sortant de l'eau. Comme Mme Cook l'avait fait, il convient d'ajouter une contrainte sur le positionnement limite des géotubes.

On ajoute donc la contrainte que le géotube doit être à une distance d'au moins 350m de la côte.

Avec cette contrainte supplémentaire, on arrive aux résultats suivants :

Quantité de sable déplacée en fonction de la position de 2 géotubes

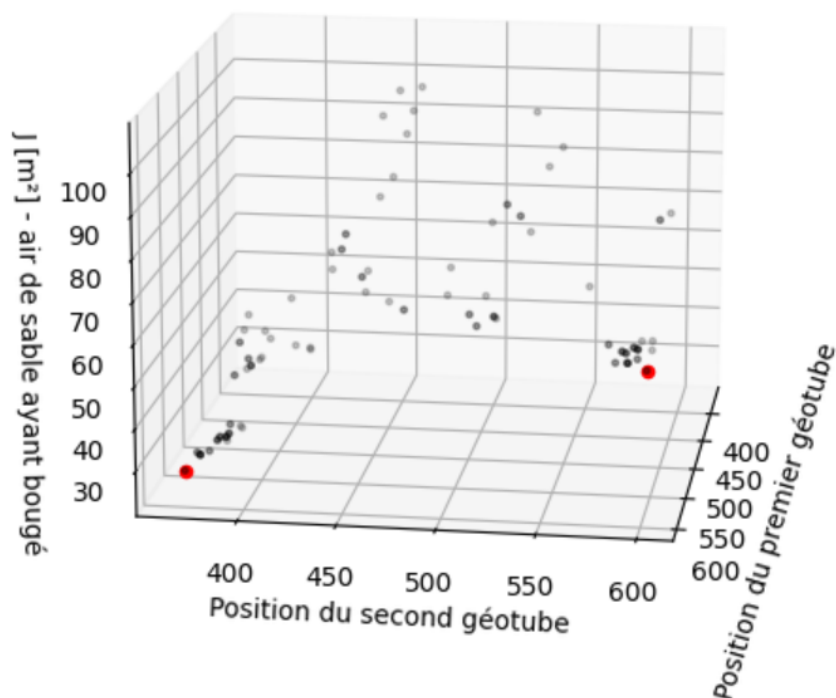


FIGURE 192 – Positionnement optimal des géotubes avec contrainte sup

On remarque que l'algorithme converge vers les extrémités du domaine. Cela indique qu'il n'y a pas une grande "utilité" au déploiement de deux géotubes. La position à la limite du domaine est celle qu'avait été calculée par Mme Cook dans le cas d'un seul géotube.

Compte rendu scientifique

Semaine 1

RAS



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Annexe

Equation de balance des moments

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho U^2) = -g\rho \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial x} - \frac{1}{(\bar{\eta} + h)} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} - \frac{1}{(\bar{\eta} + h)} \bar{\tau}_b \quad [\text{Pa.m}^{-1}]$$

3 Posters

3.1 2022: Journée des doctorants 2022 - Geosciences Montpellier



MÉTHODE DE COUPLAGE VAGUE-MORPHODYNAMIQUE DU LITTORAL PAR PRINCIPE DE MINIMISATION

R. Dupont^{1, 2, 3}

¹GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, ronan.dupont@umontpellier.fr

²IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

³GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

INTRODUCTION

- Un nouveau modèle de morphodynamique du littoral a été développé sur la base de la **minimisation de l'énergie** sous contrainte. C'est le **premier modèle** à création de barre sédimentaire. Cette approche pourrait à terme s'étendre dans de nouvelles disciplines.
- Opti-Morph est un code **robuste** qui a été validé numériquement en terme de stabilité et sensibilité.
- Opti-Morph a été validé à travers des cas comparant des données expérimentales de canal et des simulations numériques avec XBeach.
- Le modèle est **rapide** et de **faible complexité**.
- Les calculs peuvent être exécutés en parallèle sur un cluster HPC.
- Ce modèle peut utiliser des données réelles allant du 1D au 2D (multi-1D).

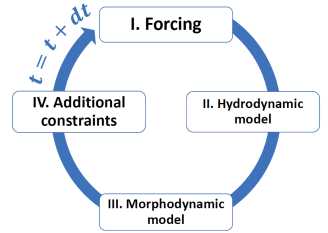


Fig. 1. Schéma de fonctionnement d'OptiMorph

MODÈLE NUMÉRIQUE

1) Fonction coût:

L'évolution du fond marin ψ est obtenu par principe de minimisation de la fonction coût J . Ici on minimise l'énergie d'une vague avant le déferlement.

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_s} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}]$$

Ω_s : zone avant déferlement [m]
 ρ_w : densité de l'eau [kg.m⁻³]
 g : accélération gravitationnelle [m.s⁻²]
 H : hauteur significative de la vague [m].

2) Équation du système:

Le fond marin ψ est obtenu grâce à l'équation suivante résultant du principe de descente du gradient.

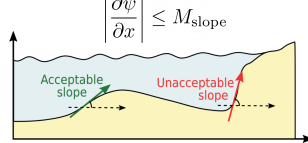
$$\begin{cases} \psi(t=0) = \psi_0 \\ \psi_t = \Upsilon \Lambda d \end{cases}$$

ψ_t : évolution du fond marins en temps [m.s⁻¹]
 Υ : abrasion du sable [m.s.kg⁻¹]
 Λ : excitation du fond marin par les vagues
 ψ_0 : élévation initiale du fond de la mer [m].

Des contraintes sont ajoutées à $d = -\nabla_{\psi} J$ afin que le modèle soit le plus réaliste possible.

3) Contraintes:

La pente du fond marin est conditionnée par un seuil M_{slope} limitant un scénario où les grains ne tomberaient pas.



On considère bien souvent la conservation du sable au cours du temps.

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T]$$

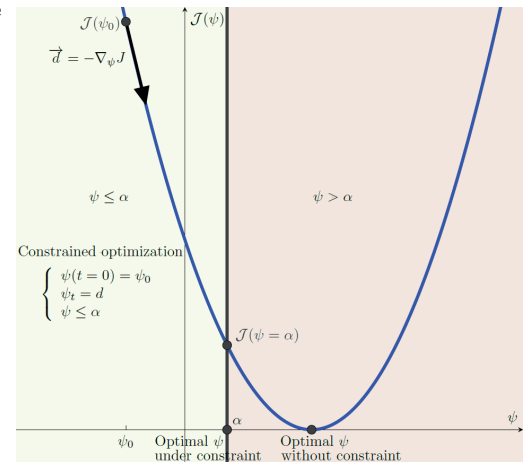
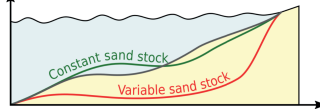


Fig. 2. Illustration de descente du gradient avec des contraintes de conservation sableuse et de pente représentées par $\alpha \leq \psi$. L'optimum ne correspond pas nécessairement au point critique.

APPLICATIONS À UN CAS MULTI-1D SUR LE GOLFE D'AIGUES-MORTES

- Simulation d'une tempête de plusieurs jours.
- Ajout d'une structure de protection géotube en forme de gaussienne.
- Calculs parallélisés sur 10 transects représentés en noirs. Résultat obtenus en moins de 5 minutes.
- Réduction de l'érosion de la plage.
- Résultats similaires à ceux de la campagne expérimentale COPTER.

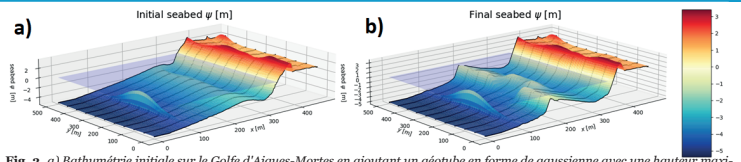


Fig. 3. a) Bathymétrie initiale sur le Golfe d'Aigues-Mortes en ajoutant un géotube en forme de gaussienne avec une hauteur maximale de 3m. b) Bathymétrie finale après simulation d'une tempête de plusieurs jours.

AXES DE RECHERCHE

- Implémentation et validation d'un nouveau modèle hydrodynamique polyvalent sur un plus grand nombre de cas d'utilisation.
- Validation du modèle morphodynamique pour un large pannel de simulations : 2D, 1D, acretion, ...
- Confrontations des nouveaux modèles à des données issues d'expérimentations validées par le partenaire GLADYS.
- Extension de cette notion de transport optimal à d'autres disciplines : développement mathématique de nouveaux formalismes et concepts.

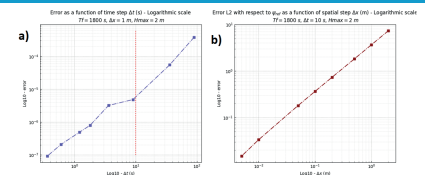


Fig. 4. Exemple de validation numérique du code. a) Validation de convergence temporelle. b) Validation de convergence spatiale

RÉFÉRENCES

D. Isebe, P. Azerad, B. Mohammadi, F. Bouchette (2007). Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact.

M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, N. Frayse (2021) Optimal port design minimizing standing waves with a posteriori long term shoreline sustainability analysis.

M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, F. Bouchette (2021) Opti-Morph: Optimized beach profile by submerged geotextile tubes.

B. Mohammadi, & A. Bouhargu waters. Computers and Fluids



3.2 2021: Salon International du Littoral 2021



MÉTHODE DE COUPLAGE VAGUE-MORPHODYNAMIQUE DU LITTORAL PAR PRINCIPE DE MINIMISATION

R. Dupont^{1,3} M. Cook^{1,3} F. Bouchette^{1,3} B. Mohammadi^{2,3}

¹GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, ronan.dupont@umontpellier.fr, megan.cook@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr

²IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr

³GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

INTRODUCTION

- Un nouveau modèle de morphodynamique de dynamique côtière a été développé sur la base de la **minimisation de l'énergie** sous contrainte. Cette approche pourrait à terme s'étendre dans de nouvelles disciplines.
- Le modèle s'adapte à des contextes de bassin ou de mer ouverte et ne requiert que deux hyper-paramètres (taux d'abrasion du sable et le seuil de pente maximale). Les modèles conventionnels (XBeach, Swan, Telemac, ...) nécessitent un grand nombre de paramètres empiriques.
- Opti-Morph a été validé à travers des cas comparant des données expérimentales de canal et des simulations numériques avec XBeach.
- Le modèle est **rapide** et de **faible complexité**.

MODÈLE NUMÉRIQUE

1) Fonction coût:

L'évolution du fond marin ψ est obtenu par principe de minimisation de la fonction coût J . Ici on minimise l'énergie d'une vague avant le déferlement.

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}]$$

Ω_S : zone avant déferlement [m]
 ρ_w : densité de l'eau [m³]
 g : accélération gravitationnelle [m.s⁻²]
 H : hauteur significative de la vague [m].

2) Équation du système:

Le fond marin ψ est obtenu grâce à l'équation suivante résultant du principe de descente du gradient.

$$\begin{cases} \psi_t = -\Upsilon \Lambda d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

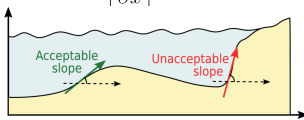
ψ_t : évolution du fond marins en temps [m.s⁻¹]
 Υ : abrasion du sable [m.s.kg⁻¹]
 Λ : excitation du fond marin par les vagues
 ψ_0 : élévation initiale du fond de la mer [m].

Des contraintes sont ajoutées à $d = \nabla \psi J$ afin que le modèle soit le plus réaliste possible.

3) Contraintes:

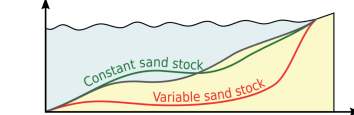
La pente du fond marin est conditionnée par un seuil M_{slope} limitant un scénario où les grains ne tomberaient pas.

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{slope}$$



On considère bien souvent la conservation du sable au cours du temps.

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T]$$



RÉSULTATS ET APPLICATION

À travers plusieurs thèses, de nombreuses applications ont vu le jour en passant par l'**optimisation de formes d'ouvrages portuaires** jusqu'au **positionnement stratégique** de système de protection. Cette dernière application a été conduite par Megan Cook^{1,3}. Elle visait à limiter la propagation de la houle sur une plage sableuse. Ci-dessous le résultat de plusieurs simulations sur différents emplacements de géotubes.

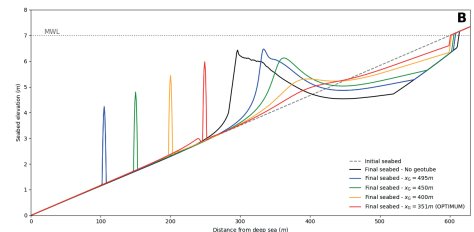


Fig. 1 Résultats de la recherche numérique de la position optimale du géotube via Opti-Morph

L'optimum étant trouvé à l'emplacement $x=351$ m (rouge), il en résulte une dynamique sableuse du domaine bien plus faible que les autres emplacements de géotubes. Plusieurs scénarios ont été testés et d'autres travaux ont été effectués sur l'influence de ces géotubes sur les hauteurs d'eau.

AXES DE RECHERCHE

- Développement du code de calcul Opti-Morph: nouvelles approches théoriques et numériques, extension du code à des **modèles 2D**.
- Reformulation du principe d'hydro-morphisme du littoral vers un **problème global** (et non local).
- Confrontations des nouveaux modèles à des données issues d'expérimentations validées par le partenaire GLADYS.
- Extension de cette notion de transport optimal à d'**autres disciplines**: développement mathématique de nouveaux formalismes et concepts.

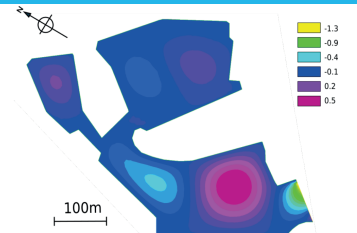


Fig. 2 Oscillation des vagues au sein du port de La Turballe, pour une paramétrisation donnée du port par Megan Cook^{1,3}.

RÉFÉRENCES

D. Isebe, P. Azerad, B. Mohammadi, F. Bouchette (2007). Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact.

M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, N. Frayssé (2021) Optimal port design minimizing standing waves with a posteriori long term shoreline sustainability analysis.

M. Cook, F. Bouchette, B. Mohammadi, L. Sprunck, N. Frayssé (2021) Analysis of Opti-Morph: Optimisation of submerged geotextile structures.

B. Mohammadi, & A. Bouhassira (2020) Opti-Morph: Optimisation of submerged geotextile structures in shallow waters. Compute



UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

l'Europe s'engage en France avec le FEDER



La Région Occitanie Pyrénées - Méditerranée

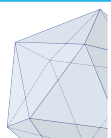


UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER



IMAG

INSTITUT MONTPELLIERAIN
ALEXANDER GROTHENDIECK



Biodiversité

Transition

Énergie

Environnement

Salon

International Coastal Exhibition



3.3 2021: Journée des doctorants 2021 - Geosciences Montpellier



OPTI-MORPH, a new model for sandy beach dynamics by wave energy minimization

Megan Cook • Frédéric Bouchette • Bijan Mohammadi • Samuel Meulé • Nicolas Fraysse

GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France • BRL Ingénierie, Nîmes, France

megan.cook@umontpellier.fr • megancook.fr

Introduction

- A new coastal dynamics morphodynamic model, Opti-Morph, has been developed based on constrained energy minimization.
- The model adapts to either basin or open sea settings and only requires two hyper-parameters (the sand abrasion and the maximal slope threshold).
- To validate the model, Opti-Morph is compared to wave-flume experimental data and XBeach numerical simulations.

Model description

1. Cost function

The evolution of the seabed is assumed to be driven by the minimization of a **cost function** J . Here, we assume the shape of the seabed ψ is determined by the minimization of the **potential energy of shoaling waves**:

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}]$$

- Ω_S : shoaling zone $[m]$
- ρ_w : water density $[kg.m^{-3}]$
- g : gravitational acceleration $[m.s^{-2}]$
- H : significant wave height $[m]$

2. Governing equations

In order to describe the evolution of the seabed, we assume that the seabed ψ , in its effort to minimize J , verifies the following dynamics:

$$\begin{cases} \psi_t = -\Upsilon \wedge d \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

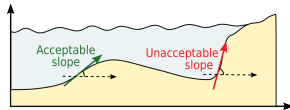
- ψ_t : evolution of the seabed over time $[m.s^{-1}]$
- Υ : abrasion of sand $[m.s.kg^{-1}]$
- \wedge : excitation of the seabed by the water waves
- ψ_0 : initial seabed elevation $[m]$

In unconstrained circumstances, $d = \nabla \psi J$. Additional constraints alter the value of d . Constraints are added to the model to incorporate more physics and deliver more realistic results.

3. Two examples of constraints

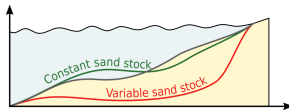
The slope of the seabed is bounded by a grain-dependent threshold M_{slope} :

$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq M_{slope}$$

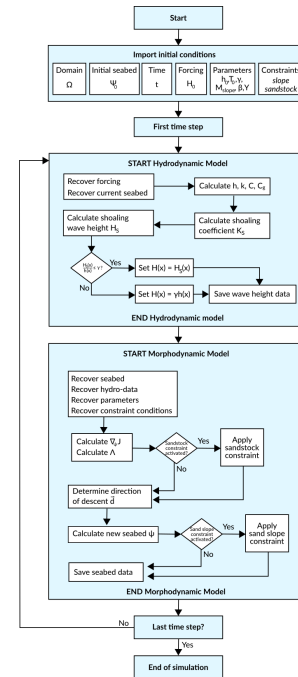


In the case of an experimental flume, the quantity of sand in a flume must be constant over time:

$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T]$$



Workflow



Numerical results

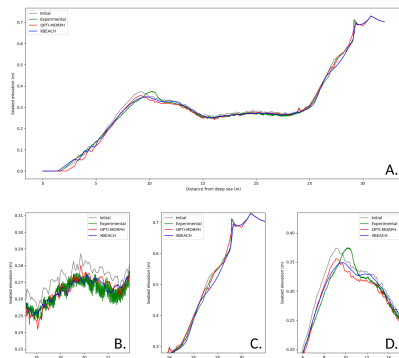


Figure 1: A. Results of the numerical simulation calculated over the initial seabed (black) using the XBeach morphodynamic module (blue) and the Opti-Morph model (green). These are compared with the experimental data (orange). B. Zoomed in view of the plateau section. C. Zoomed in view at the shoreline. D. Zoomed in view of the sandbar.

Opti-Morph was applied to a flume configuration and was compared to **experimental data** and a well-established numerical morphodynamic model, XBeach.

Figure 1 shows a general **quantitative agreement** when compared to the experimental data, especially at the coast and the plateau. However, neither numerical model was able to predict the advancing of the sandbar.

Further studies include the **long-term behavior** of Opti-Morph and XBeach (Figure 2) and the **robustness** of the hyper-parameters (Figure 3).

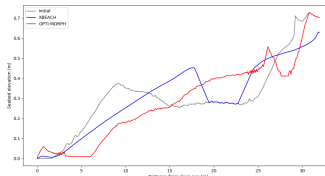


Figure 2: Comparison of seabeds produced by Opti-Morph and XBeach over a longer time series.

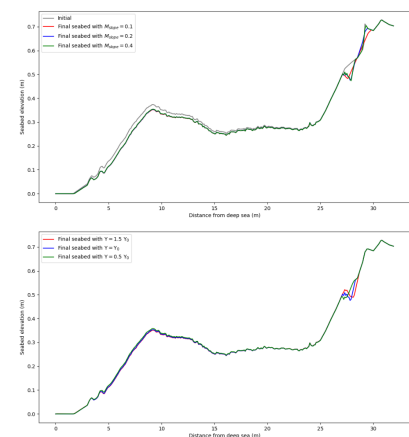


Figure 3: Top: Seabeds produced by Opti-Morph with different values of the maximal slope parameter M_{slope} . Bottom: Seabeds produced by Opti-Morph with different values of the mobility parameter Υ .

Conclusion

- Opti-Morph shows potential as a **fast, robust** and **low complexity** morphodynamic model involving only **two hyper-parameters**.
- Numerical simulation based on an optimization theory reproduces certain **natural coastal mechanisms**, such as the formation of **sandbars** and **coast**.
- These results demonstrate

3.4 2020: Salon International du Littoral 2020



Comment aménager un port grâce à l'optimisation ?

APPLICATION SUR LE PORT DE LA TURBALLE

M. Cook^{1,3,4} F. Bouchette^{1,3} B. Mohammadi^{2,3} N. Fraysse⁴

¹ GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, megan.cook@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr

² IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr

³ GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

⁴ BRL Ingénierie, Nîmes, France, nicolas.fraysse@brl.fr

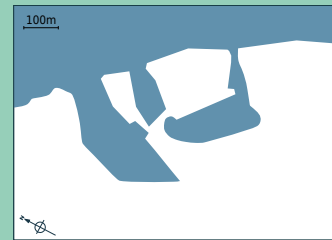
Introduction

Le port de La Turballe, situé en Loire-Atlantique (France), fait l'objet d'un réaménagement pour :

- augmenter la capacité d'accueil du port
- développer d'autres activités maritimes, comme celles associées au parc éolien prévu en 2022.

Les usagers et gestionnaires de ce port constatent des nuisances dues à une forte agitation au sein du port.

L'objectif général du réaménagement est d'augmenter la surface exploitable tout en réduisant l'agitation de l'eau dans le port.



Port de La Turballe : configuration initiale

Problématique

Une discussion avec les ingénieurs de BRL nous a conduits à considérer deux projets principaux.

ÉTUDE 1 - Ajout d'une môle et d'une digue
Nous étudions la largeur de la môle et la longueur de la digue.

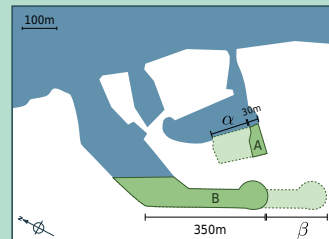
ÉTUDE 2 - Ajout d'un épi et d'une digue
Nous étudions la position de l'épi et la longueur de la digue.

On choisit deux paramètres d'optimisation dans ces deux exemples, pour des raisons illustratives.

Les contraintes associées à l'introduction de ces infrastructures sont :

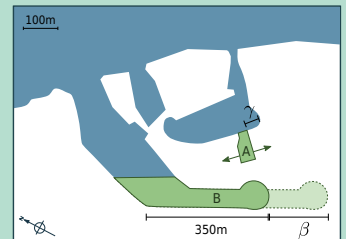
- physiques
- sociales
- financières

ÉTUDE 1



Port de La Turballe - Structures considérées : une môle et une digue

ÉTUDE 2



Port de La Turballe - Structures considérées : un épi et une digue

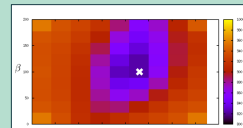
Optimisation

Le problème d'optimisation se lit :
Quelles dimensions des infrastructures minimisent l'agitation de l'eau au sein du port ?

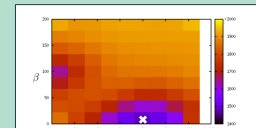
Afin de résoudre ce problème, nous avons développé :

- un modèle hydrodynamique
- une fonction de coût à minimiser
- un algorithme d'optimisation

La fonction de coût à minimiser dépend de 28 scénarios de forçages caractéristiques du port.
Ces scénarios sont pondérés afin de privilégier la minimisation des grosses vagues (susceptible de causer le plus de dégâts).



Évolution de la fonction de coût en fonction de α et β . La croix indique le minimum : $\alpha = 90\text{m}$ et $\beta = 120\text{m}$.



Évolution de la fonction de coût en fonction de β et γ . La croix indique le minimum : $\beta = 0\text{m}$ et $\gamma = 80\text{m}$.

Résultats

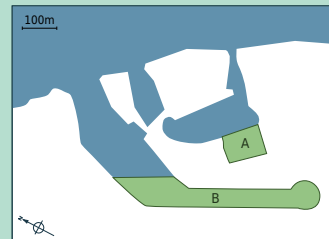
L'optimisation appliquée sur ce scénario fournit le résultat suivant pour une agitation minimale de l'eau :

ÉTUDE 1 - Ajout d'une môle et d'une digue
La môle mesure 90m de large et la digue mesure 470m de long.

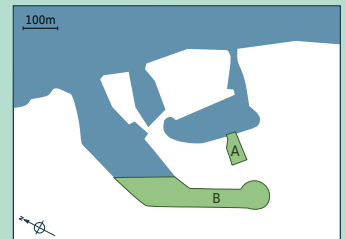
ÉTUDE 2 - Ajout d'un épi et d'une digue
L'épi est positionné à 80m de l'emplacement initial et la digue mesure 350m de long.

En terme de réduction de l'agitation de l'eau dans le port, les deux configurations finales sont relativement équivalentes.

Le choix final de l'aménagement dépend en outre de critères sociaux, financiers et politiques.



Port de La Turballe : configuration môle-digue optimale pour la réduction de l'agitation dans le port



Port de La Turballe : configuration épi-digue optimale pour la réduction de l'agitation dans le port

Perspectives

La résolution de la problématique de La Turballe a engendré la création d'outils d'optimisation dont l'intérêt dépasse le cadre des applications aux aménagements portuaires.

Nous envisageons d'utiliser ce principe d'optimisation sur l'étude du dimensionnement et de l'emplacement de géotubes sur la côte israélienne.

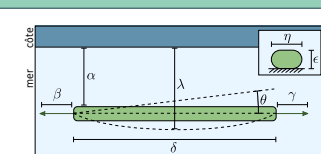


Diagramme de géotubes illustrant les différents paramètres d'optimisation pouvant être pris en considération lors de l'étude des dimensionnement et emplacement optimaux.

Remerciements

Ce travail a été accompli dans le cadre de la thèse de Megan COOK en partenariat avec BRLI, que nous remercions.

Nous souhaitons aussi remercier le groupe GLADYS (www.gladys-littoral.org) pour leur support financier et logistique.

3.5 2019: Journée des doctorants 2019 - Geosciences Montpellier



2. Simple hydrodynamic model

Wave height is defined by:

$$H(x) = \begin{cases} H_0 \left(\frac{1}{2n} \frac{C_0}{C} \right)^{1/2} & \text{if } x \text{ is in the shoaling zone} \\ \gamma h(x) & \text{if } x \text{ is in the breaking zone} \end{cases}$$

where:

- H_0 and C_0 are respectively the incoming wave height and velocity
- $n = \frac{C_0}{C}$
- C and C_g are respectively the wave velocity and group velocity
- h is the water depth and γ a wave breaking index

1. Objectives

- Use optimization theory to describe the evolution of the seabed.
- Develop a low-complexity program simulating coastal dynamics by optimization.
- Introduce solid structures (geotubes) used to protect the coast.
- Use optimization theory (again) to determine the optimal position/shape of the structures.

Optimization theory applied to coastal dynamics

M. Cook^{1,3,4} **F. Bouchette**^{1,3} **B. Mohammadi**^{2,3} **N. Fraysse**⁴

¹ GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, megan.cook@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr

² IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr

³ GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

⁴ BIL Ingénierie, Mimos, France, nicolas.fraysse@bil.fr

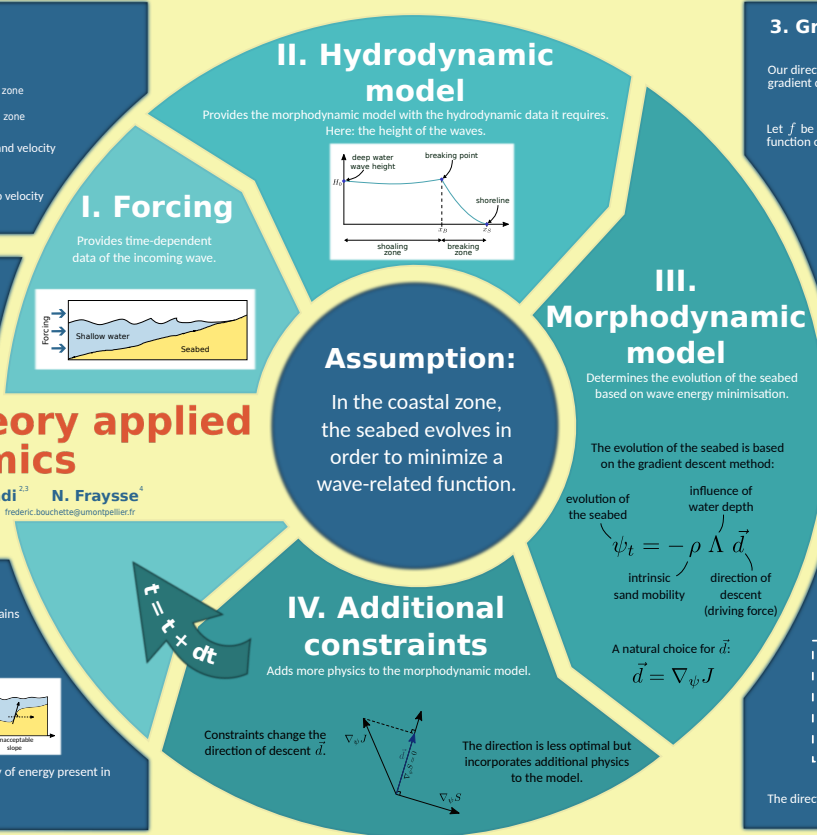
5. Constraints

- In the case of an experimental flume, the quantity of sand remains constant over time:

$$\nabla_{\psi} S = \nabla_{\psi} \left(\int_{\Omega} \psi(x, t) - \psi(x, t=0) dx \right) = 0$$
- The slope of the seabed cannot be too steep:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \leq \beta$$
- The movement of the seabed doesn't change the total quantity of energy present in the system:

$$\nabla_{\psi} \left(\frac{1}{8} \int_{\Omega} \rho_w g H^2(x) dx \right) = 0$$



3. Gradient descent method (1D)

Our direction of descent is based on the gradient descent method.

Let f be a real valued differentiable function of x .

A minimum of f with regards to x is given by the limit of:
$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k)$$

where the step is given by α .
NB: $f'(x)$ indicates a minimum of f .

4. Morphodynamic model

We assume the seabed adapts to minimize the wave-energy function:

$$J = \frac{1}{8} \int_{\Omega} \rho_w g H(x)^2 dx \quad [J.m^{-1}]$$

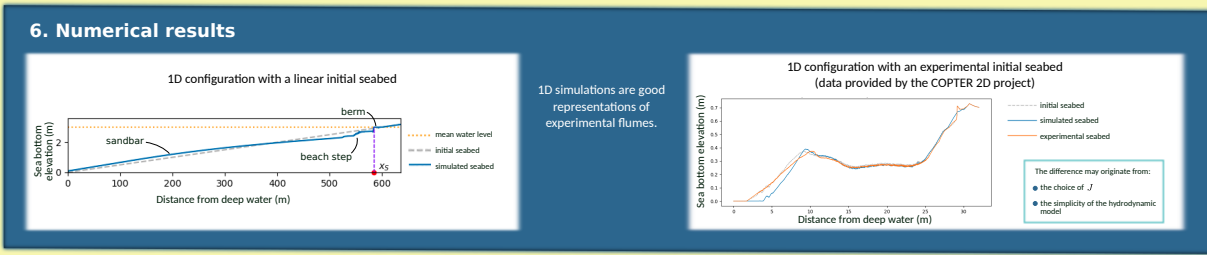
where:

- $\rho_w \approx 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ is water density
- $g \approx 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ is gravitational acceleration
- $H[m]$ is the wave height (provided by the hydrodynamic model)

NB: The choice of J is debatable. It depends on what we consider to be the driving force behind coastal morphodynamics.

A minimum of J with regards to ψ is given by the limit of:
$$\psi_{k+1} = \psi_k - \rho \Lambda \nabla_{\psi} J$$

where the step is given by $\rho \Lambda$.
NB: $\nabla_{\psi} J$ indicates a minimum of J with regards to ψ .
The direction on descent \vec{d} is driven by the vector $\nabla_{\psi} J$.



3.6 2019: RCEM



OPTIMIZATION THEORY APPLIED TO THE MODELING OF SANDY BEACH DYNAMICS

Application to linear seabed

M. Cook^{1,3,4} F. Bouchette^{1,3} B. Mohammadi^{2,3} N. Fraysse⁴

¹ GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, megan.cook@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr

² IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr

³ GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

⁴ BRL Ingénierie, Nîmes, France, nicolas.fraysse@brl.fr

INTRODUCTION

Optimization theory is often used to describe physical phenomena in a vast array of domains. Examples include aeronautics, medicine and biology. We wish to use optimization theory to describe the physical phenomena behind coastal morphodynamics.

Unlike other morphodynamic models that depend on in situ and experimental observations, we have a more theoretical approach, only using in situ data for validation purposes.

Continuing the work by (Bouharguane et al., 2010) and (Mohammadi & Bouharguane, 2011), we wish to introduce a new innovative approach to model coastal dynamics, one based on wave-energy minimization.

OBJECTIVES

- Develop a theory based on optimal control and designed to model the coastal morphodynamics of sandy beaches.
- Implement this new approach to coastal morphodynamics in order to test this theory with numerical simulations.
- Validate the model on a simple case study and show that this new approach to modeling morphodynamics show potential.

OPTIMIZATION

“Optimization refers to the minimization or maximization of a certain quantity relative to a given configuration and possibly subjected to constraints.”

Three elements define an optimization problem:

- A cost function: the quantity to be optimized.
- The input parameters: a set of parameters that can be modified to determine the optimum of the cost function.
- Constraints (optional): restrictions applied to the cost function and input parameters.

ASSUMPTION

The morphodynamic model is based on the following assumption:

“The seabed reacts to the state of the waves by minimizing a certain wave-based quantity.”

We recognize an optimization problem, where :

- the cost function is the wave-based function,
- the input parameter is the shape of the seabed: at each time, the seabed takes the optimal shape, i.e. the one that minimizes the cost function.

MORPHODYNAMICS BASED ON WAVE ENERGY MINIMIZATION

What cost function to choose?

- The minimization of the cost function is considered the driving force behind coastal morphodynamics.
- The choice is important but debatable: it depends on what we consider to be a driving force.
- The cost function should depend on the waves so as to incorporate the undeniable coupling between hydrodynamics and morphodynamics.

➔ We have chosen the energy of shoaling waves:

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}]$$

water density $[kg.m^{-3}]$ gravitational acceleration $[m.s^{-2}]$ wave height $[m]$ domain over which the waves shoal

How to find the optimal seabed shape?

The seabed, in an attempt to minimize the cost function, verifies the following dynamics:

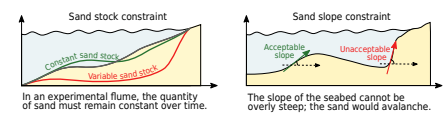
$$\begin{cases} \psi_t = -\rho \Delta \bar{d} \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases}$$

evolution of the seabed intrinsic sand mobility influence of water depth direction of descent: the direction the seabed takes so as to minimize the cost function initial seabed

- A natural choice of \bar{d} would be $\bar{d} = \nabla \psi$, because $\nabla \psi$ indicates a minimum of J with regards to ψ .
- Constraints modify the direction of descent \bar{d} .

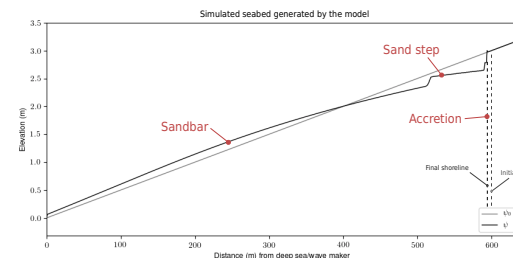
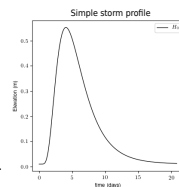
Do we need constraints?

- Constraints add more physics to the model.
- They allow us to include processes that aren't driving forces behind coastal morphodynamics but play an important role.
- Two constraints have been included for more realistic results:



RESULTS

- We apply the model to a linear seabed.
- We force the system using a simple storm profile.
- We use a basic hydrodynamic model, based on linear wave theory to calculate the height of the waves H mentioned in the definition of J .



Three natural phenomena are observed.

- The formation of a sandbar.
 - The formation of a sand step.
 - Accretion at the shoreline with a small berm.
- ➔ This morphodynamic model based on wave energy minimization shows potential.

CONCLUSION

Optimal control is already a valuable tool in coastal engineering, with the design of ports (Isebe, Azerad, Mohammadi & Bouchette, 2008) and defense structures (Isebe, Azerad, Mohammadi & Bouchette, 2008), (Bouharguane, Azerad, Bouchette, Marche & Mohammadi, 2010).

Can it also be used to model sandy beach dynamics?
Applying this theory to a simple case study shows that the model generates coastal phenomena observed in situ. We can conclude that this new morphodynamic model based on wave energy minimization shows potential. Future improvements include the choice of the cost function, the incorporation of additional constraints and the adoption of a more complex hydrodynamic model.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank GLADYS for providing experimental data as well as their general support. We would also like to thank BRLI for funding M. Cook's PhD.

REFERENCES

- Bouharguane, A., Azerad, P., Bouchette, F., Marche, F., & Mohammadi, B. (2010,06). Low complexity shape optimization and a posteriori high fidelity validation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-series S - DISCRETE CONTIN DYN SYS-SER S*, 13. doi: 10.3934/dcdss.2010.13.759
- Isebe, D., Azerad, P., Bouchette, F., Ivorra, B., & Mohammadi, B. (2008). Shape optimization of geotextile tubes for sandy beach protection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(8), 1262-1277. doi:10.1002/nme.2209
- Isebe, D., Azerad, P., Mohammadi, B., & Bouchette, F. (2008). Optimal shape design of defense structures for minimizing short wave impact. *Coastal Engineering*, 55(1), 35-46. doi: 10.1016/j.coasteng.2007.06.006
- Mohammadi, B., & Bouchette, F. (2014, 01). Extreme scenarios for the evolution of a soft bed interacting with a fluid using the value at risk of the bed characteristics. *Computers and Fluids*, 89, 7887. doi: 10.1016/j.compfluid.2013.10.021
- Mohammadi, B., & Bouharguane, A. (2011, 01). Optimal dynamics of soft shapes in shallow waters. *Computers and Fluids*, 40, 291-298. doi: 10.1016/j.compfluid.2010.09.031

4 Présentations

4.1 2022: Journée des doctorants 2022 - Geosciences Montpellier



Couplage vagues-morphodynamique du littoral par principe de minimisation

R. Dupont ^{1, 2, 3}

1 GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, ronan.dupont@umontpellier.fr

2 IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France

3 GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



I) Introduction

- ▶ Nouveau modèle morphodynamique du littoral basé sur la minimisation de l'énergie sous contrainte: **premier modèle** à création de barre sédimentaire.
- ▶ Application à des cas réelles en «Multi-1D».
- ▶ Modèle rapide, robuste qui converge très vite par rapport aux autres modèles.



2

II) Présentation du modèle OptiMorph

1) Modèle numérique

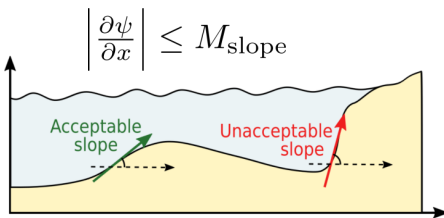
► Governing equation

$$\begin{cases} \psi(t=0) = \psi_0 \\ \psi_t = \Upsilon \Lambda d \end{cases}$$

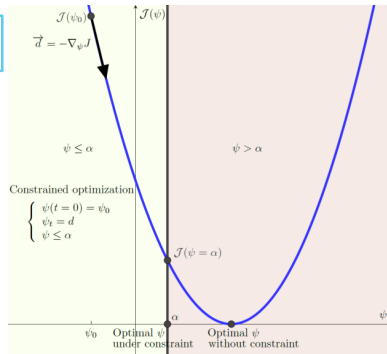
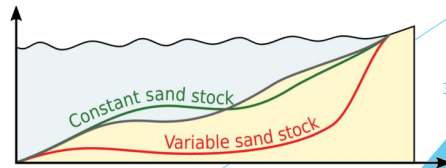
► Cost-function

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}]$$

► Constraints



$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T]$$



ψ_t : evolution of the seabed over time [$m.s^{-1}$]

Υ : abrasion of sand [$m.s. kg^{-1}$]

Λ : excitation of the seabed by the water waves

ψ_0 : initial seabed elevation [m]

$d = -\nabla_{\psi} J$ + constraints : the decent direction [$J.m^{-2}$]

Ω_S : shoaling zone [m]

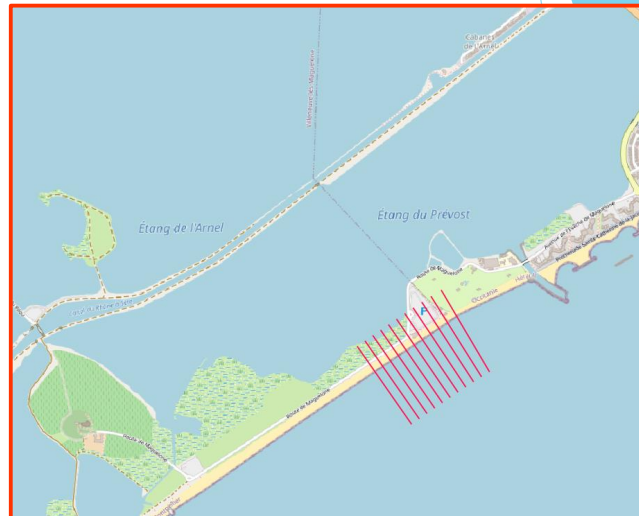
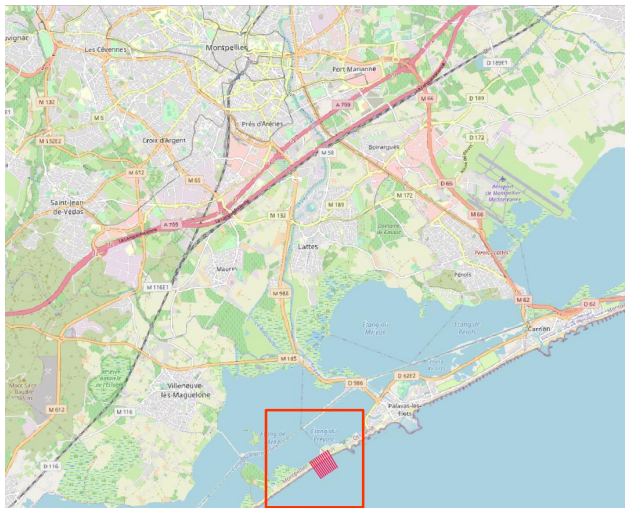
ρ_w : water density [$kg.m^{-3}$]

g : gravitational acceleration [$m.s^{-2}$]

H : significant wave height [m]

III) Applications à un cas Multi-1D

1) Localisation du Golfe d'Aigues-Mortes



Géographie de la simulation sur le Golfe d'Aigues-Mortes

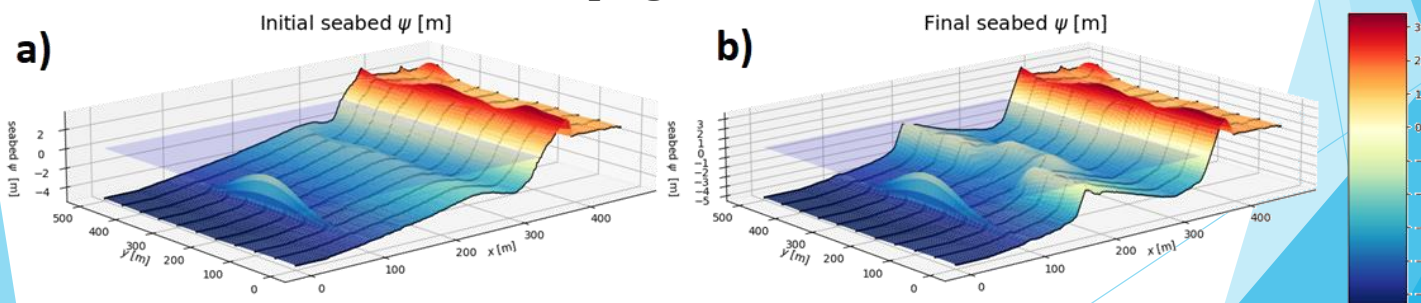
III) Applications à un cas Multi-1D

2) Simulation numérique

- ▶ Simulation d'une tempête de plusieurs jours
- ▶ Ajout d'une structure de protection géotube en forme de gaussienne
- ▶ Calculs parallélisés sur 10 transects représentés en noirs
- ▶ Réduction de l'érosion de la plage



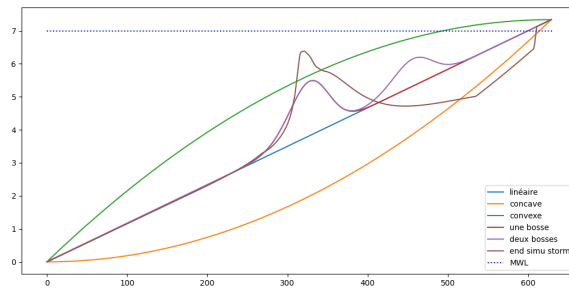
Géotube: tube en géotextile
<https://www.archiexpo.fr>



a) Bathymétrie initiale sur le Golfe d'Aigues-Mortes en ajoutant un géotube en forme de gaussienne avec une hauteur maximale de 3m. b) Bathymétrie finale après simulation d'une tempête de plusieurs jours.

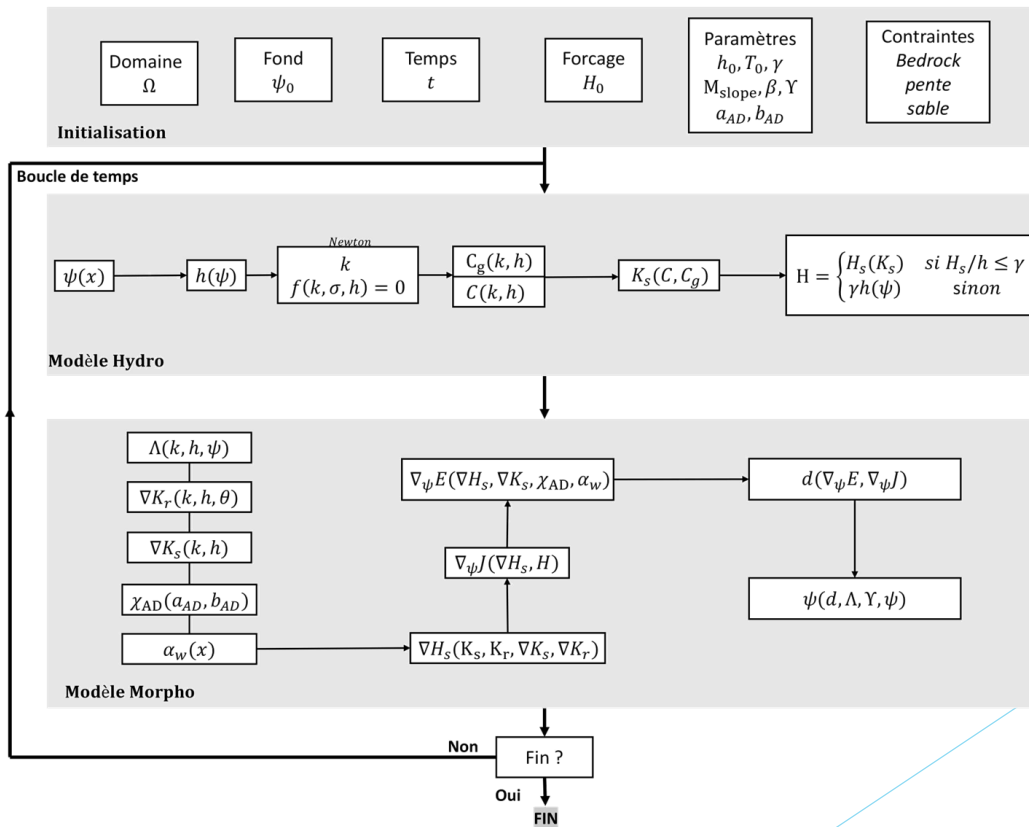
VI) Perspectives

- ▶ Implémentation d'un nouveau modèle hydrodynamique couvrant un plus grand nombre de cas d'utilisation
- ▶ Validation du nouveau modèle hydrodynamique
- ▶ Validation du modèle morphodynamique pour différents types de simulation : 2D, 1D, acretion, ...
- ▶ Développement théorique d'une manière de penser la mécanique analytique à travers un problème optimal général



Différents types de bathymétries à tester

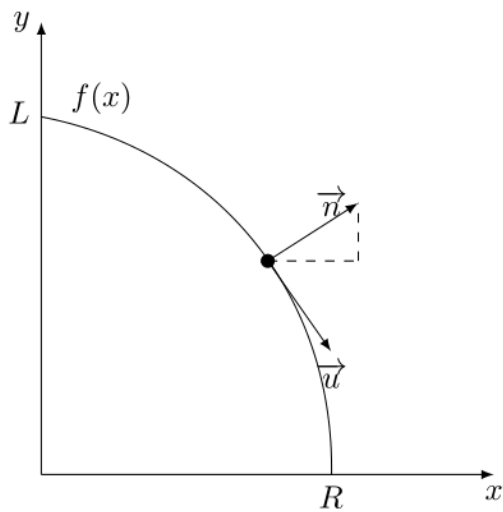
Appendix



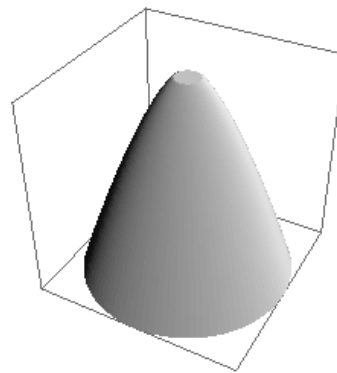
7

IV) Justification: choice of the cost-function by the Newton's Minimal Resistance Problem

Minimize $F(x, y, y') = \int_0^R \frac{x}{1+y'^2} dx$



Parametrisation

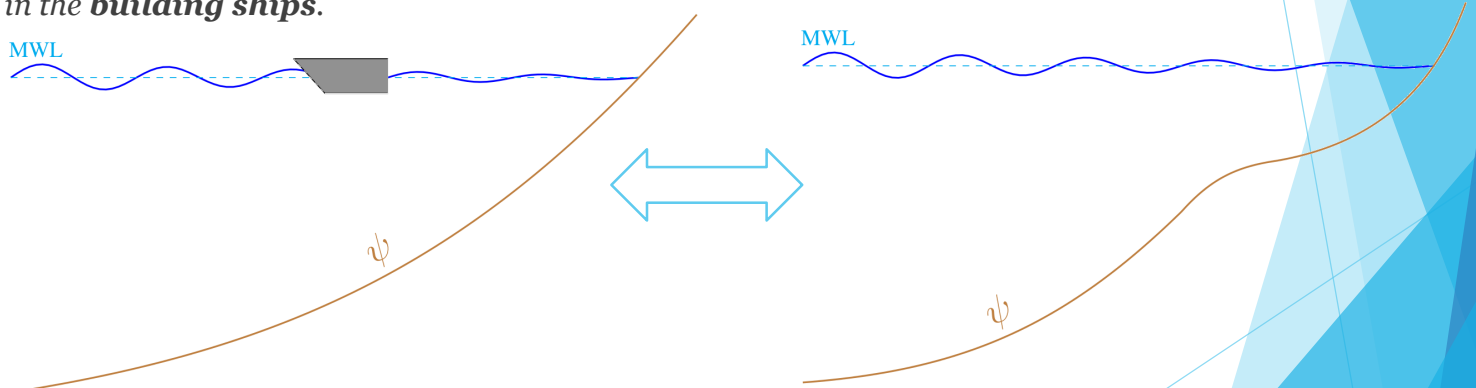


Optimal configuration

8

IV) Justification: choice of the cost-function by the Newton's Minimal Resistance Problem

*If in a rare medium, consisting of equal particles freely disposed at equal distances from each other, a globe and a cylinder described on equal diameter move with equal velocities in the direction of the axis of the cylinder, (then) the **resistance** of the globe will be half as great as that of the cylinder I reckon that this proposition will be not without application in the **building ships**.*



Minimizing resistance on the boat (wave, friction)
⇔ minimizing the resistance of seabed

4.2 2021: Gladys Workshop



Wave-morphodynamic coupling of the coastline by minimization principle

R. Dupont ^{1,3} **F. Bouchette** ^{1,3} **B. Mohammadi** ^{2,3}

¹ GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, ronan.dupont@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr

² IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr

³ GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Contents

- ▶ I) Introduction
- ▶ II) Presentation of the initial model
- ▶ III) Objectives
- ▶ IV) Example: trying to improve the model by choosing a cost-function
- ▶ V) Improvement of the governing equation with time ratio
- ▶ VI) Perspectives

2

I) Introduction

- ▶ New coastal dynamics morphodynamic model based on constrained energy minimization.
- ▶ New justification of the cost-function choice
- ▶ Model fast, robust that converges really quickly compared to other models



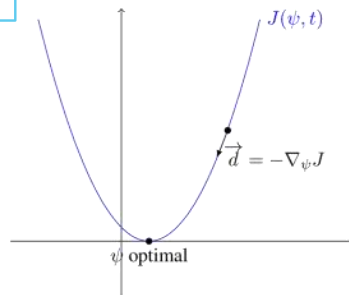
3

II) Presentation of the initial model

1) Numerical model

► Governing equation

$$\begin{cases} \psi(t=0) = \psi_0 \\ \psi_t = -\Upsilon \Lambda d \end{cases}$$



ψ_t : evolution of the seabed over time [$m.s^{-1}$]

Υ : abrasion of sand [$m.s. kg^{-1}$]

Λ : excitation of the seabed by the water waves

ψ_0 : initial seabed elevation [m]

$d = -\nabla_{\psi} J + \text{constraints}$: the decent direction [$J.m^{-2}$]

► Cost-function

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_S} \rho_w g H^2(\psi, x, t) dx \quad [J.m^{-1}]$$

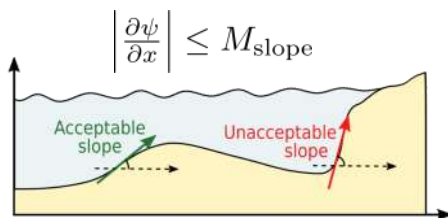
Ω_S : shoaling zone [m]

ρ_w : water density [$kg.m^{-3}$]

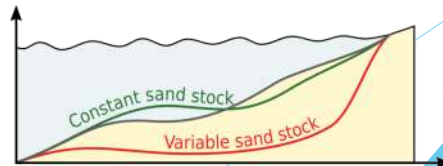
g : gravitational acceleration [$m.s^{-2}$]

H : significant wave height [m]

► Constraints



$$\int_{\Omega} \psi(t, x) dx = \int_{\Omega} \psi_0(x) dx \quad \forall t \in [0, T]$$

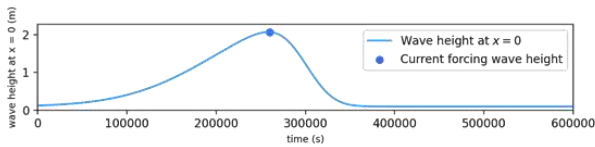


II) Presentation of the initial model

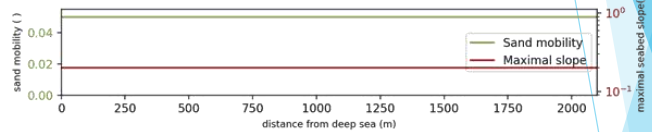
2) Example of simulation with a storm of a few days

Simulation of short storm with bathy linéaire and CFO
FLUME CONFIGURATION
 $t = 2.60e + 05$ (iteration 650/1499)

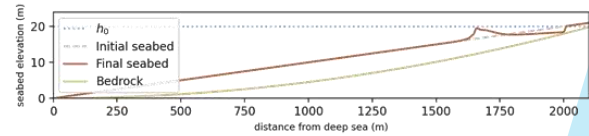
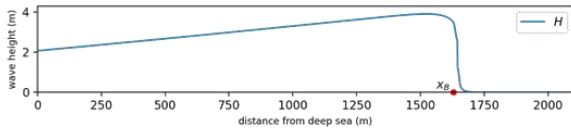
Forcing



Constraints

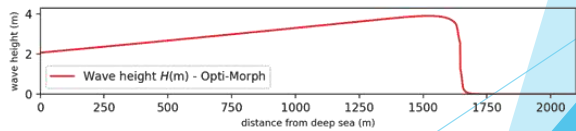
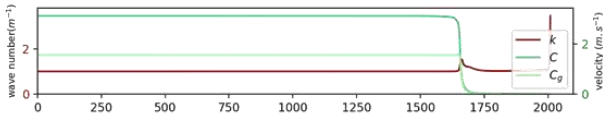


Wave-hight



ψ : seabed

Velocity



Wave-hight

III) Improvement axes with the latest model and objectives

- ▶ Try to find a better physics to obtain more realistic results (location of the sand bar,...)
- ▶ Make the code more robust
- ▶ Implement new axes on the code (multi-1D, generalization of hydro models,...)
- ▶ Justification of the choice of the cost-function
- ▶ Validation of a large number of test cases with experimental data
- ▶ Theoretical development of a way of thinking about analytical mechanics through a general optimal problem

6



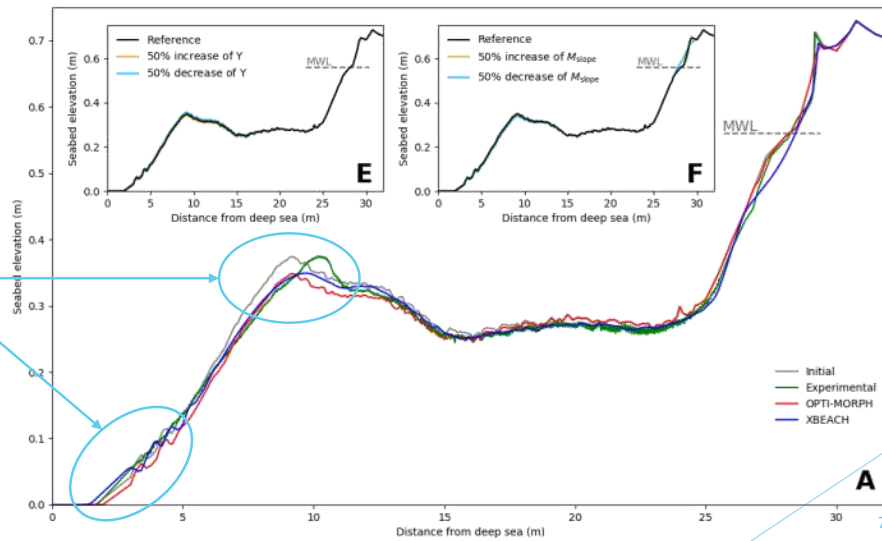
UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



III) Example: trying to improve the model by choosing a cost-function

- Try to find a better physics to obtain more realistic results (location of the sand bar,...)

Some differences at the sand-bar and upstream of the simulation



Megan flume simulation: Copter

IV) Example: trying to improve the model by choosing a cost-function

- ▶ Cost-function with kinetic energy: $J = \int_{\Omega_b} E_h + \varepsilon E_c$
- ▶ Cost-function with velocity $J = \frac{1}{8} \rho g \int_{\Omega_b} C_g H^2$
- ▶ Cost-function with radiation stress S_{xx}
- ▶ Other cost-function ...
- ▶ Extension: A transport term in the descent equation

$$\begin{cases} \psi(t=0) = \psi_0 \\ \psi_t + \underbrace{\varepsilon \rho V \psi_x}_{\text{transport term}} = -\Upsilon \Lambda d \end{cases}$$

8

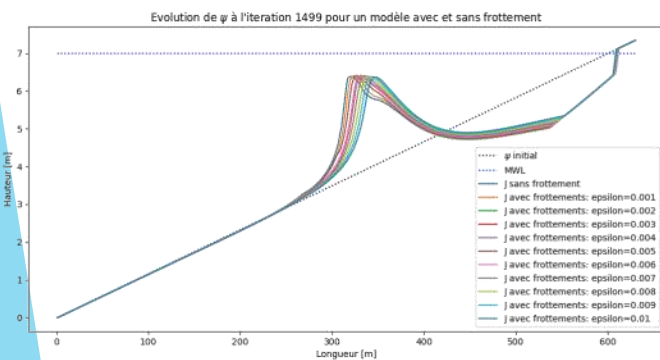
IV) Example: trying to improve the model by choosing a cost-function

- Cost-function with kinetic energy: $J = \int_{\Omega_b} E_h + E_c$

Sand bar position moved ?

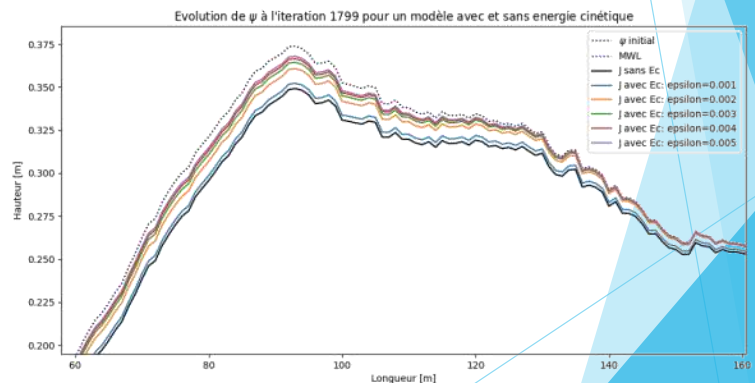


Position of the bar has not moved according to x



End of the storm simulation

$$T_0 = 2 \text{ s}, H_{\max} = 2 \text{ m}, T_f = 7 \text{ j}$$



End of the Copter simulation 9

V) Improvement of the governing equation

1) Adding a time factor

► Initial model

$$\begin{cases} \psi(t=0) = \psi_0 \\ \psi_t = -\Upsilon \Lambda d \end{cases} \quad \psi^{n+1} = \psi^n - \Upsilon \Lambda d^n$$

► Model with time factor

$$\psi^{n+1} = \psi^n - dt \Upsilon \Lambda d^n$$

ψ_t : evolution of the seabed over time [$m.s^{-1}$]

Υ : abrasion of sand [$m.s. \text{ kg}^{-1}/m. \text{ kg}^{-1}$]

Λ : excitation of the seabed by the water waves

ψ_0 : initial seabed elevation [m]

$d = -\nabla_{\psi} J + \text{constraints}$: the decent direction [$J.m^{-2}$]

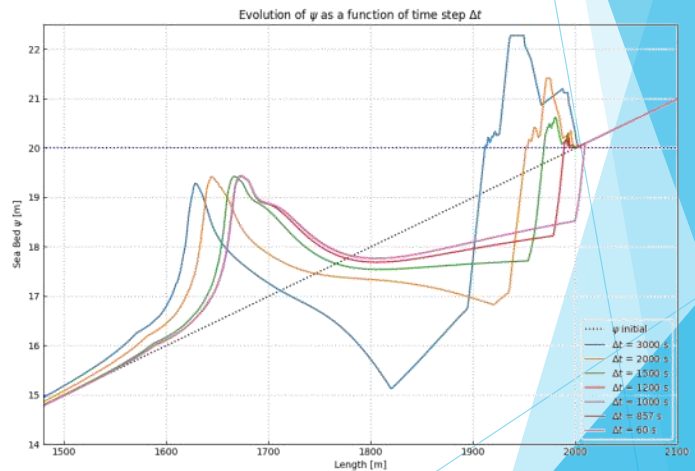
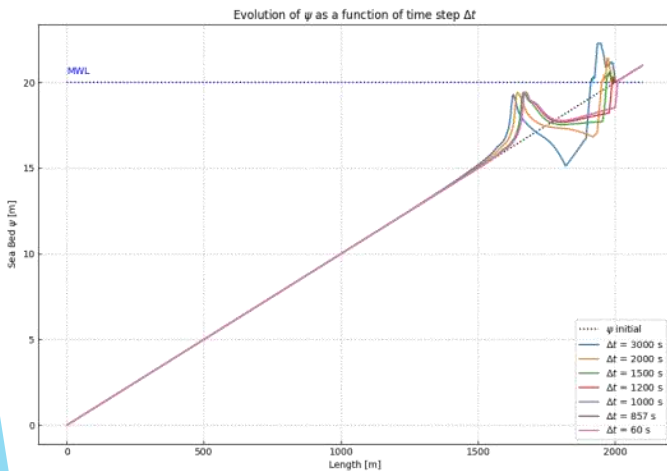
dt : time step [s]

10

V) Improvement of the governing equation

2) Time step convergence

Convergence at $\Delta t < 1000$ s



Strom simulation with different time step

$$T_0 = 2 \text{ s}, H_{\max} = 4 \text{ m}, T_f = 7 \text{ j}$$

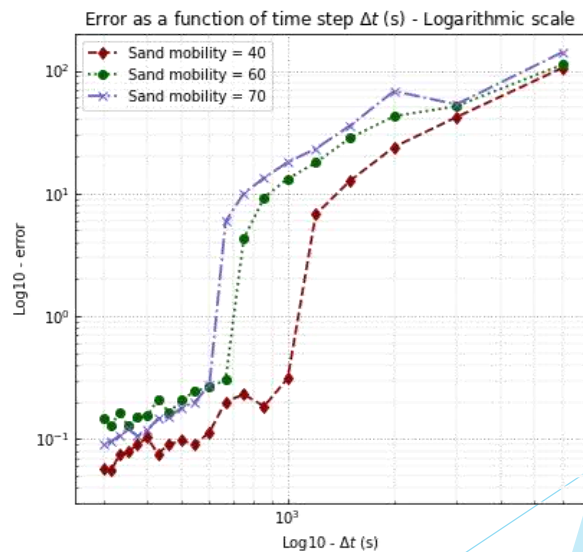
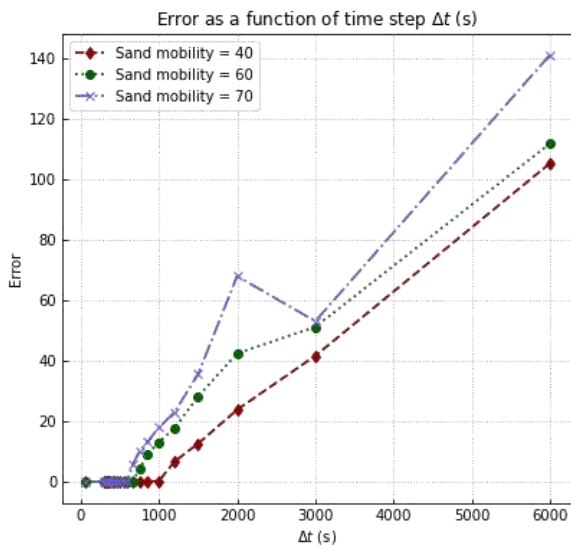
11

V) Improvement of the governing equation

2) Time step convergence for different sand mobility

$$error = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\psi_i^{ref} - \psi_i)^2}$$

$\Delta t_{ref} = 60$ s correspond to 10 000 itérations



Convergence at $\Delta t < [500, 1000]$ s

12

V) Improvement of the governing equation

3) Discussion

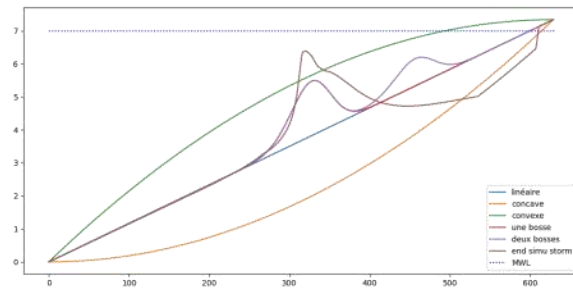
Model	Convergence time-step Δt
Toufan (OptiMorph)	$\Delta t < [500, 1000] \text{ s}$
XBeach ?	$\Delta t < [0.1, 1] \text{ s}$
Saint-Venant	$\Delta t < 0.2 \text{ s}$

- ▶ Seems to be very advantageous in terms of physical complexity
- ▶ Need more realistic simulations to conclude (here, time period $T_0 = 2 \text{ s}$)
- ▶ Need to do more morphogenic simulations
- ▶ Other simulation

13

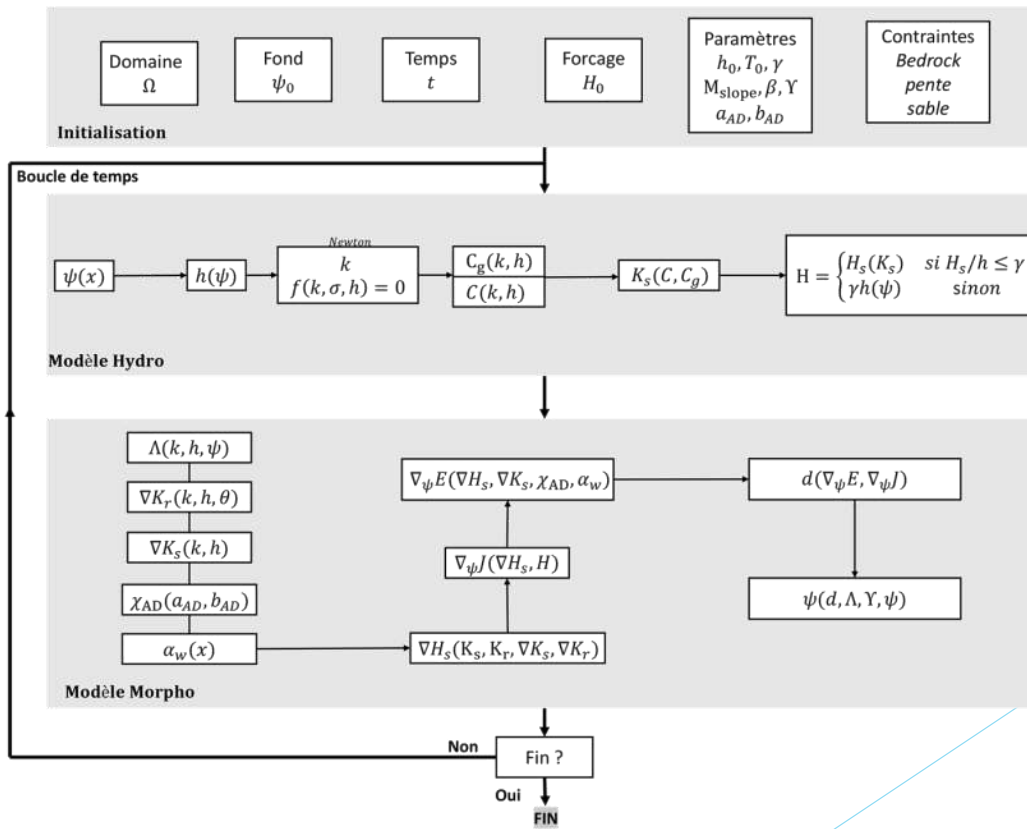
VI) Perspectives

- ▶ Sanity-check of the code to have realistic simulations (working with every time periods T_0)
- ▶ Create a database of realistic simulations
- ▶ Implement the multi-1D
- ▶ Validation of different type of simulation: 2D, 1D, accretion, ...
- ▶ Theoretical development of a way of thinking about analytical mechanics through a general optimal problem



14

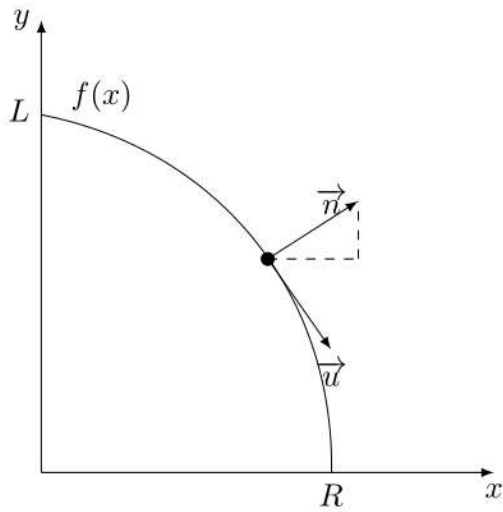
Appendix



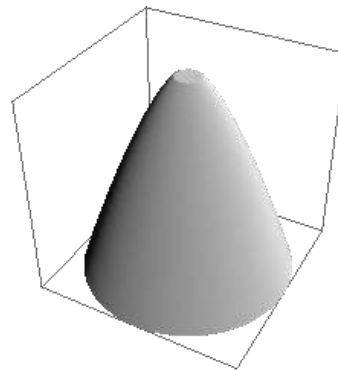
15

IV) Justification: choice of the cost-function by the Newton's Minimal Resistance Problem

Minimize $F(x, y, y') = \int_0^R \frac{x}{1+y'^2} dx$



Parametrisation

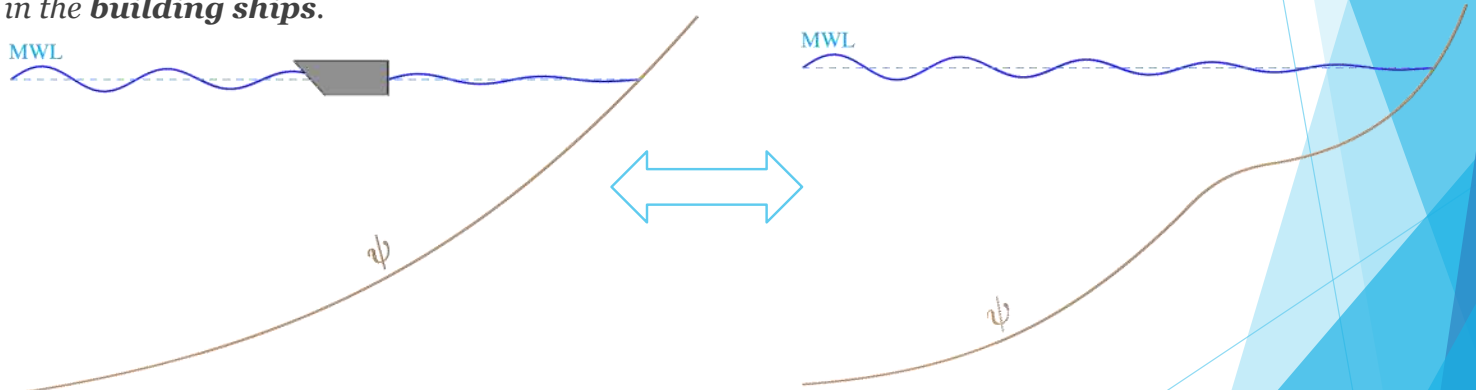


Optimal configuration

17

IV) Justification: choice of the cost-function by the Newton's Minimal Resistance Problem

*If in a rare medium, consisting of equal particles freely disposed at equal distances from each other, a globe and a cylinder described on equal diameter move with equal velocities in the direction of the axis of the cylinder, (then) the **resistance** of the globe will be half as great as that of the cylinder I reckon that this proposition will be not without application in the **building ships**.*



Minimizing resistance on the boat (wave, friction)
⇔ minimizing the resistance of seabed

18

4.3 2021: Journée des doctorants - Geosciences Montpellier



OPTIMIZATION THEORY APPLIED TO THE MODELING OF SANDY BEACH DYNAMICS

WITH FRÉDÉRIC BOUCHETTE, BIJAN MOHAMMADI, AND NICOLAS FRAYSSE

MEGAN COOK

megan.cook@umontpellier.fr, megancook.fr

Géosciences, University of Montpellier – BRLi, Nîmes, France

PhD student day 2021, Géosciences Montpellier – 4th June 2021



Biodiversité
Agriculture
Alimentation
Environnement
Terre
Eau



UNIVERSITÉ DE
MONTPELLIER



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Motivation
●

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○

MOTIVATION

Understanding **coastal dynamics** (beach, cliffs, harbors, ...) is of great importance:



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



MOTIVATION

Understanding **coastal dynamics** (beach, cliffs, harbors, ...) is of great importance:



Protection of beach users

MOTIVATION

Understanding **coastal dynamics** (beach, cliffs, harbors, ...) is of great importance:



Protection of beach users



Study of the risks of coastal flooding

Motivation

Settings

Opti-Morph

Results

Conclusion

MOTIVATION

Understanding **coastal dynamics** (beach, cliffs, harbors, ...) is of great importance:



Protection of beach users



Study of the risks of coastal flooding



Monitoring of coastal erosion



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Motivation
●

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○

MOTIVATION

Understanding **coastal dynamics** (beach, cliffs, harbors, ...) is of great importance:



Protection of beach users



Study of the risks of coastal flooding



Monitoring of coastal erosion



Development of coastal protection structures

Motivation
○

Settings
●

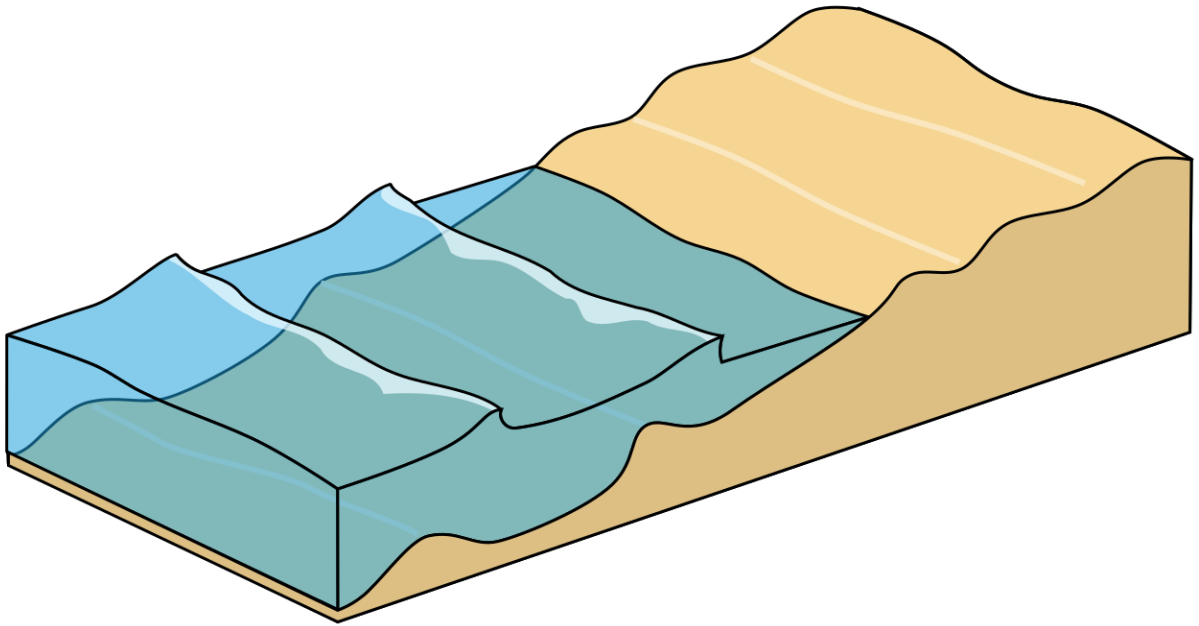
Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○

SETTINGS

Morphodynamic models are used to predict the movement of the sand at the coast.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Motivation
○

Settings
●

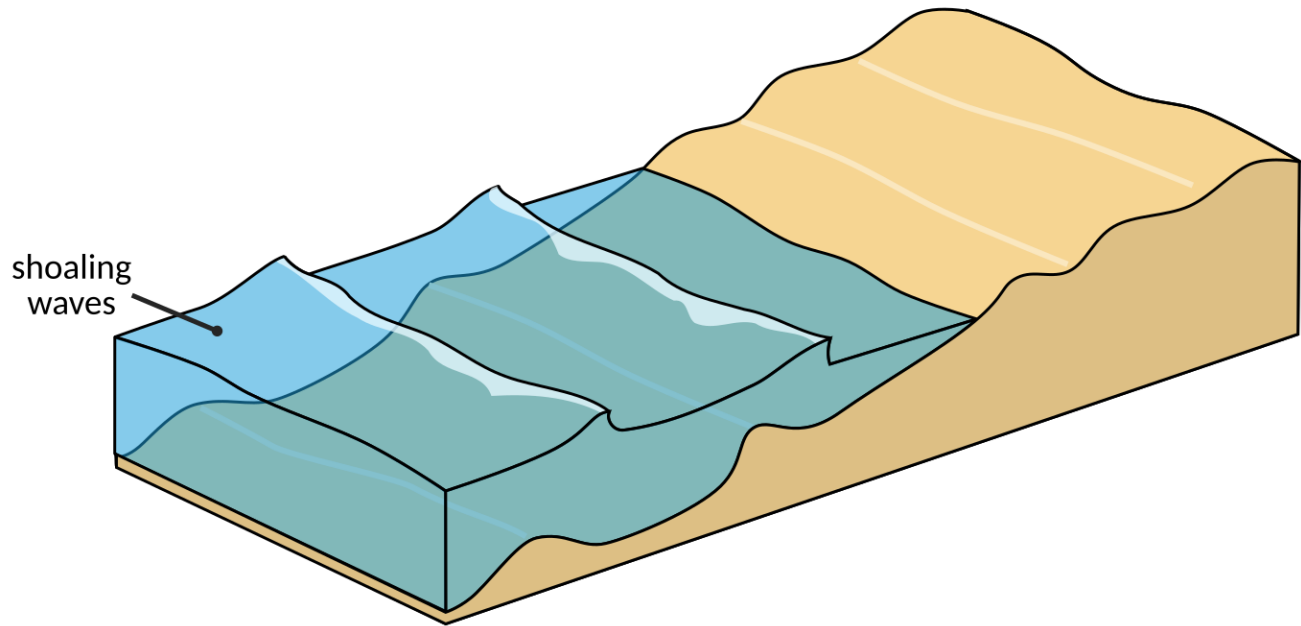
Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○

SETTINGS

Morphodynamic models are used to predict the movement of the sand at the coast.



Motivation
○

Settings
●

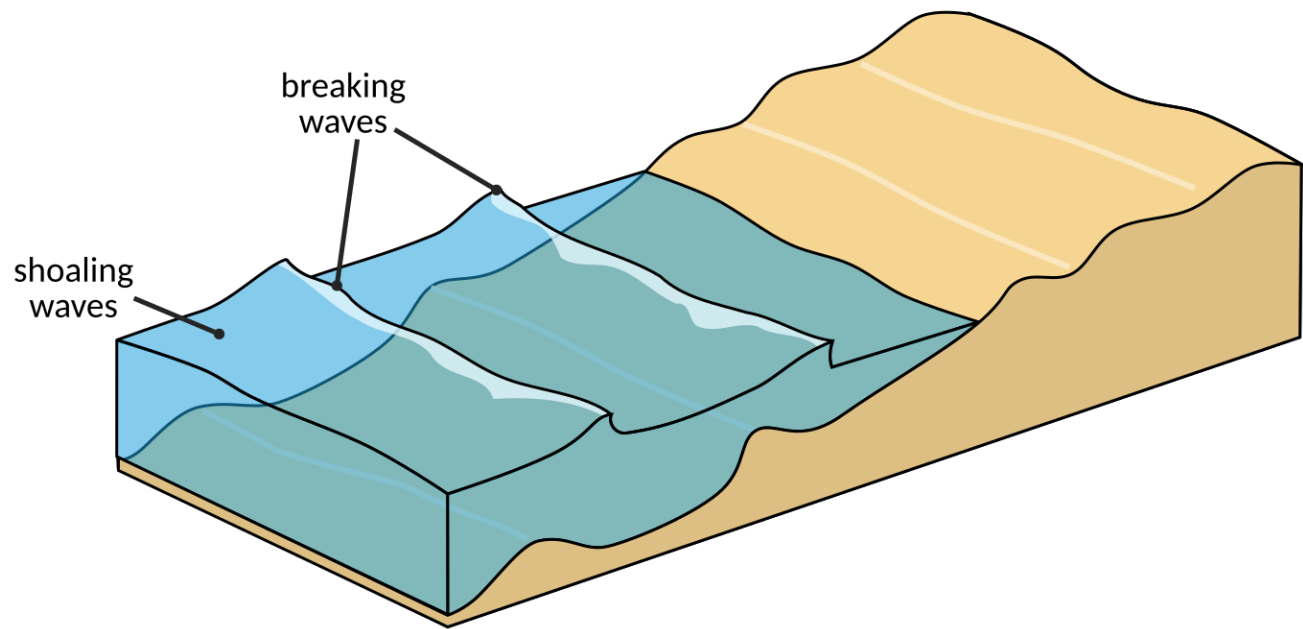
Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○

SETTINGS

Morphodynamic models are used to predict the movement of the sand at the coast.



Motivation
○

Settings
●

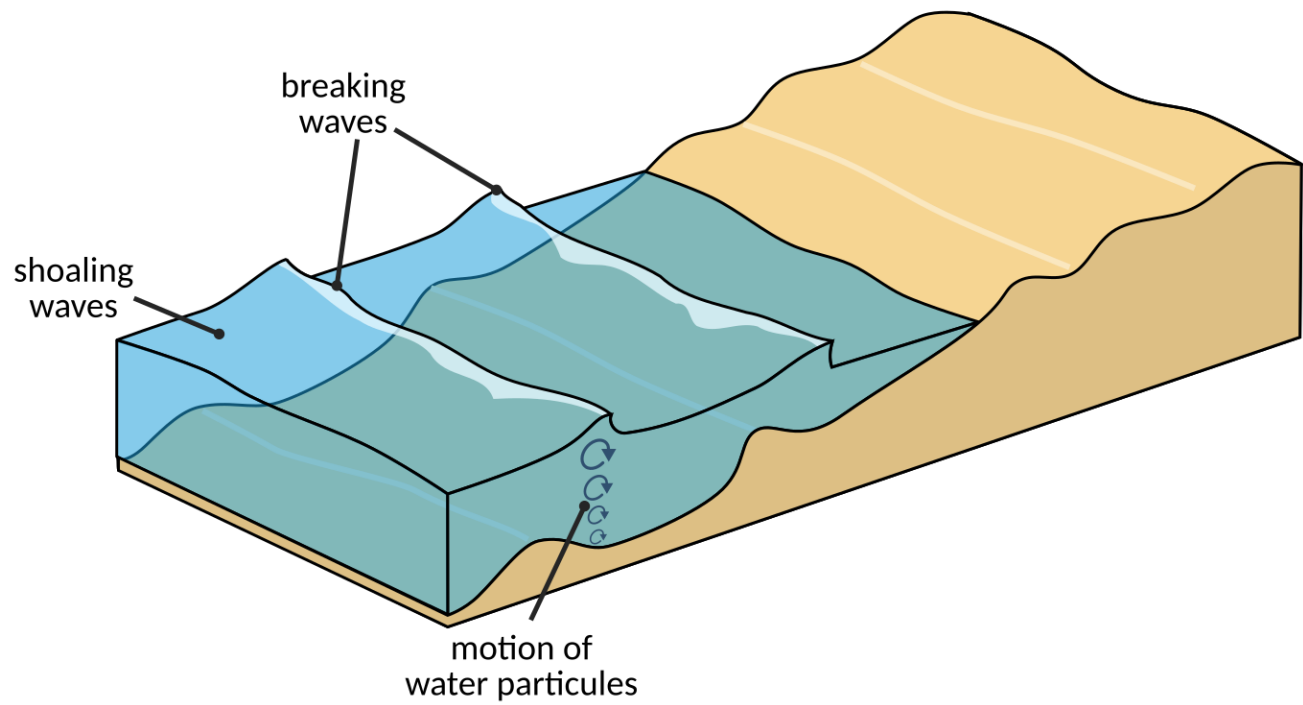
Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○

SETTINGS

Morphodynamic models are used to predict the movement of the sand at the coast.



Motivation
○

Settings
●

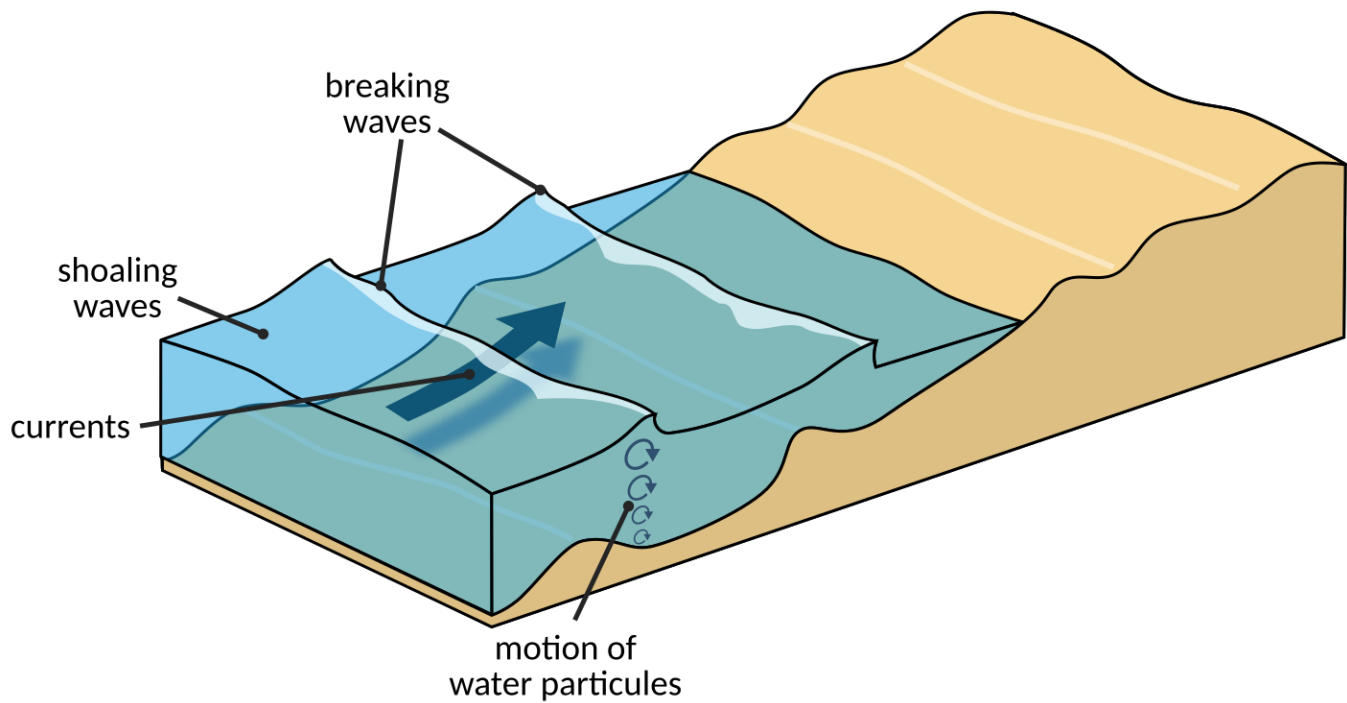
Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○

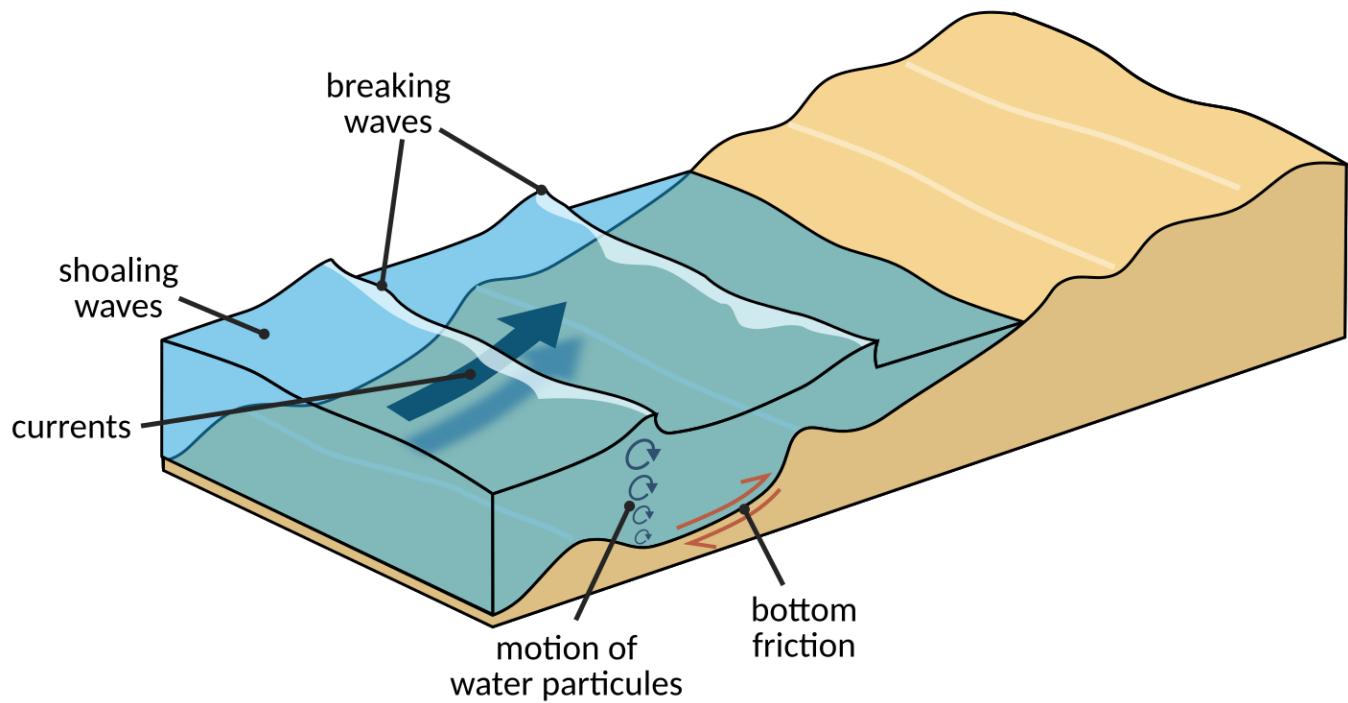
SETTINGS

Morphodynamic models are used to predict the movement of the sand at the coast.



SETTINGS

Morphodynamic models are used to predict the movement of the sand at the coast.



Motivation
○

Settings
●

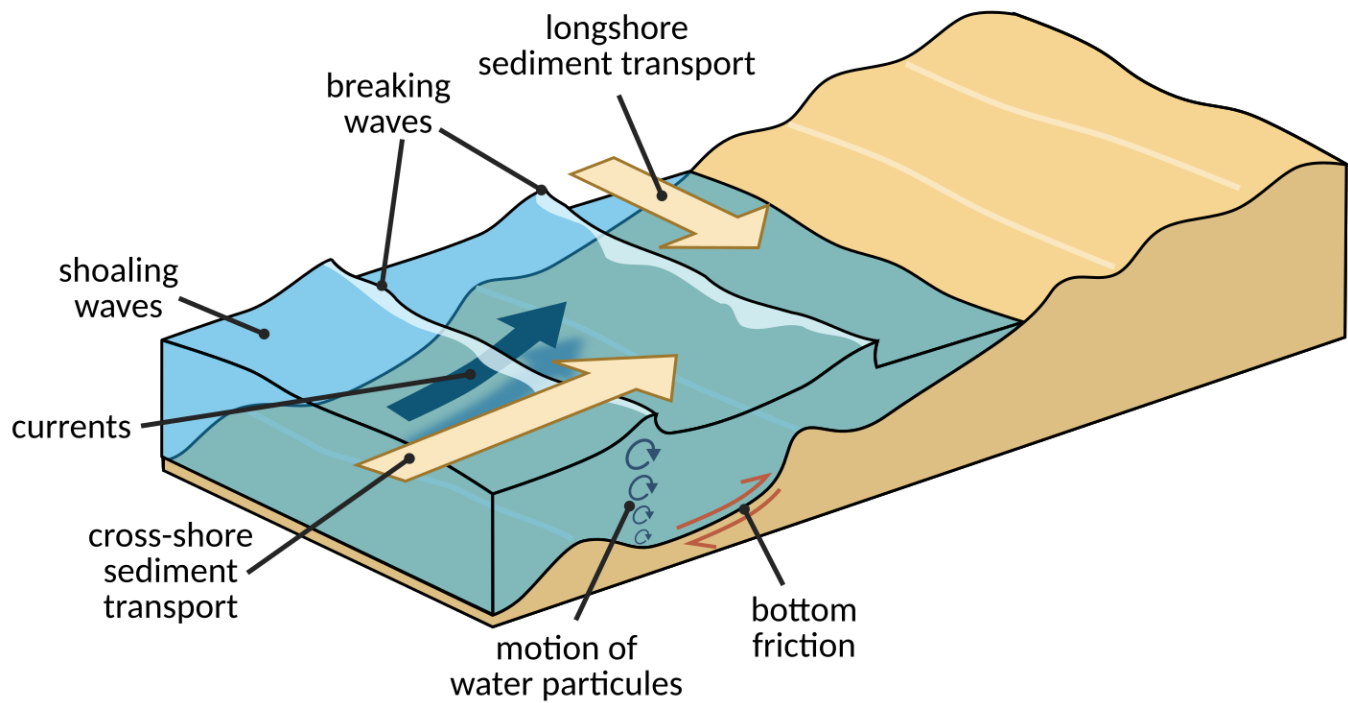
Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○

SETTINGS

Morphodynamic models are used to predict the movement of the sand at the coast.



Motivation
○

Settings
●

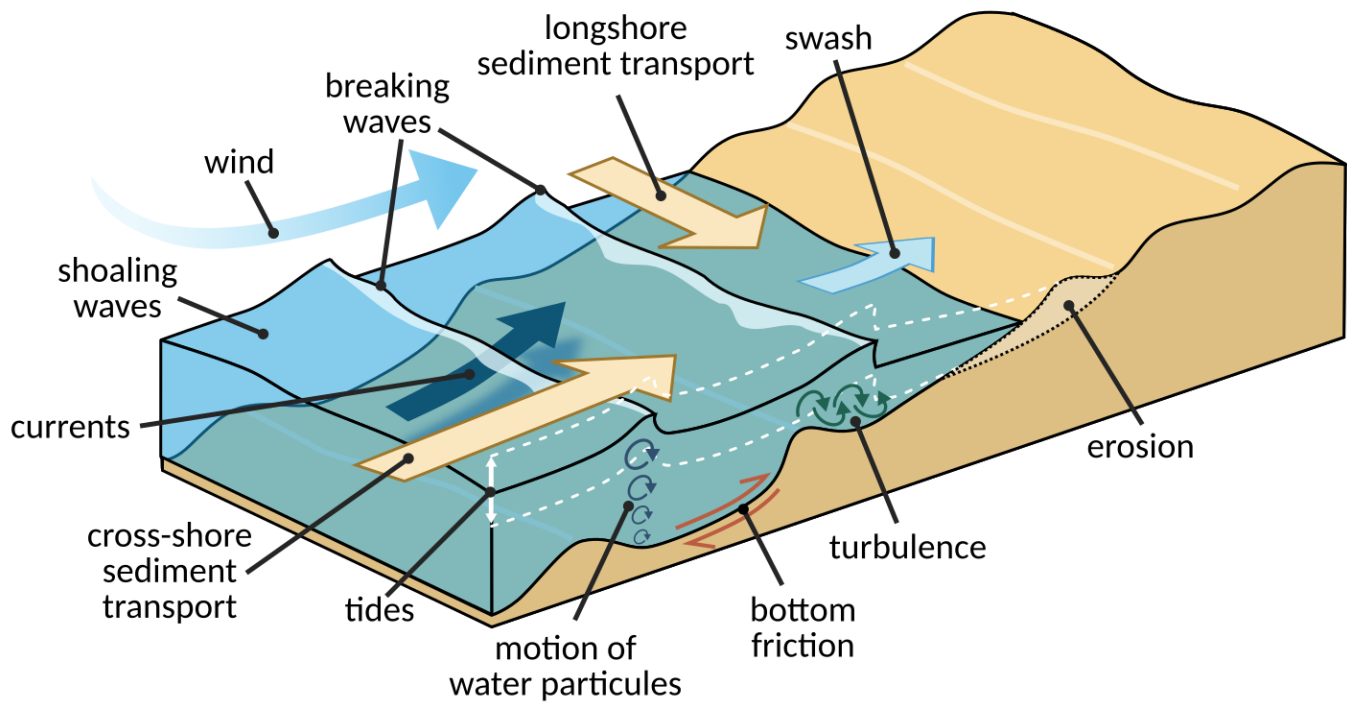
Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○

SETTINGS

Morphodynamic models are used to predict the movement of the sand at the coast.



Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
●

Results
○○

Conclusion
○○

OPTI-MORPH

Opti-Morph is a new hydro-morphodynamic model for coastal dynamics.

Features:

- Unique in its kind.
- Based on natural optimization theory.
- Fast, robust and low complexity.

Fundamental assumption:

The shape of the seabed evolves over time in an effort to **minimize** the energy of the surface waves.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
●

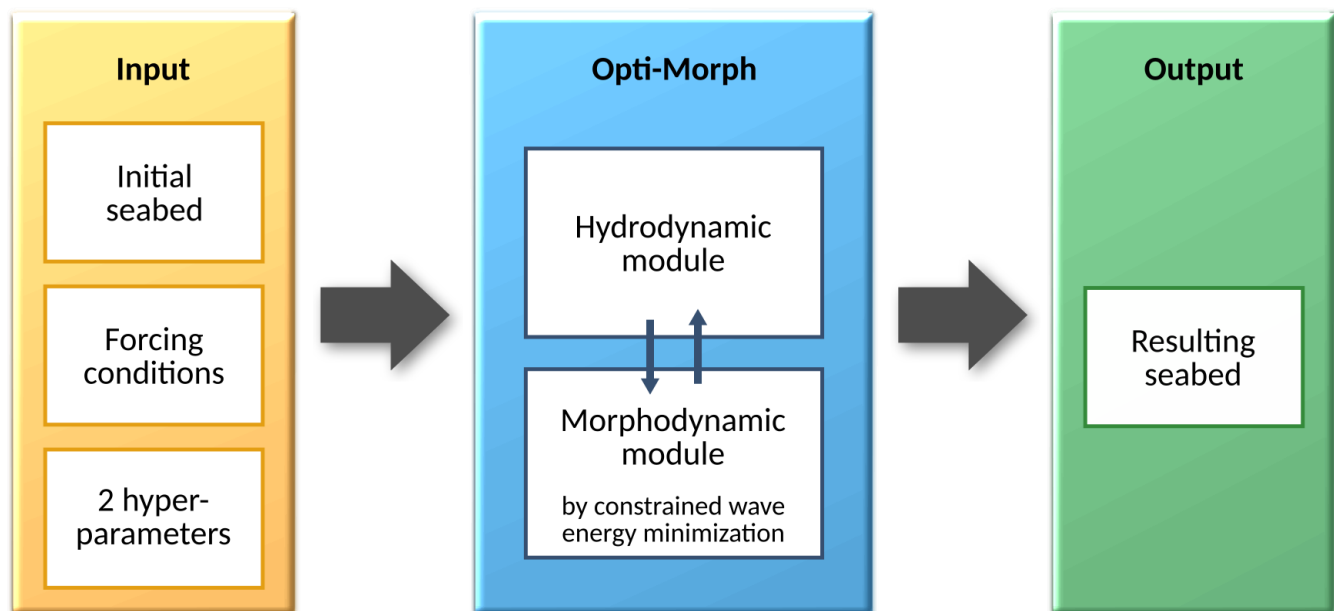
Results
○○

Conclusion
○○

OPTI-MORPH

Opti-Morph is a new hydro-morphodynamic model for coastal dynamics.

Characteristics:



Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
●○

Conclusion
○○

RESULTS: SHORT TERM SIMULATIONS

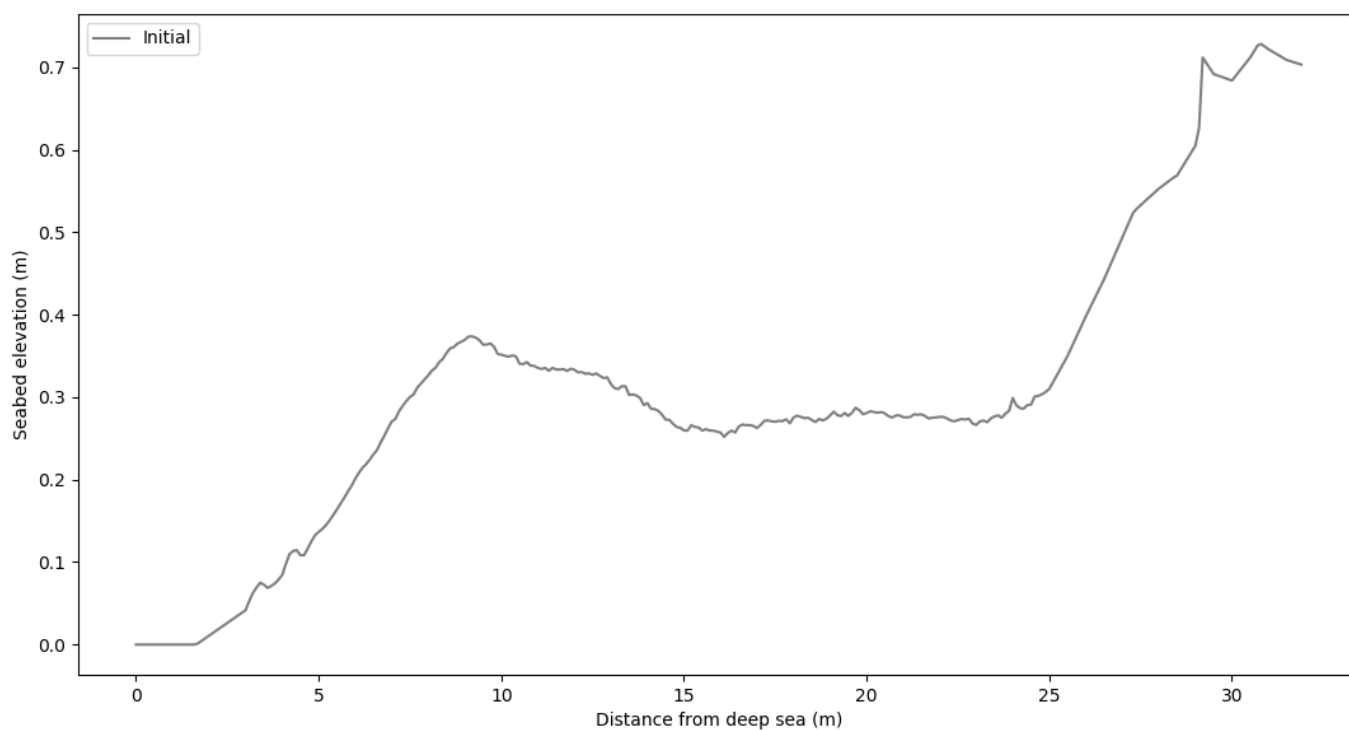


Figure: Numerical and experimental results of flume configuration.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



RESULTS: SHORT TERM SIMULATIONS

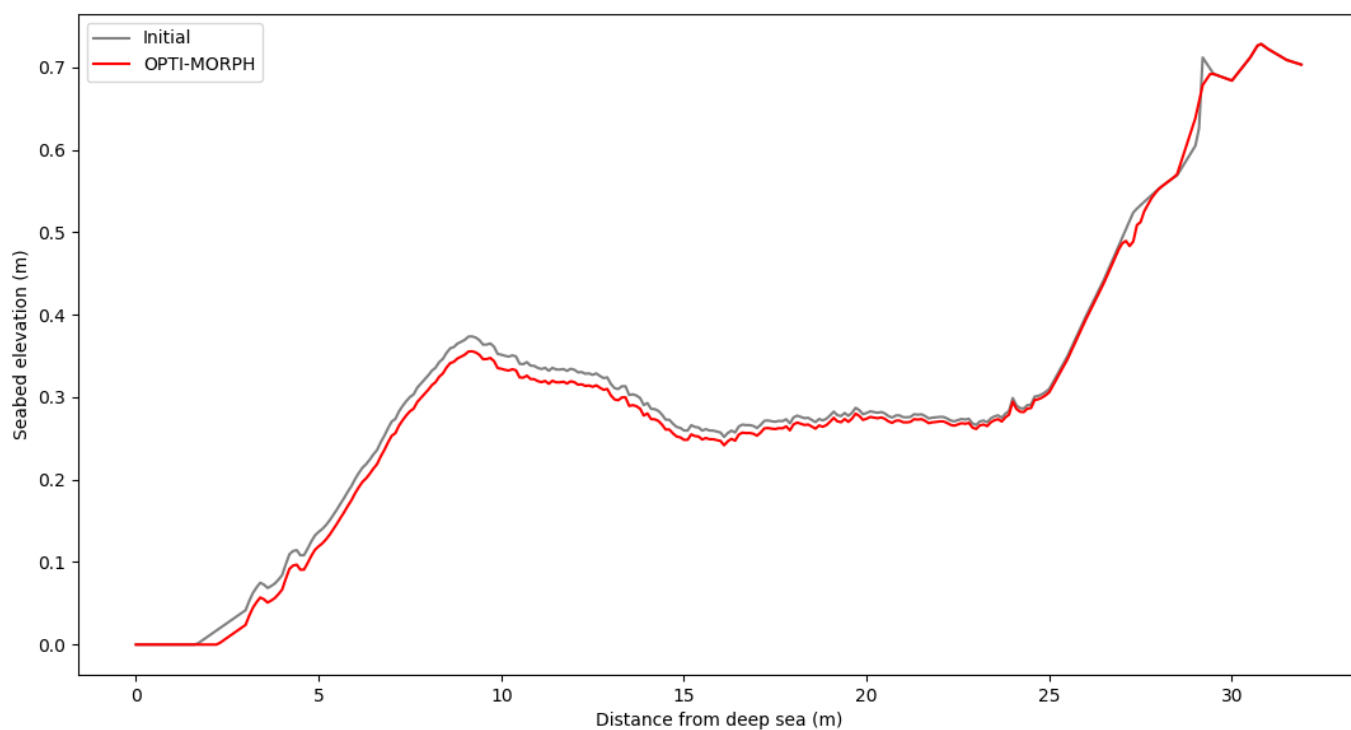


Figure: Numerical and experimental results of flume configuration.

Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
●○

Conclusion
○○

RESULTS: SHORT TERM SIMULATIONS

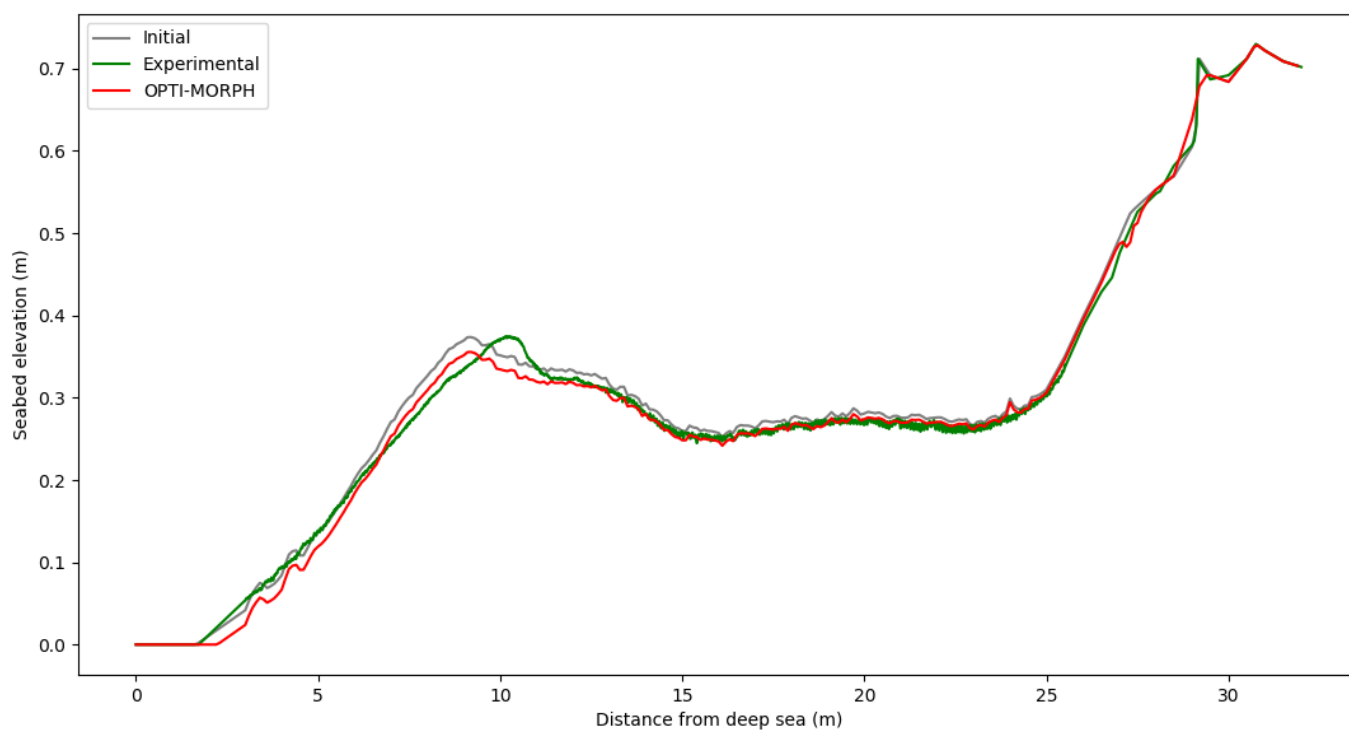


Figure: Numerical and experimental results of flume configuration.

Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
●○

Conclusion
○○

RESULTS: SHORT TERM SIMULATIONS

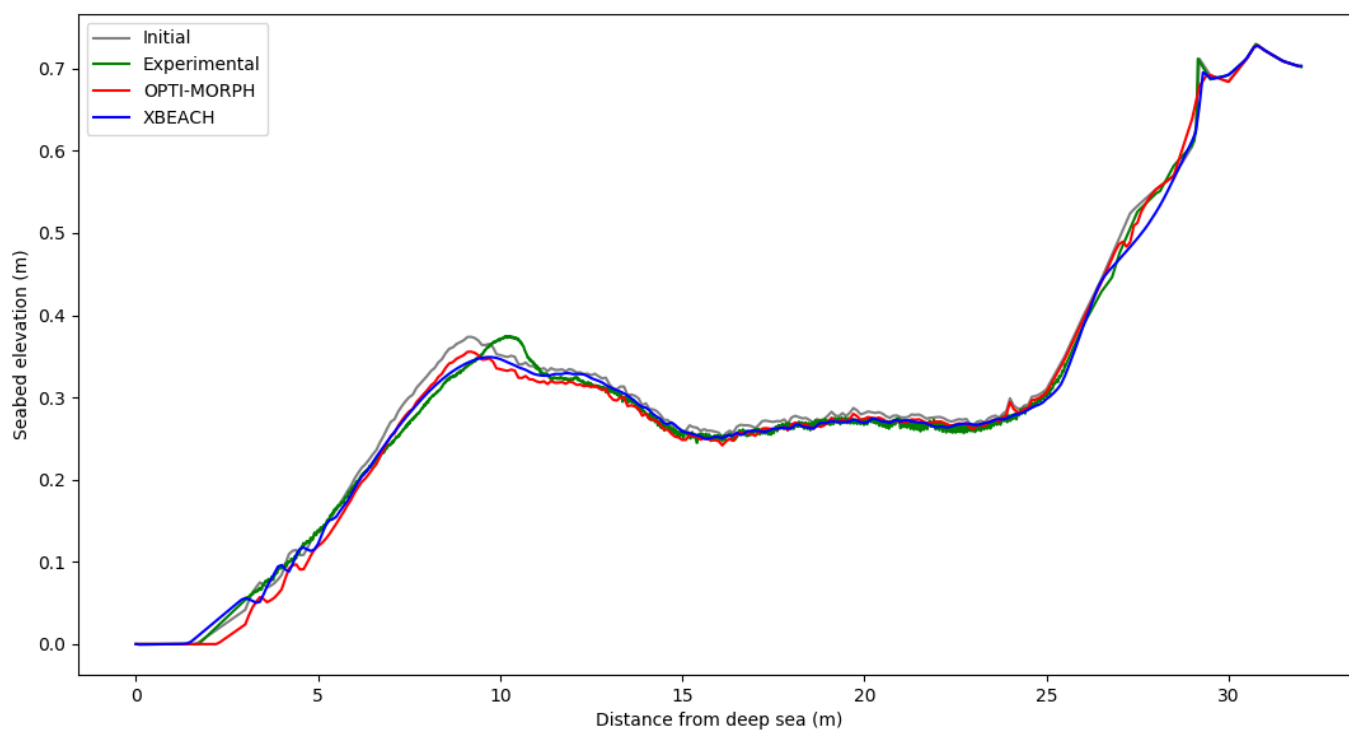


Figure: Numerical and experimental results of flume configuration.

Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
●○

Conclusion
○○

RESULTS: SHORT TERM SIMULATIONS

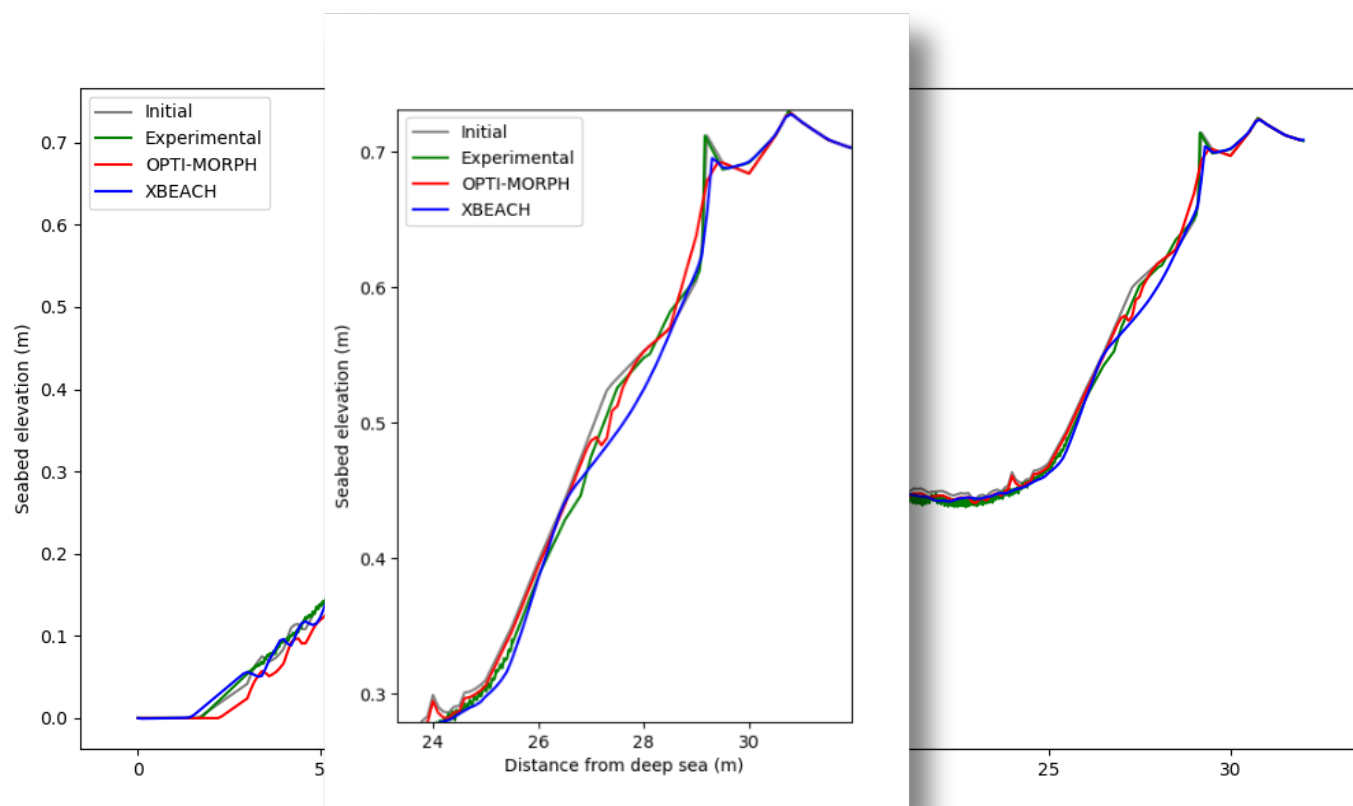


Figure: Numerical and experimental results of flume configuration.

Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
●○

Conclusion
○○

RESULTS: SHORT TERM SIMULATIONS

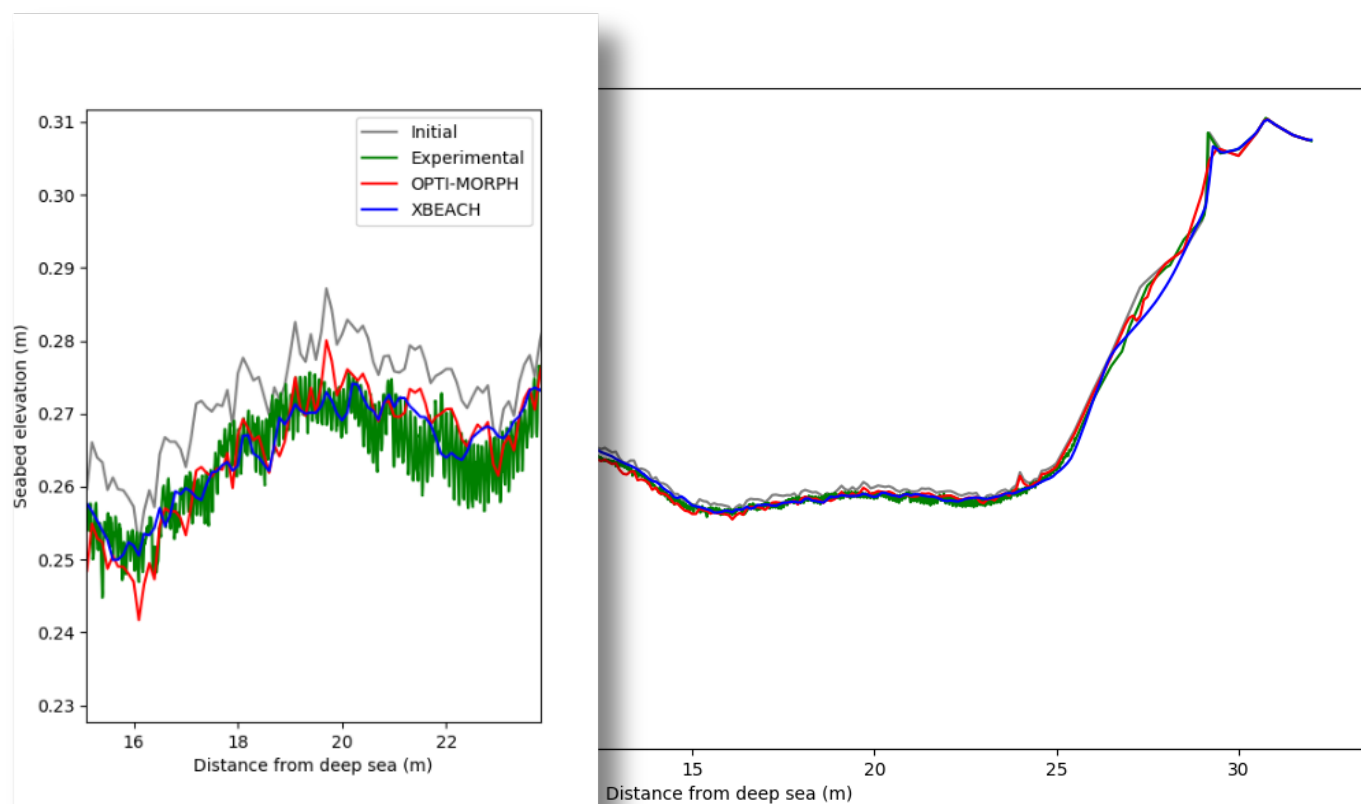


Figure: Numerical and experimental results of flume configuration.

Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
●○

Conclusion
○○

RESULTS: SHORT TERM SIMULATIONS

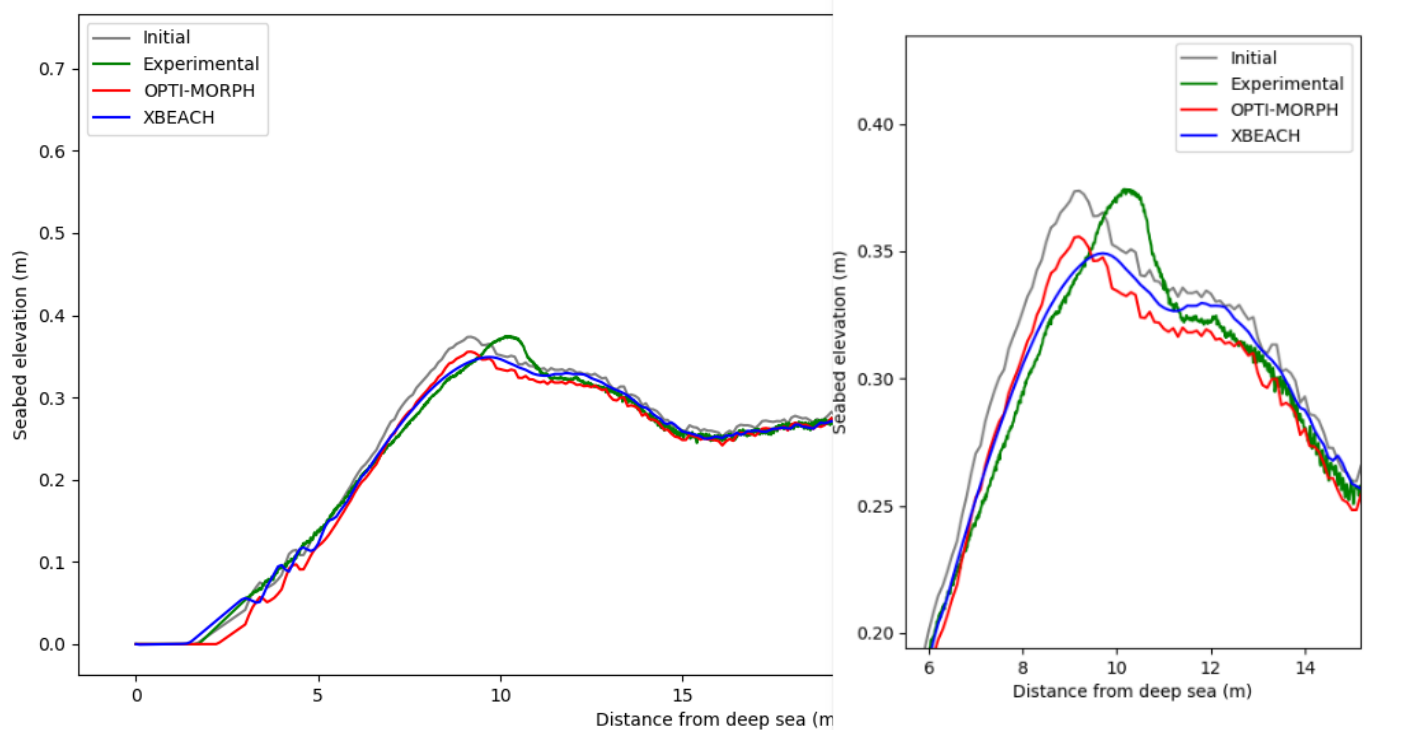


Figure: Numerical and experimental results of flume configuration.

Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
○●

Conclusion
○○

RESULTS: LONG-TERM SIMULATIONS

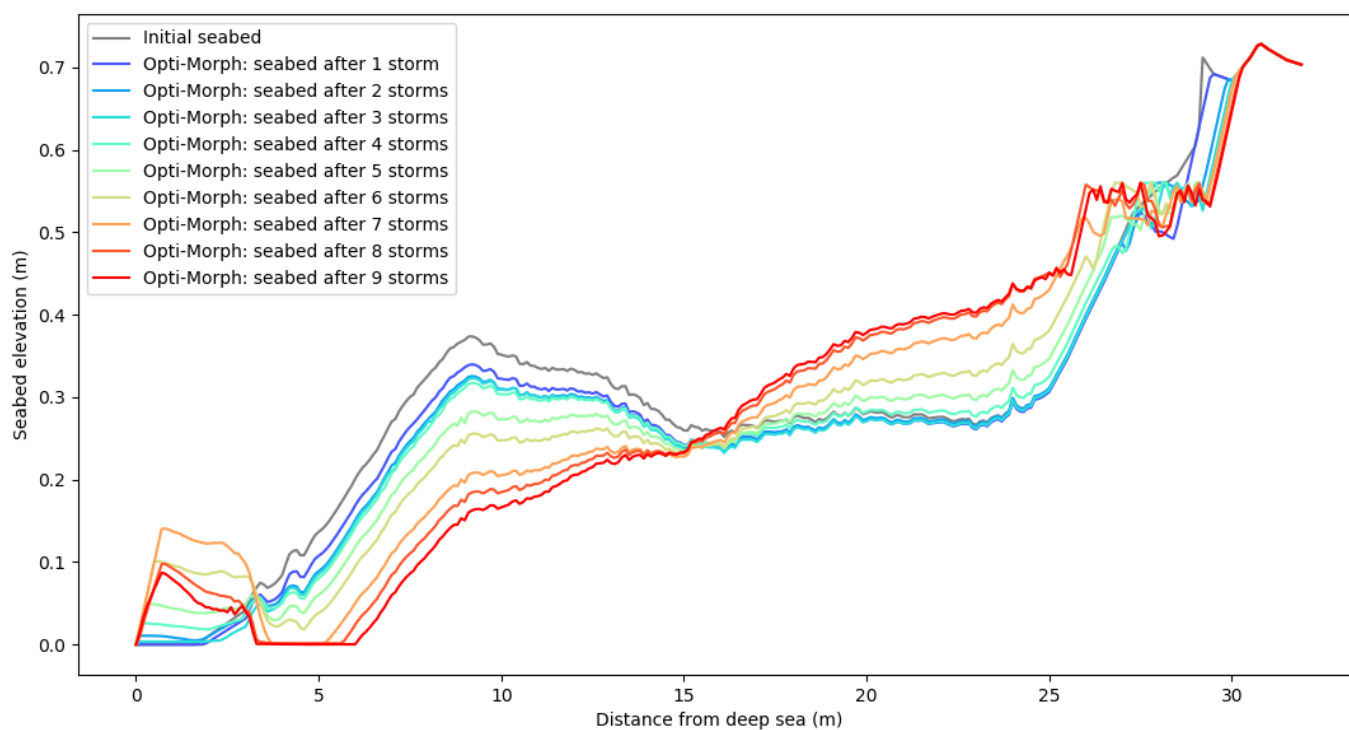


Figure: Long-term behavior of numerical models.

Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
○●

Conclusion
○○

RESULTS: LONG-TERM SIMULATIONS

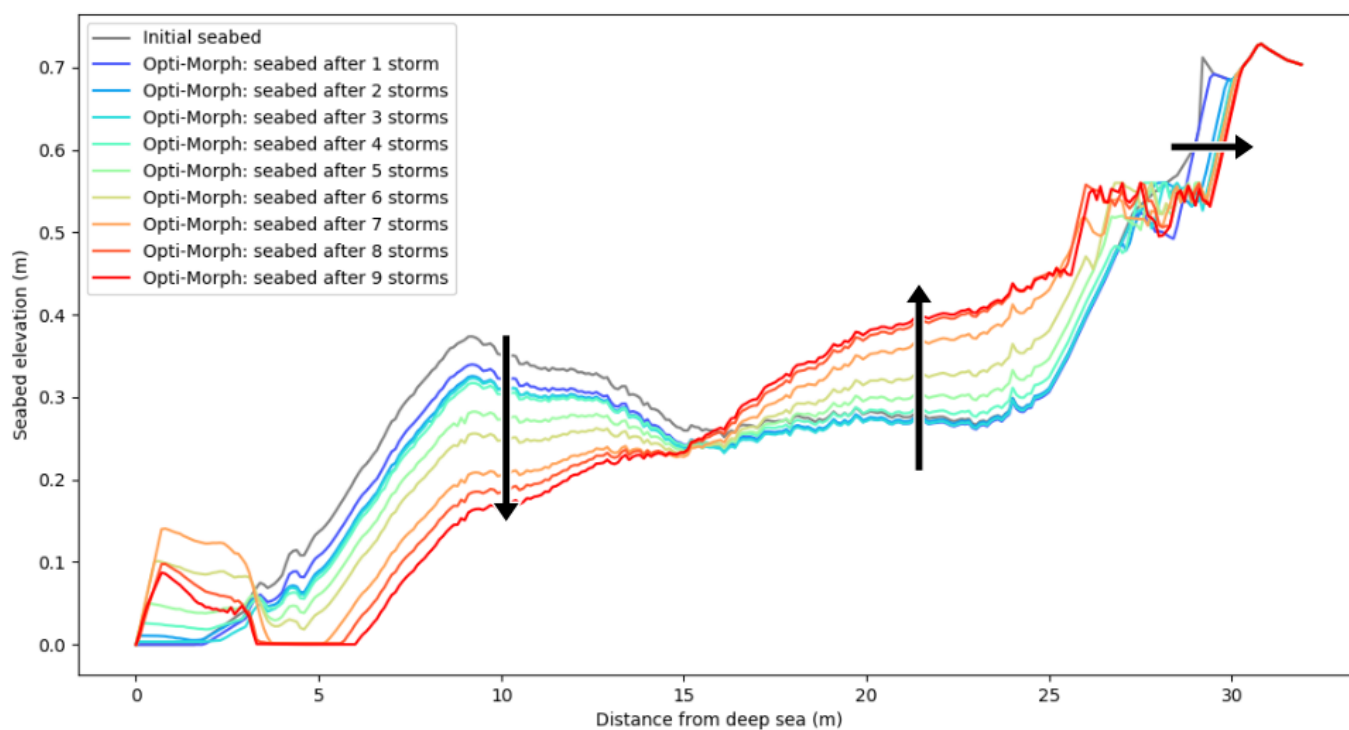


Figure: Long-term behavior of numerical models.

Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
○●

Conclusion
○○

RESULTS: LONG-TERM SIMULATIONS

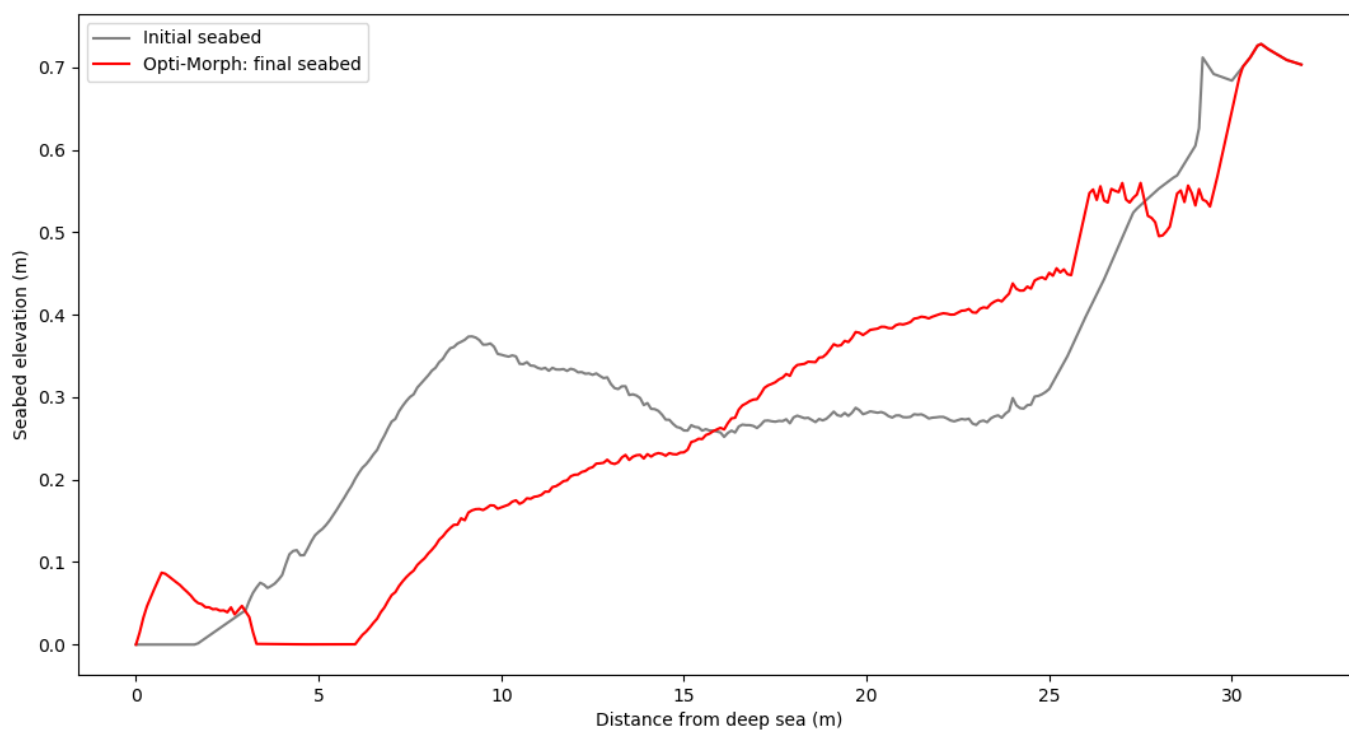


Figure: Long-term behavior of numerical models.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER

l'Europe
s'engage
en France
avec le FEDER



Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
○●

Conclusion
○○

RESULTS: LONG-TERM SIMULATIONS

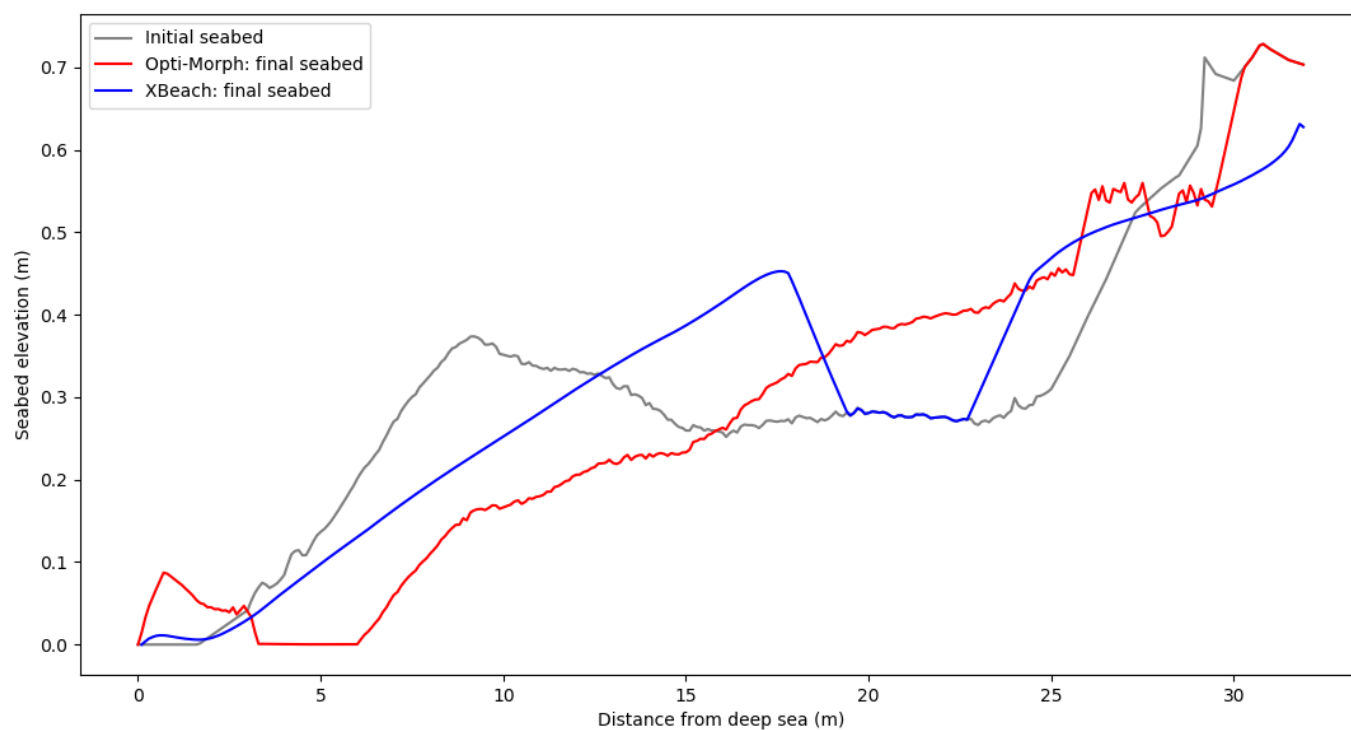


Figure: Long-term behavior of numerical models.

Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
●○

CONCLUSION

Conclusion:

- Opti-Morph shows promising results as a **fast, robust, low complexity** hydro-morphodynamic model.
- It demonstrates the potential of natural models by **energy minimization**.
- With its **short computational time**, Opti-Morph can be advantageous for coastal engineering studies.



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



Motivation
○

Settings
○

Opti-Morph
○

Results
○○

Conclusion
○○●

Thank you for your attention!



Biodiversité
Agriculture
Alimentation
Environnement
Terre
Eau



UNIVERSITÉ DE
MONTPELLIER



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



4.4 2021: LA Turballe



Optimization theory applied to coastal dynamics

La Turballe

M. Cook^{1,3,4}, F. Bouchette^{1,3}, B. Mohammadi^{1,2,3}, N. Fraysse⁴

¹ GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, megan.cook@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr

² IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr

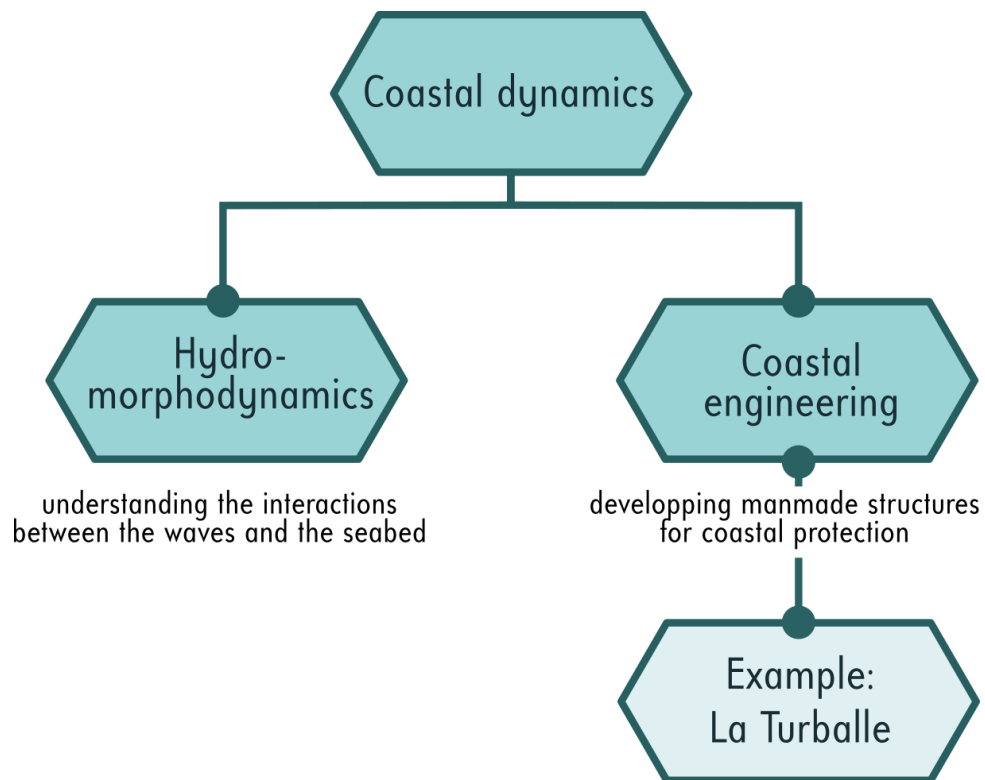
³ GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

⁴ BRL Ingénierie, Nîmes, France, nicolas.fraysse@brl.fr



INTRODUCTION






Optimization theory can be used in coastal dynamics in two different ways.



LA TURBALLE



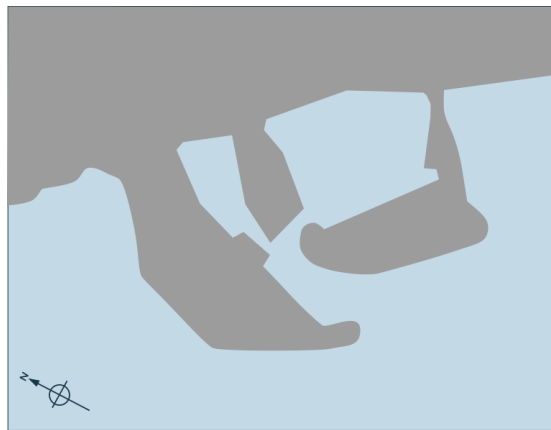
La Turballe is a port situated in Northwest France and offers an array of activities :

-  fishing
-  marina
-  naval repair center
-  touristic boat trips to nearby ports and islands
-  future wind turbine maintenance center (2021)



LA TURBALLE : OBJECTIVES

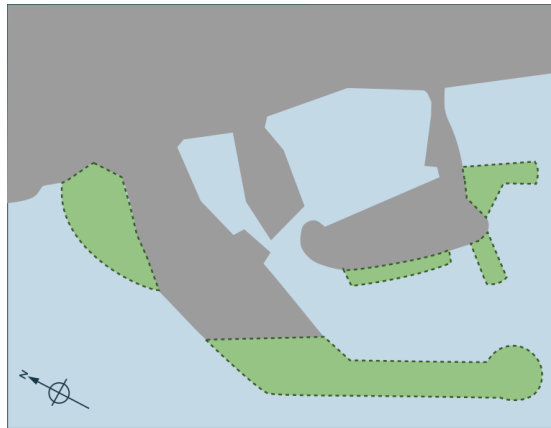
Project : Extend the port in order to accommodate the ever increasing harbor activity.



Actual configuration of La Turballe

LA TURBALLE : OBJECTIVES

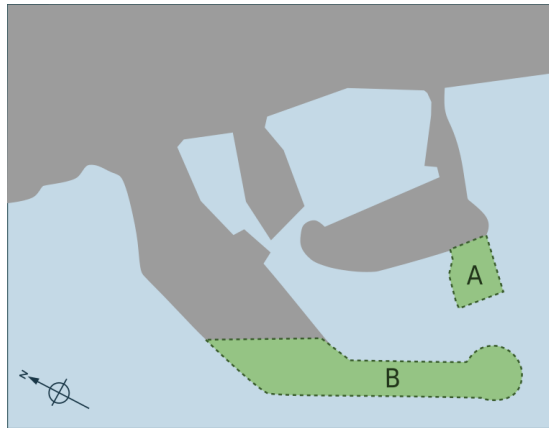
Project : Extend the port in order to accommodate the ever increasing harbor activity.



Many different structures varying in size, shape and position can be added to the port.

LA TURBALLE : OBJECTIVES

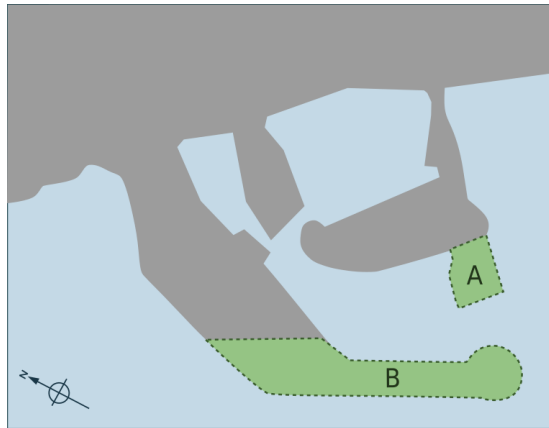
Project : Extend the port in order to accommodate the ever increasing harbor activity.



For illustrative purposes, let us consider adding only two solid emerged structures.

LA TURBALLE : OBJECTIVES

Project : Extend the port in order to accommodate the ever increasing harbor activity.

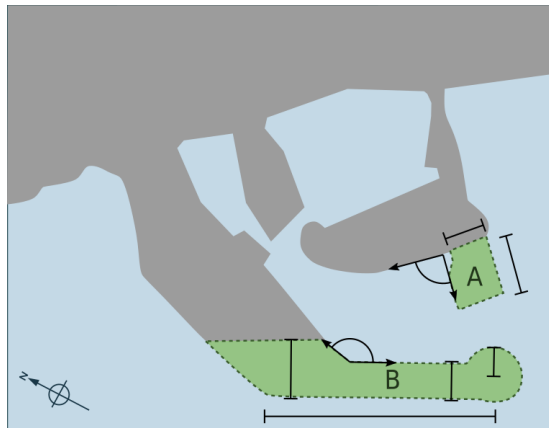


For illustrative purposes, let us consider adding only two solid emerged structures.

Our task : Find the size/shape of the defense structures which *minimizes* wave agitation in the port.

PARAMETERS

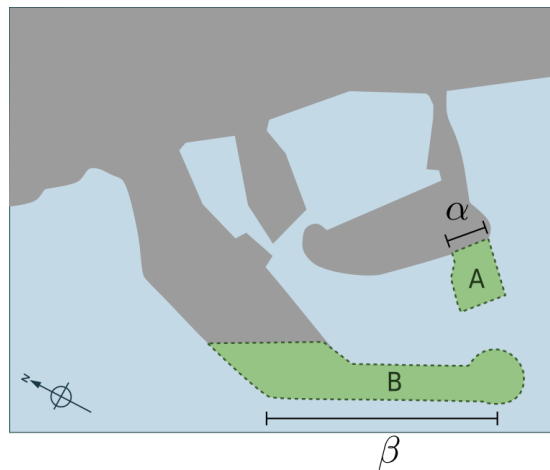
Numerous parameters can be used to define the two structures.



PARAMETERS

Numerous parameters can be used to define the two structures.

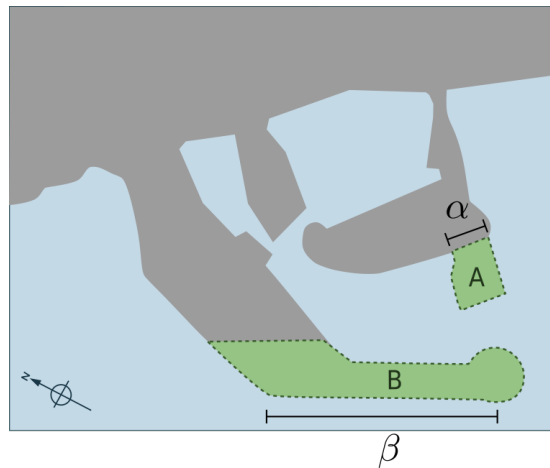
For illustrative purposes, we only vary the width of structure *A* and the length of structure *B*.



PARAMETERS

Numerous parameters can be used to define the two structures.

For illustrative purposes, we only vary the width of structure A and the length of structure B.

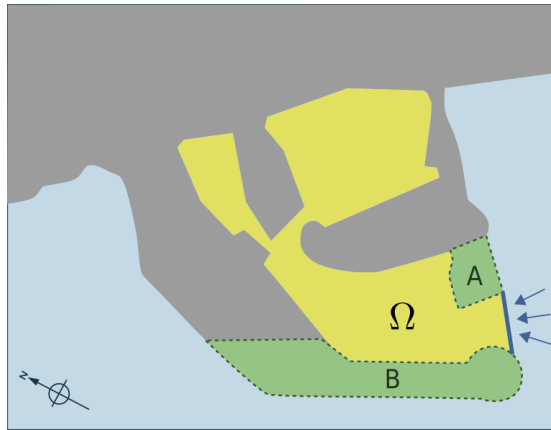


The shape and size of the structures are restricted by physical and economic **constraints** :

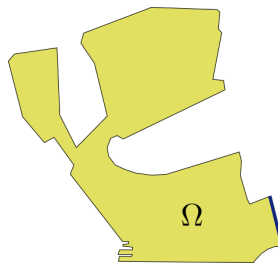
- ▶ α must be between 50m and 250m.
- ▶ β must be between 350m and 650m.
- ▶ the distance between A and B must be greater than 50m.

HYDRODYNAMIC MODEL

We need a hydrodynamic model, in order to determine the agitation of the water in the port.



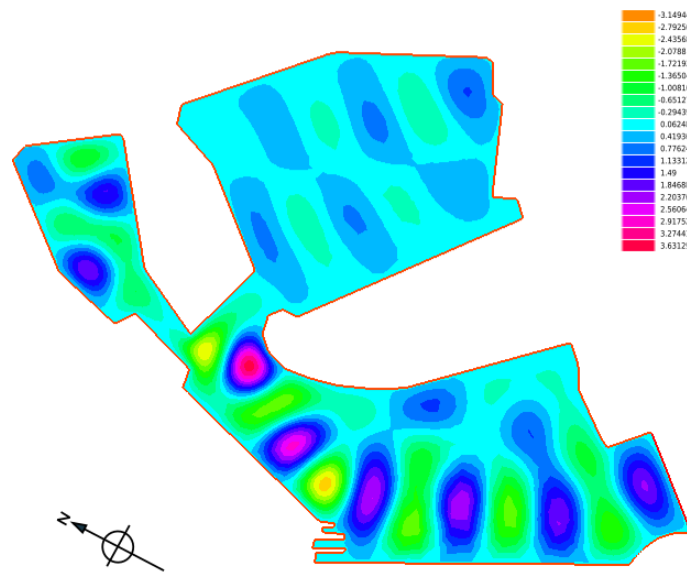
We study wave agitation on the following domain :



HYDRODYNAMIC MODEL (2)

We developed a model based on the Helmholtz equation taking into account :

- ▶ multi-directional incoming waves
- ▶ multi-frequency incoming waves



→ See wave animation.

MINIMIZATION PROBLEM

Find the parameters α and β such that the agitation of the water J is minimal while subjected to the previous constraints :

$$\underset{\alpha, \beta}{\text{minimize}} J(\alpha, \beta) \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} 50 \leq \alpha \leq 250 \\ 350 \leq \beta \leq 650 \\ \text{dist}(A, B) \leq 50 \end{cases}$$

where J is the global agitation of the water given by :

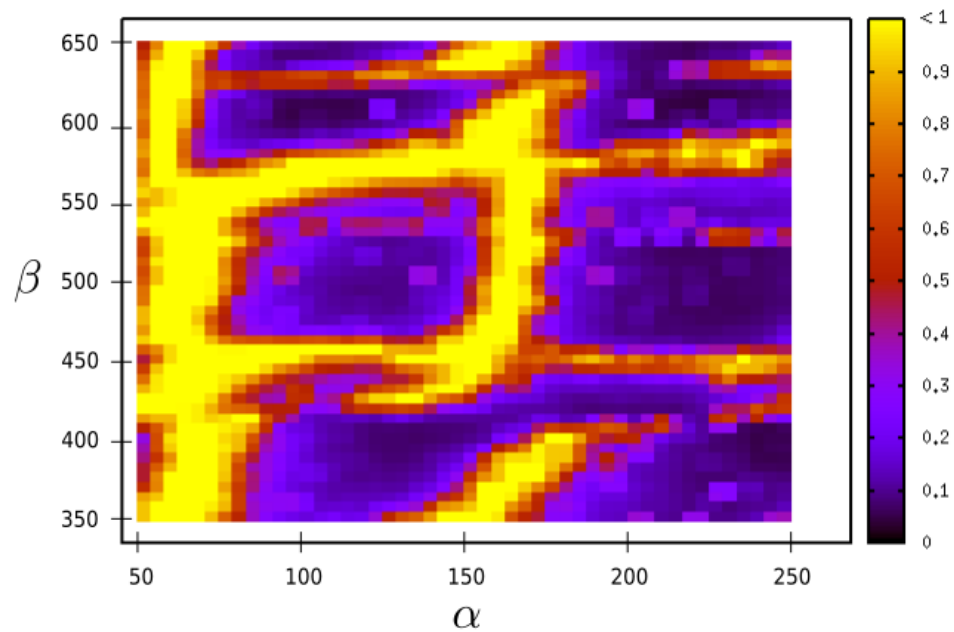
$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (a(\alpha, \beta, x) - a_{\text{ref}})^2 \psi(x) dx$$

where

- ▶ a is the amplitude of the waves, determined by the hydrodynamic model
- ▶ a_{ref} is the target amplitude of the waves
- ▶ ψ is the support of J

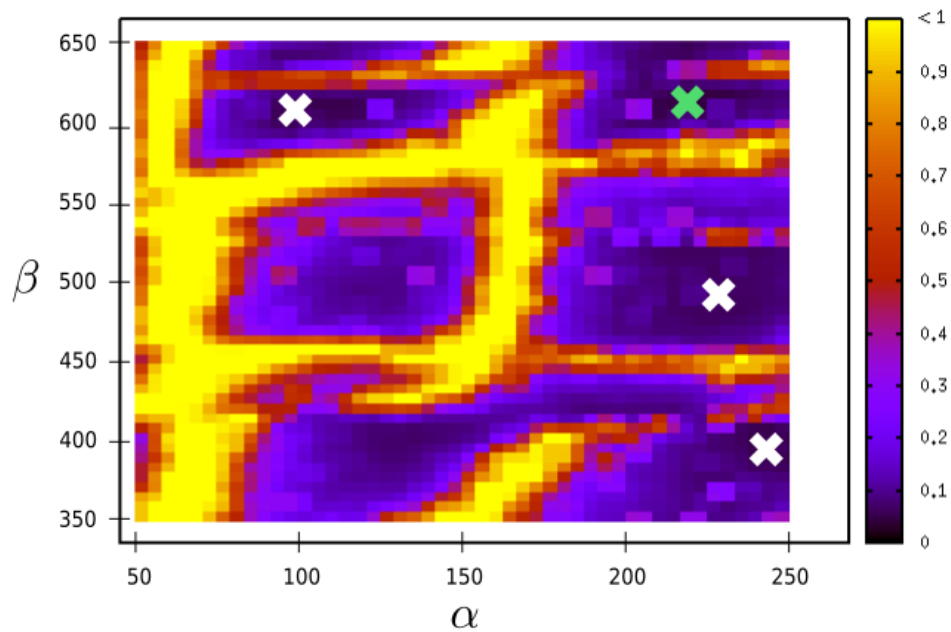
RESULTS : GRAPH OF J

Graph of the cost function J in relation to α and β



RESULTS : GRAPH OF J

Graph of the cost function J in relation to α and β

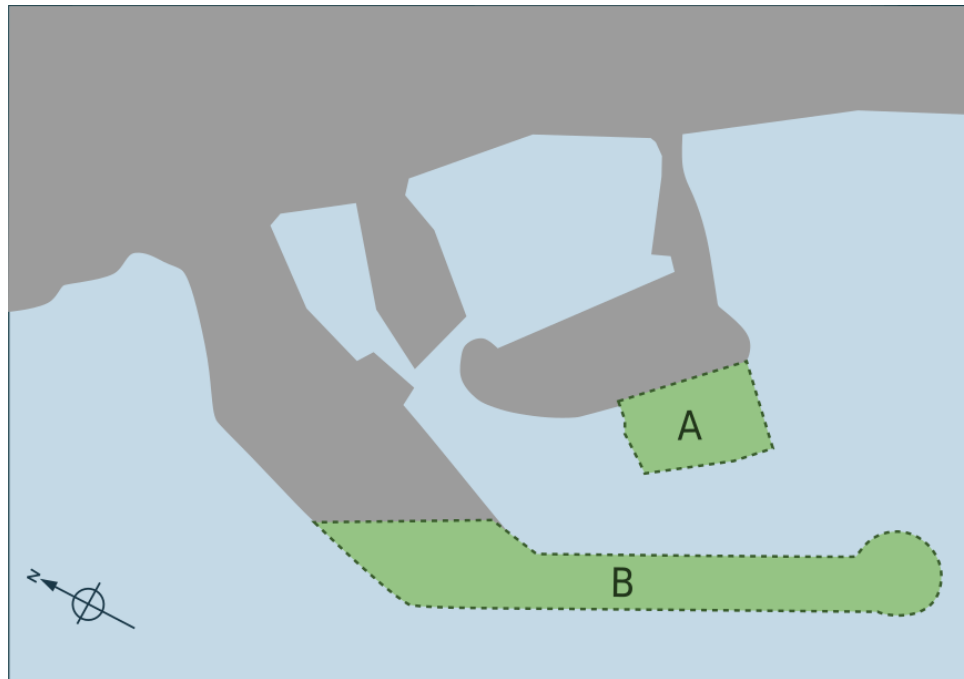


We observe several local minima. All are potential candidates for the final configuration.

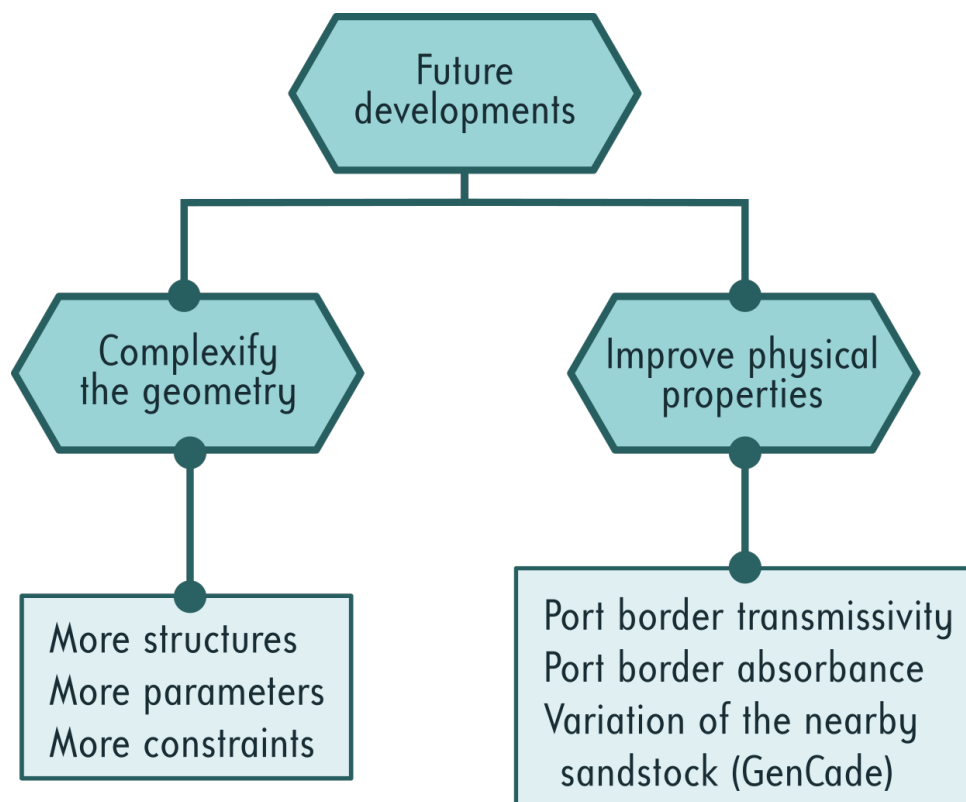
The global minimum of J (green) is reached when $\alpha = 220$ and $\beta = 615$.

RESULTS : PORT CONFIGURATION

The port configuration corresponding to $\alpha = 220$ and $\beta = 615$ is :



CONCLUSION



Thank you for your attention.



4.5 2020: Journée des doctorants - IMAG



Optimal control applied to the modeling of sandy beach dynamics and coastal preservation

M. Cook^{1,3,4}, F. Bouchette^{1,3}, B. Mohammadi^{1,2,3}, N. Fraysse⁴

Journée des Doctorant.e.s - IMAG
12th February 2020

¹ GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, megan.cook@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr

² IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr

³ GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

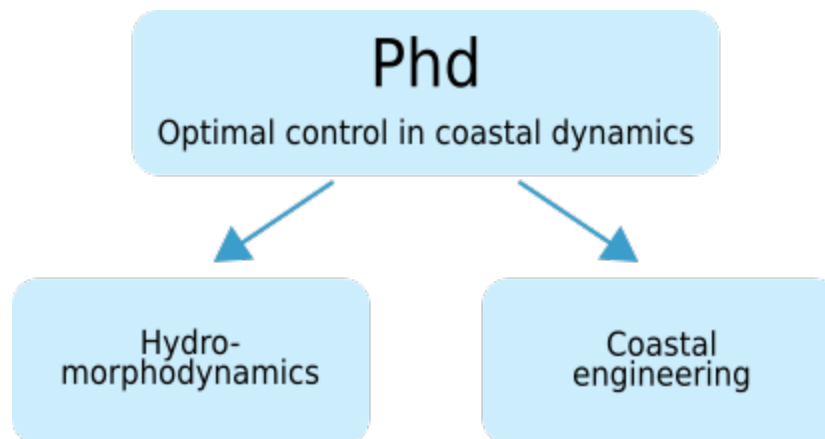
⁴ BRL Ingénierie, Nîmes, France, nicolas.fraysse@brl.fr



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



GENERAL PRESENTATION



Hydro-morphodynamic model

MOTIVATION

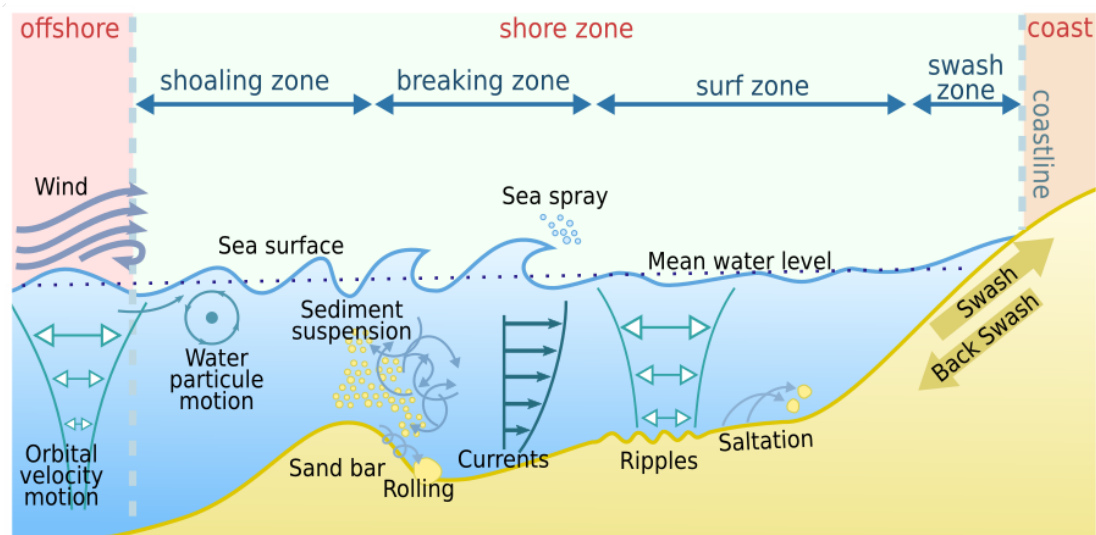


FIGURE – The complexity of the coastal zone

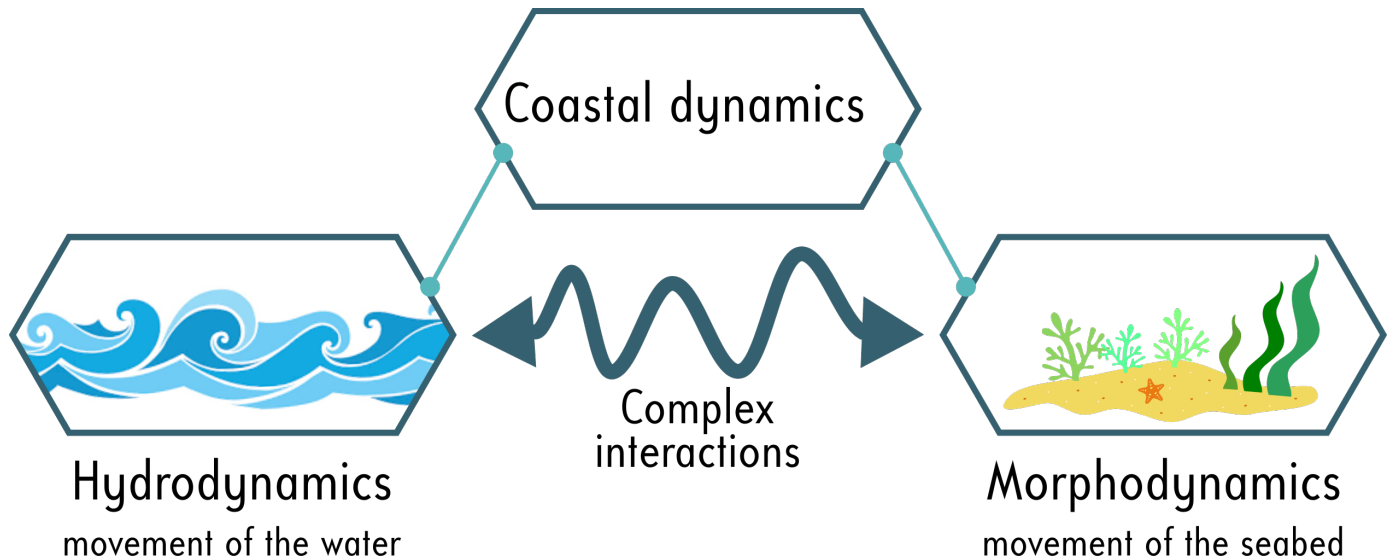
- Numerous processes are observed at the coast.
- These can occur at different time scales.
- The interactions between the water and seabed are complex.

◀ ◻ ▶

OBJECTIVES

- ▶ Create a new theory behind coastal morphodynamics based on **optimal control**
- ▶ Identify different morphodynamic processes depending on the choice of **cost function**
- ▶ Develop a **numerical model**, which is fast, robust and low complexity

WORKFLOW



Hydrodynamic model



SETTING

- ▶ Many coastal hydrodynamic models exist including REF/DIF and XBeach.
- ▶ We have developped a hydrodynamic model based on **linear wave theory**.
- ▶ Given the current configuration of the morphodynamic model, we need a hydrodynamic model that provides **wave height**.

DEFINITIONS (1)

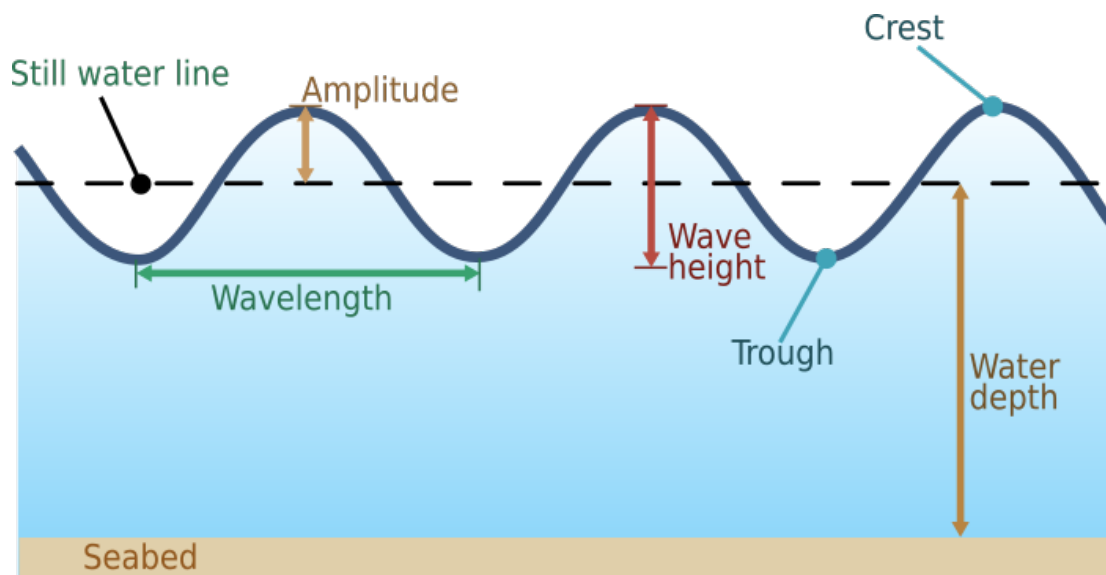
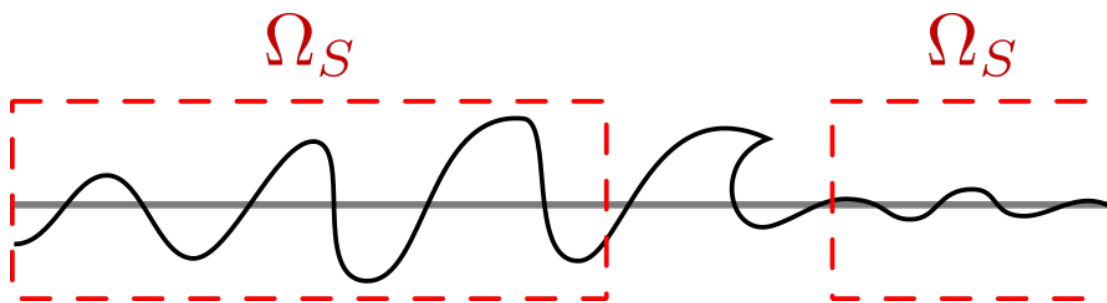


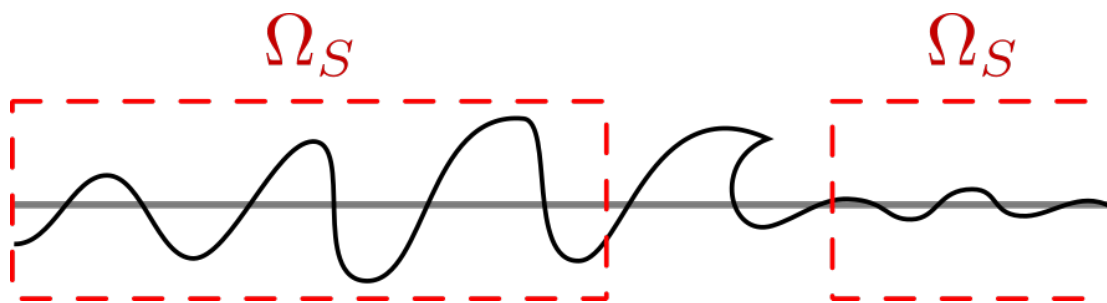
FIGURE – Wave characteristics

NB : **Water height** is defined as the distance between crest and trough.

DEFINITIONS (2)



DEFINITIONS (2)

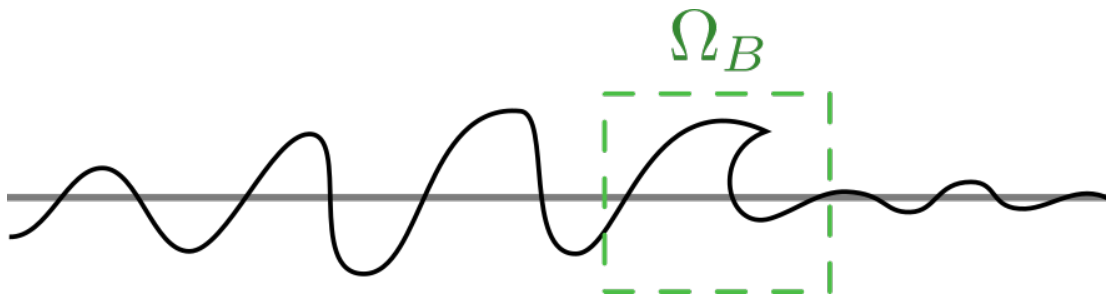


$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(t) \left(\frac{1}{2n(x, t)} \frac{C_0(t)}{C_g(x, t)} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{if } x \in \Omega_S \end{cases} \quad (1)$$

where :

- ▶ H_0 and C_0 are respectively the **incoming wave height** and **celerity**,
- ▶ $n = \frac{C_g}{C}$,
- ▶ C is the **wave velocity** and C_g is **group velocity**.

DEFINITIONS (2)

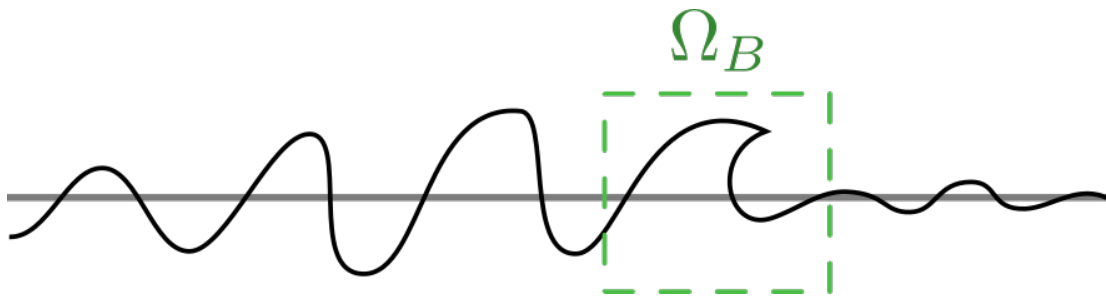


$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(t) \left(\frac{1}{2n(x, t)} \frac{C_0(t)}{C_g(x, t)} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{if } x \in \Omega_S \end{cases} \quad (1)$$

where :

- ▶ H_0 and C_0 are respectively the **incoming wave height** and **celerity**,
- ▶ $n = \frac{C_g}{C}$,
- ▶ C is the **wave velocity** and C_g is **group velocity**.

DEFINITIONS (2)



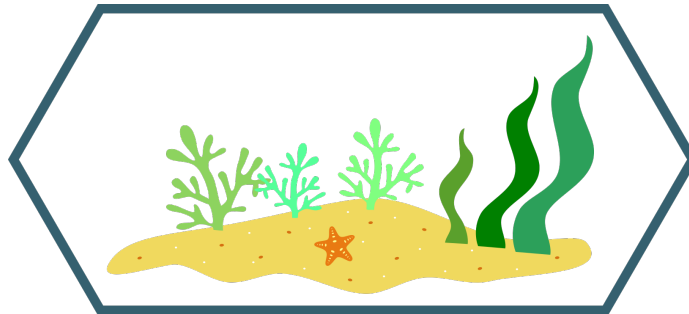
$$H(x, t) = \begin{cases} H_0(t) \left(\frac{1}{2n(x, t)} \frac{C_0(t)}{C_g(x, t)} \right)^{\frac{1}{2}} & \text{if } x \in \Omega_S \\ \gamma h(x, t) & \text{if } x \in \Omega_B \end{cases} \quad (1)$$

where :

- ▶ H_0 and C_0 are respectively the **incoming wave height** and **celerity**,
- ▶ $n = \frac{C_g}{C}$,
- ▶ C is the **wave velocity** and C_g is **group velocity**,
- ▶ h is the **water depth** and γ is a **wave breaking index**.

◀ ◻ ▶

Morphodynamic model



SETTING

There are numerous morphodynamic models :

- ▶ **empirical models** (*de Vriend, Bakker & Bilse, 1994 ; Gravens, 1997 ; Kana, Hayter & Work, 1999 ; Ruessink & Terwindt, 2000*)
- ▶ **profile evolution models** (*Larson & Kraus, 1989 ; Larson, Kraus & Byrnes, 1990 ; Nairn & Southgate, 1993*)
- ▶ **2D process-based morphological models** (*Coeffe & Pechon, 1982 ; Fleming & Hunt, 1977 ; Johnson, Brker, & Zyserman, 1995 ; Latteux, 1980 ; Maruyama & Takagi, 1988 ; Nicholson et al., 1997 ; Roelvink et al., 2009 ; Wang, Miao & Lin, 1993 ; Watanabe, Maruyama, Shimizu & Sakakiyama, 1986 ; Yamaguchi & Nishioka, 1985*)
- ▶ **3D and quasi-3D process-based models** (*Briand & Kamphuis, 1993 ; Ding, Wang & Jia, 2006 ; Droenen & Deigaard, 2007 ; Lesser, Roelvink, Kester & Stelling, 2004 ; Roelvink & Banning, 1994 ; Roelvink, Walstra & Chen, 1995 ; Zyserman & Johnson, 2002*)

This model is based on **optimal control**, which makes it **new** and **innovative**.

"Nature is lazy... The less effort it takes to do something, the better."

ASSUMPTION

The seabed ψ reacts to the state of the waves by **minimizing** the [energy of the surface waves](#) :

$$J(\psi, t) = \frac{1}{16} \int_{\Omega_s} \rho g H^2(\psi, x, t) dx \quad (2)$$

where :

- ▶ Ω_s is the shoaling zone
- ▶ ρ ($kg.m^{-3}$) is water density
- ▶ g ($m.s^{-2}$) is gravitational acceleration
- ▶ H (m) is water height, provided by the previous hydrodynamic model

NB : Other choices are possible :

- ▶ orbital velocity
- ▶ dissipation factor
- ▶ shear stress ...

Different cost functions may highlight different physical processes.

OPTIMIZATION PROBLEM

The seabed ψ verifies the following dynamics over time, based on the gradient descent method :

$$\begin{cases} \psi_t = -\Upsilon \Lambda \vec{d} \\ \psi(t=0) = \psi_0 \end{cases} \quad (3)$$

where :

- ▶ ψ_t is the **evolution of the seabed** over time
- ▶ Υ is the abrasion of sand
- ▶ Λ is the excitation of the seabed by water waves
- ▶ \vec{d} is the **direction of descent**, based on $\nabla_{\psi} J$

NB : It's natural to set $\vec{d} = \nabla_{\psi} J$, but added constraints **modify** the direction of descent.

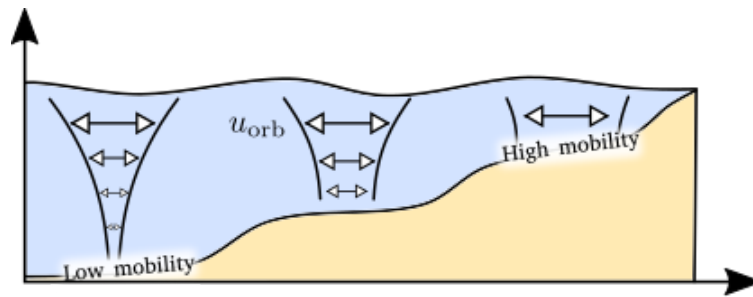
EXCITATION OF THE SEABED BY WATER WAVES Λ

The orbital velocity damping function is defined by :

$$u_{orb}(x, z) = \frac{\cosh(k(x)[h(x) - (h_0 - z)])}{\cosh(k(x)h(x))}, \quad \forall (x, z) \in \Omega \times [\psi(x), h_0]. \quad (4)$$

We set the **excitation of the seabed** by water waves as

$$\Lambda(x) = u_{orb}(x, \psi(x)) = \frac{1}{\cosh(k(x)h(x))}, \quad \forall x \in \Omega.$$



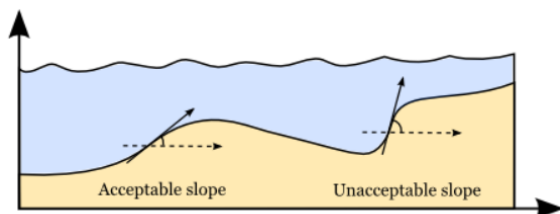
- deep water $\Rightarrow u_{orb}(\psi)$ small $\Rightarrow \Lambda$ small \Rightarrow the seabed barely moves
- shallow water $\Rightarrow u_{orb}(\psi)$ great $\Rightarrow \Lambda$ great \Rightarrow the seabed can move a lot

CONSTRAINTS

Constraints are added to the optimization problem to incorporate more physics into the model.

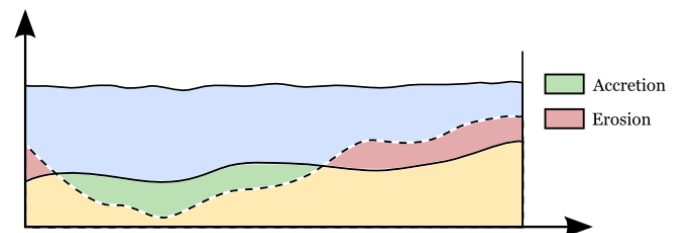
We have 2 constraints :

The slope of the seabed cannot exceed a certain value.



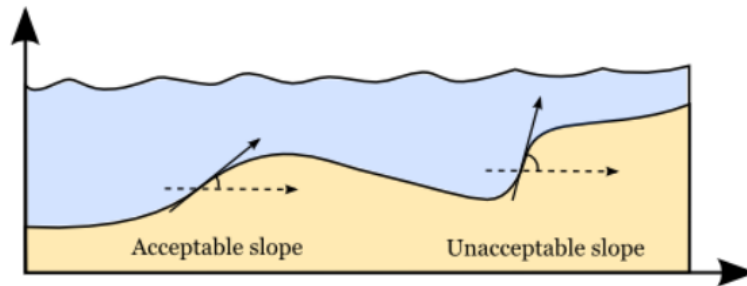
$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq \beta$$

In an experimental basin, the volume of sand is conserved over time.



$$\left| \int_{\Omega} \psi - \psi_0 \right| = 0$$

CONSTRAINTS : SLOPE STEEPNESS



We wish to prevent the slope of the seabed from exceeding a certain threshold :

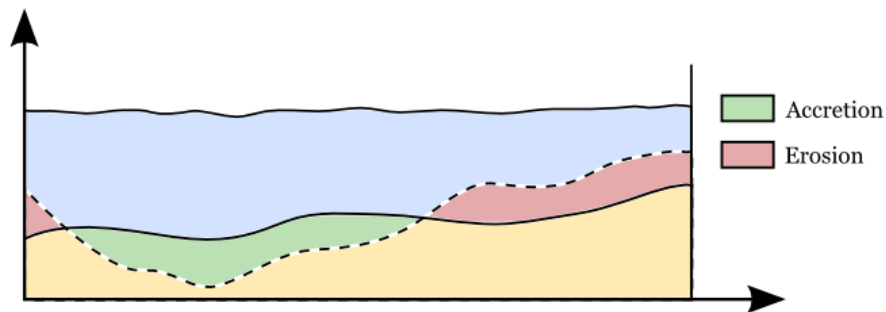
$$\left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \leq \beta \quad (5)$$

Numerically, we set :

$$\left| \frac{\psi(x_{i-1}) - \psi(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \right| \leq \beta \quad (6)$$

For each point x_i , we set : $\psi(x_i) = \begin{cases} \pm\beta(x_i - x_{i-1}) + \psi_{i-1} & \text{if the slope is too steep} \\ \Upsilon(x_i)\Lambda(x_i)d(x_i) & \text{otherwise} \end{cases}$

CONSTRAINTS : SANDSTOCK CONSERVATION (1)



We wish to conserve the quantity of sand over time.

Let

$$S(t) = \left| \int_{\Omega} \psi(x, t) - \psi_0(x) dx \right|$$

the difference between the initial sandstock and the sandstock at time t .

We wish that $S(t) = 0$ for all $t > 0$.

Two methods were envisioned to implement this constraint.

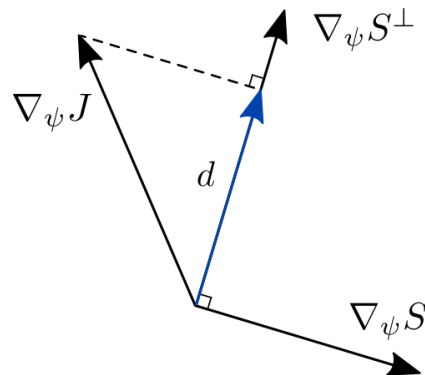
CONSTRAINTS : SANDSTOCK CONSERVATION (2)

PROJECTION :

The direction of descent must guarantee that the quantity of sand is constant over time.

$$\text{Let } S = \left| \int_{\Omega} \psi(x) - \psi_0(x) dx \right| \quad (7)$$

We wish to minimize J with regards to ψ while $\nabla_{\psi} S = 0$. To do this, we project $\nabla_{\psi} J$ onto the orthogonal of $\nabla_{\psi} S$.



CONSTRAINTS : SANDSTOCK CONSERVATION (3)

PENALIZATION

We wish to minimize wave energy J and sandstock S simultaneously. We set the direction of descent :

$$\vec{d} = \nabla_{\psi} J + w_s \nabla_{\psi} S \quad (8)$$

w_s indicates the importance of the S constraint.

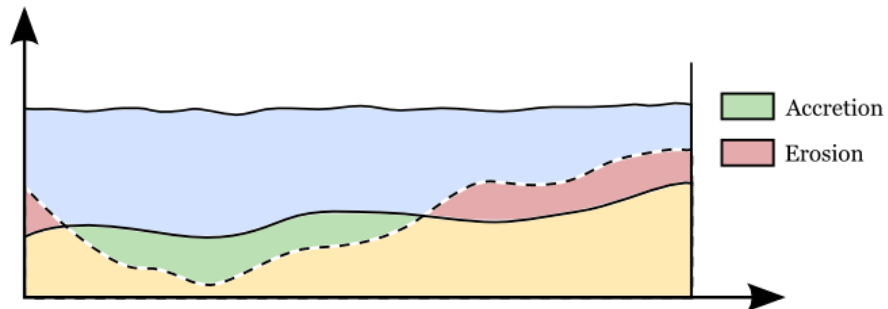
- ▶ w_s too big \Rightarrow the S constraint is important \Rightarrow the seabed doesn't move
- ▶ w_s too small \Rightarrow the S constraint is neglected \Rightarrow the sandstock isn't conserved

CONSTRAINTS : SANDSTOCK CONSERVATION (3)

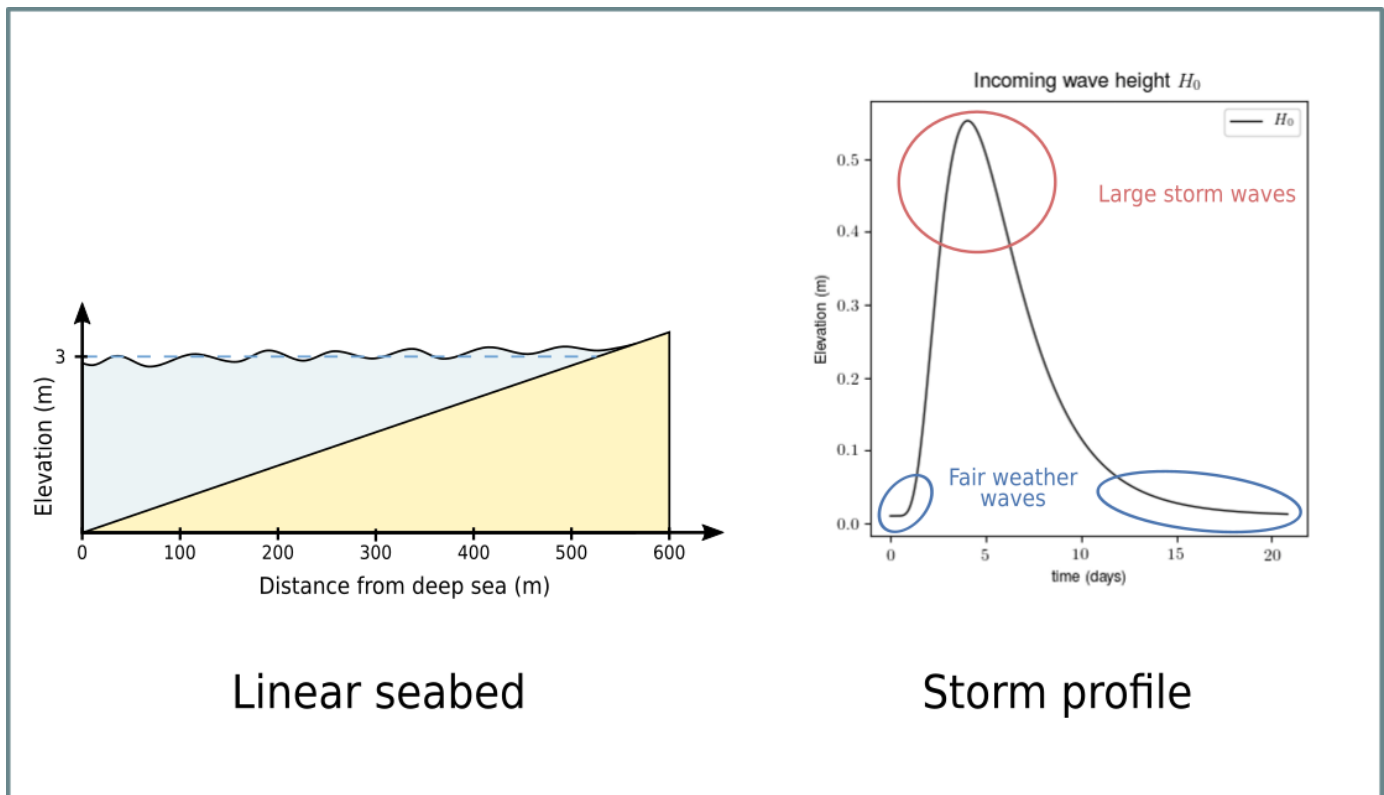
Because of numerical inaccuracies, we apply both the projection AND the penalization methods :

$$d = P(\nabla_{\psi} J) + w_s \nabla_{\psi} S \quad (9)$$

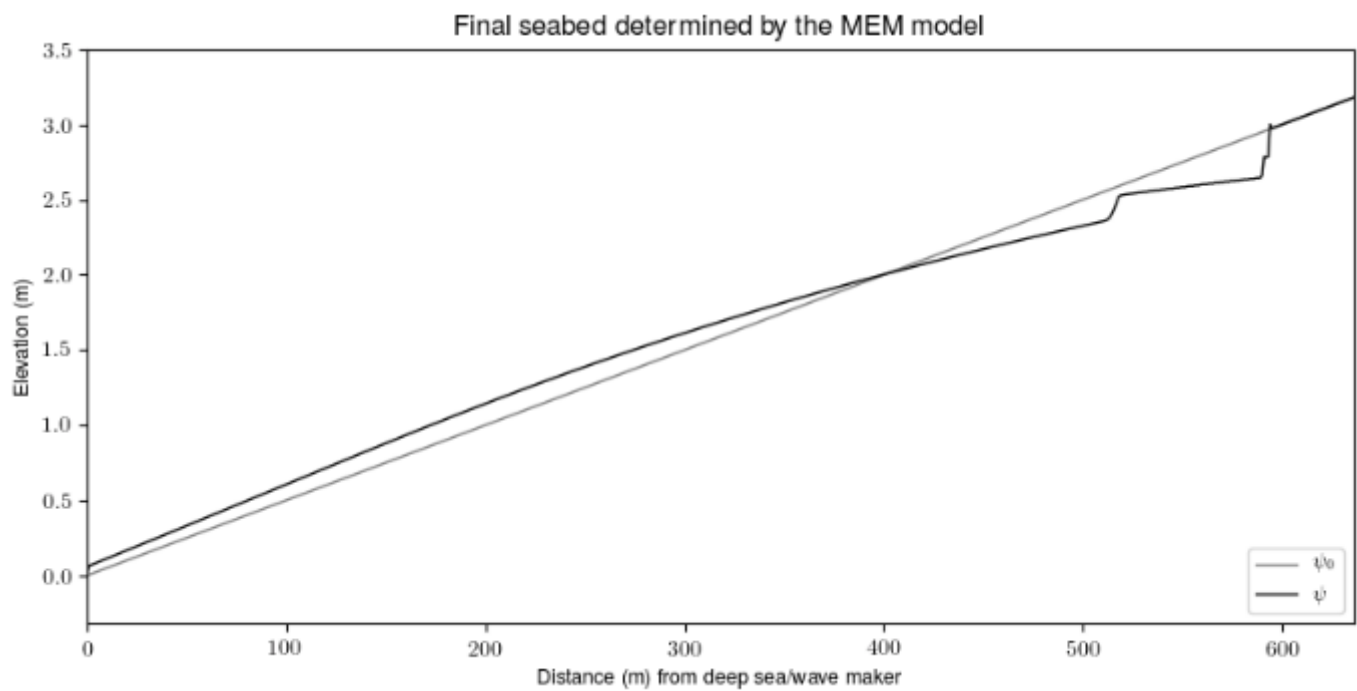
where P is the projection.



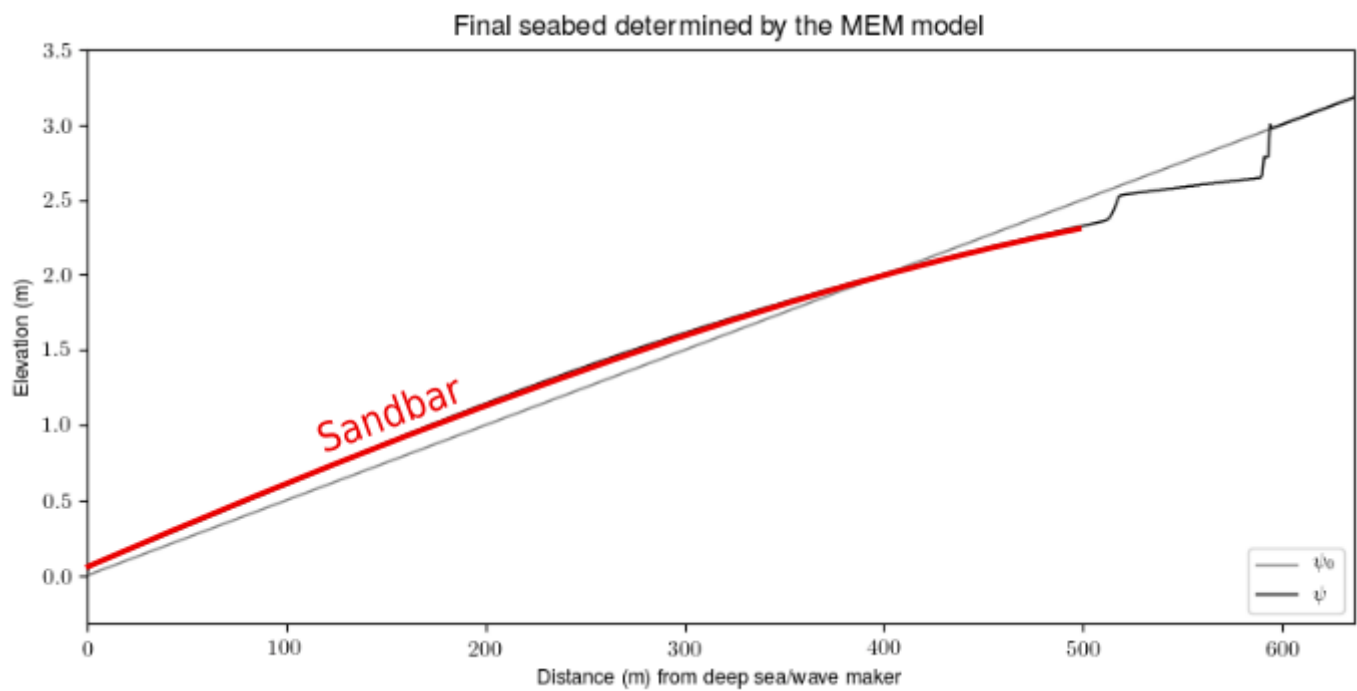
RESULTS (1)



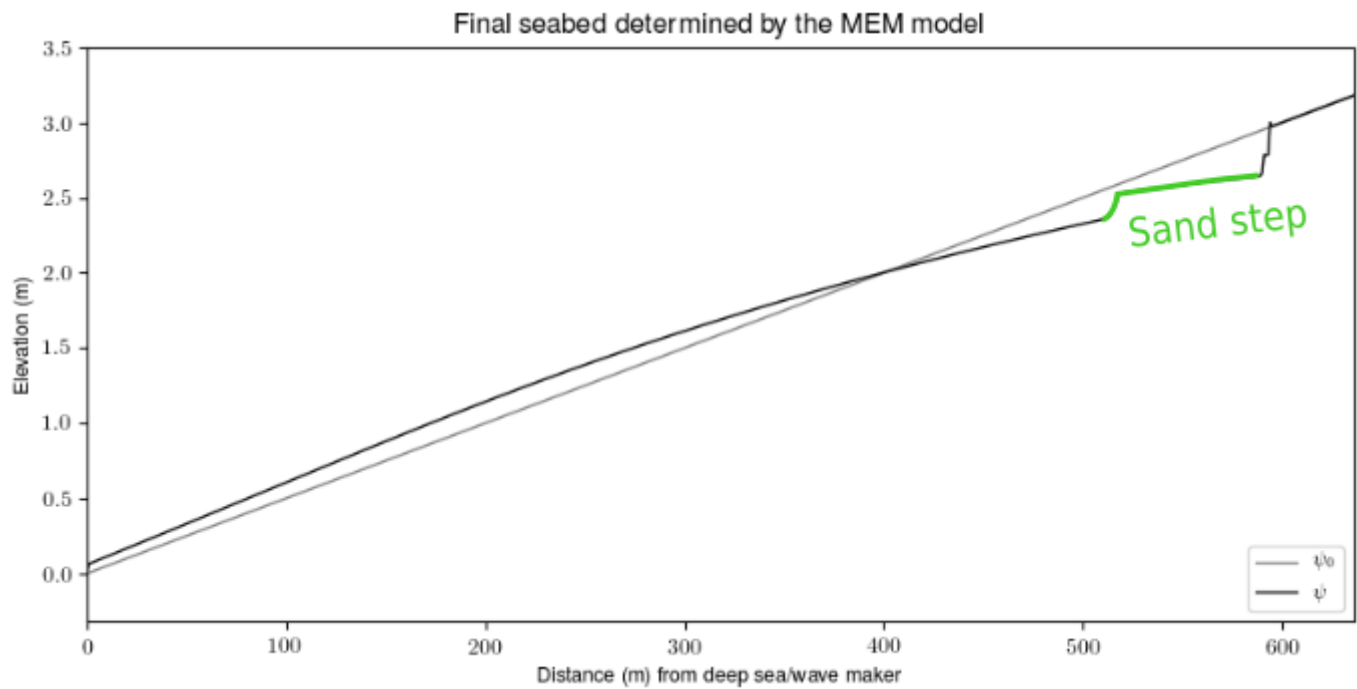
RESULTS (2)



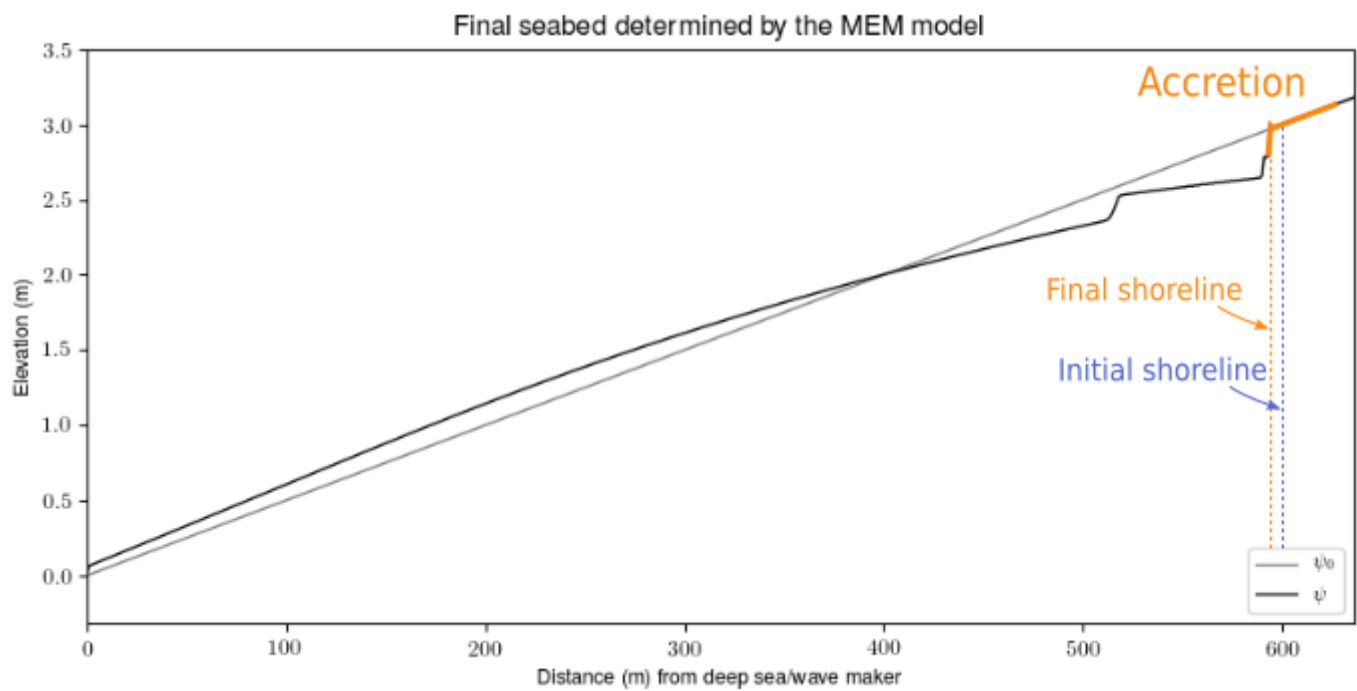
RESULTS (2)



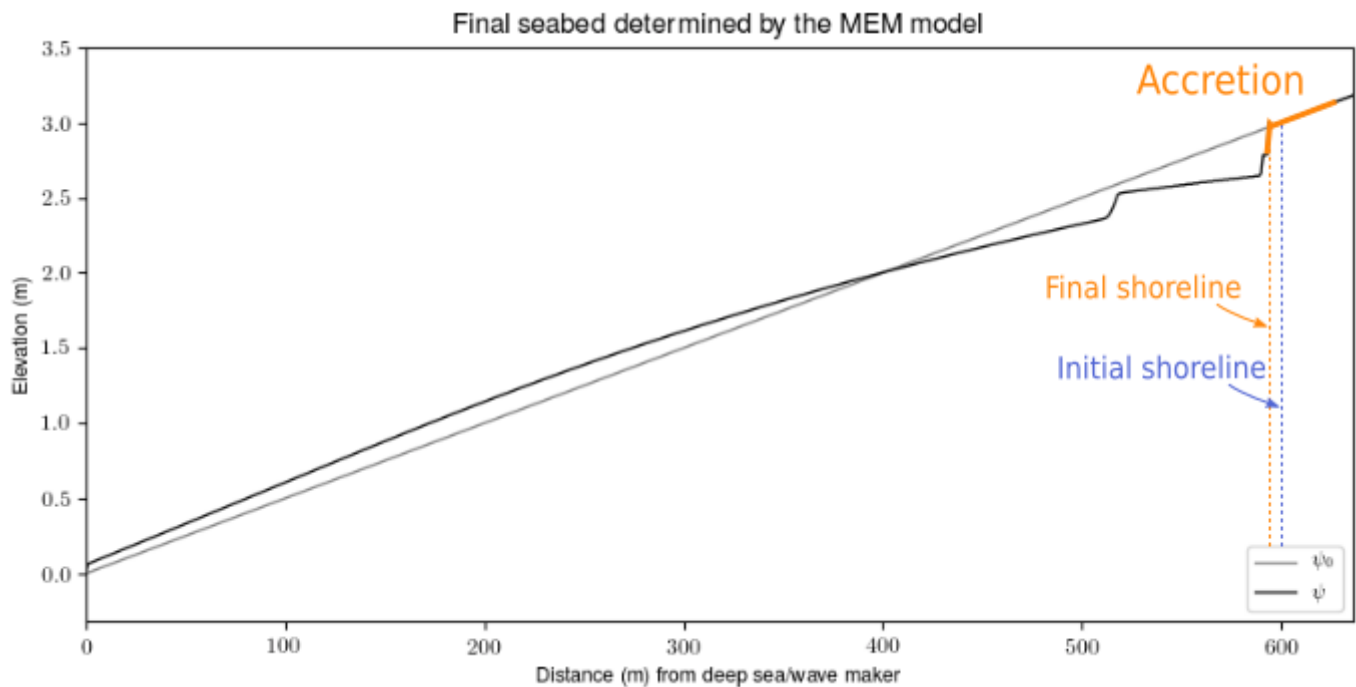
RESULTS (2)



RESULTS (2)



RESULTS (2)



- Natural phenomena are observed : sandbar, step, berm, accretion.
- This indicates that the morphodynamic model by wave energy minimization shows potential.

RESULTS (3)

COPTER project - GLADYS

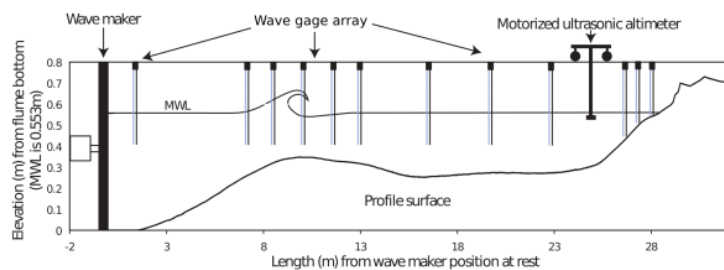
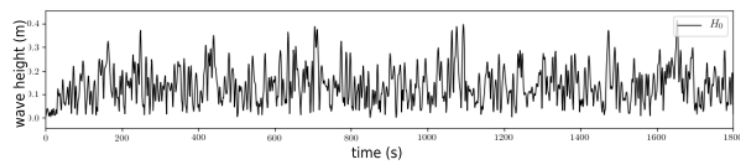


Diagram of the flume experiment

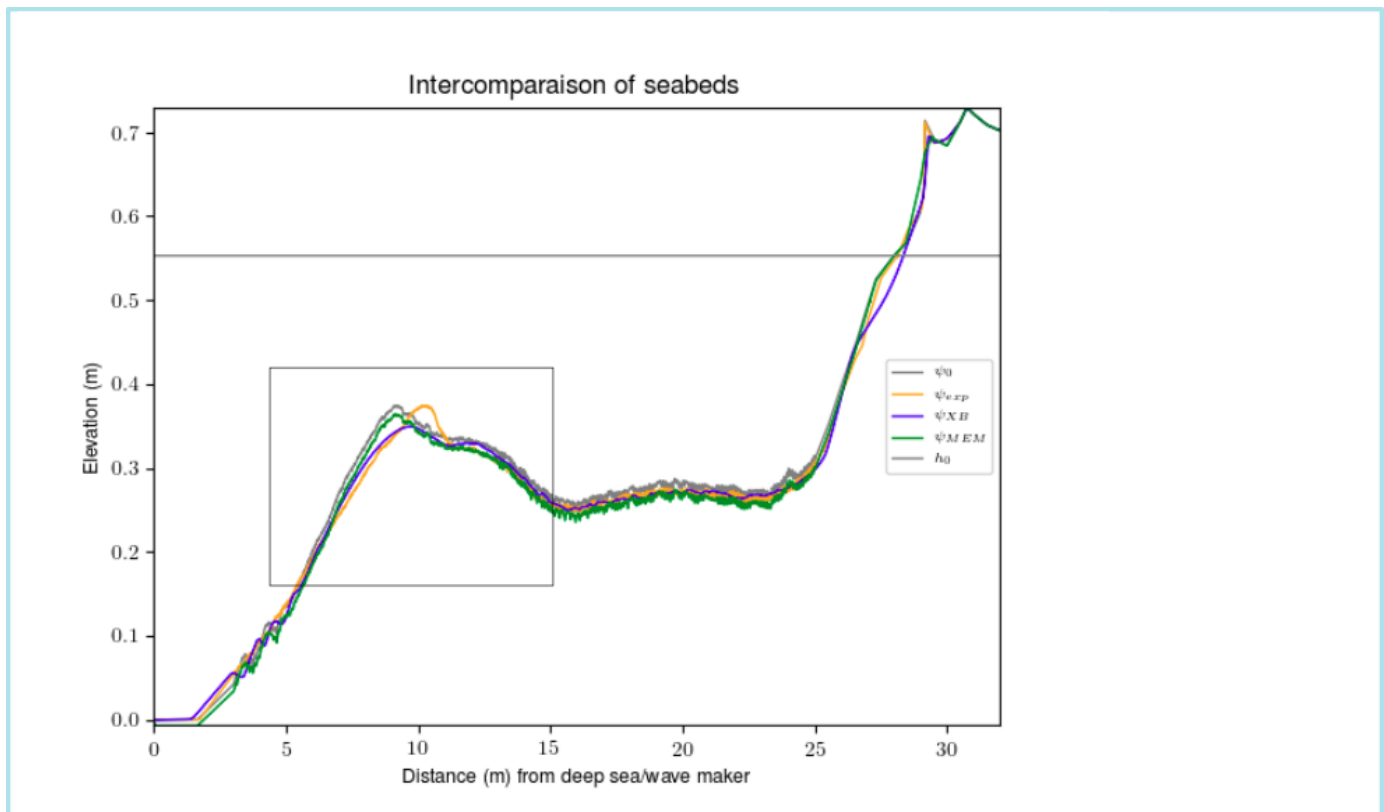


Deep water wave height

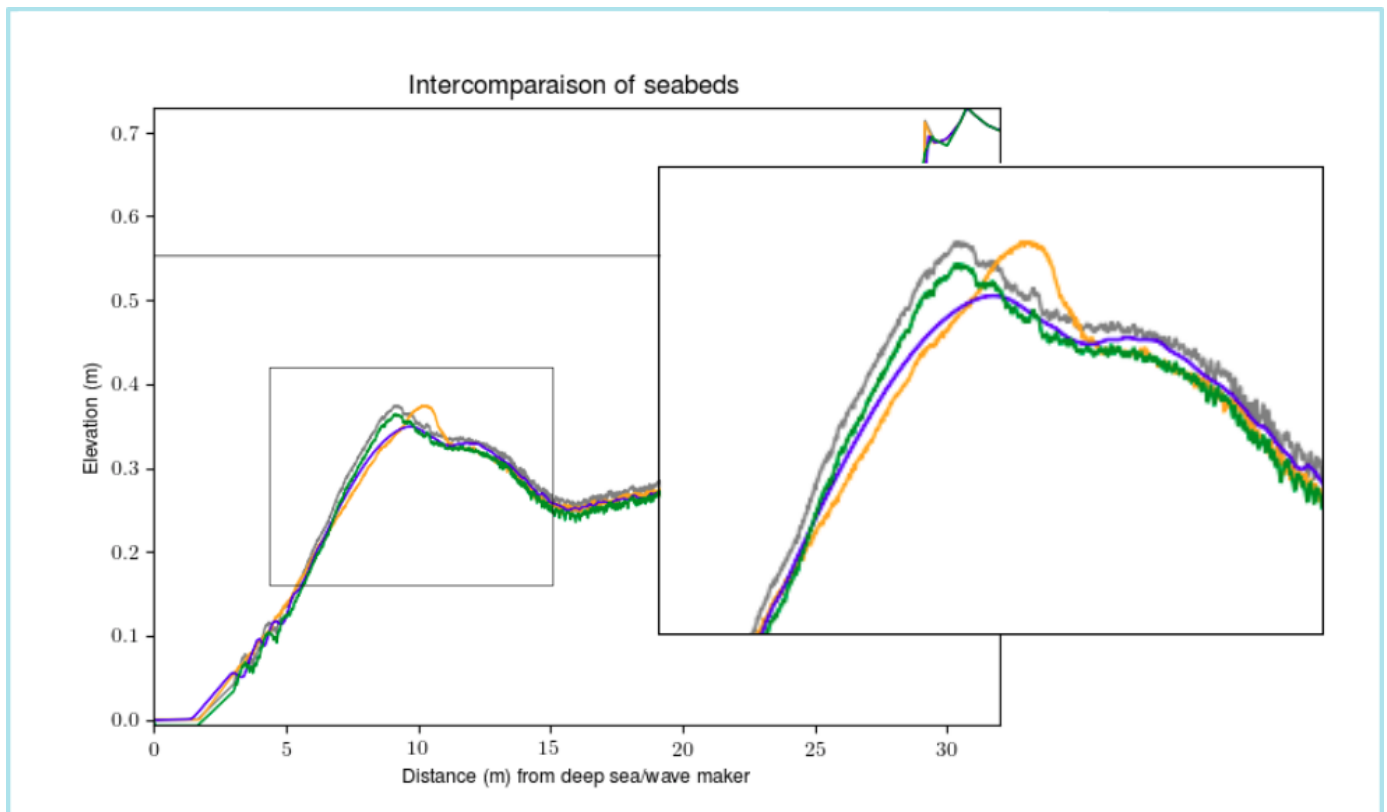


Photo of the experimental flume

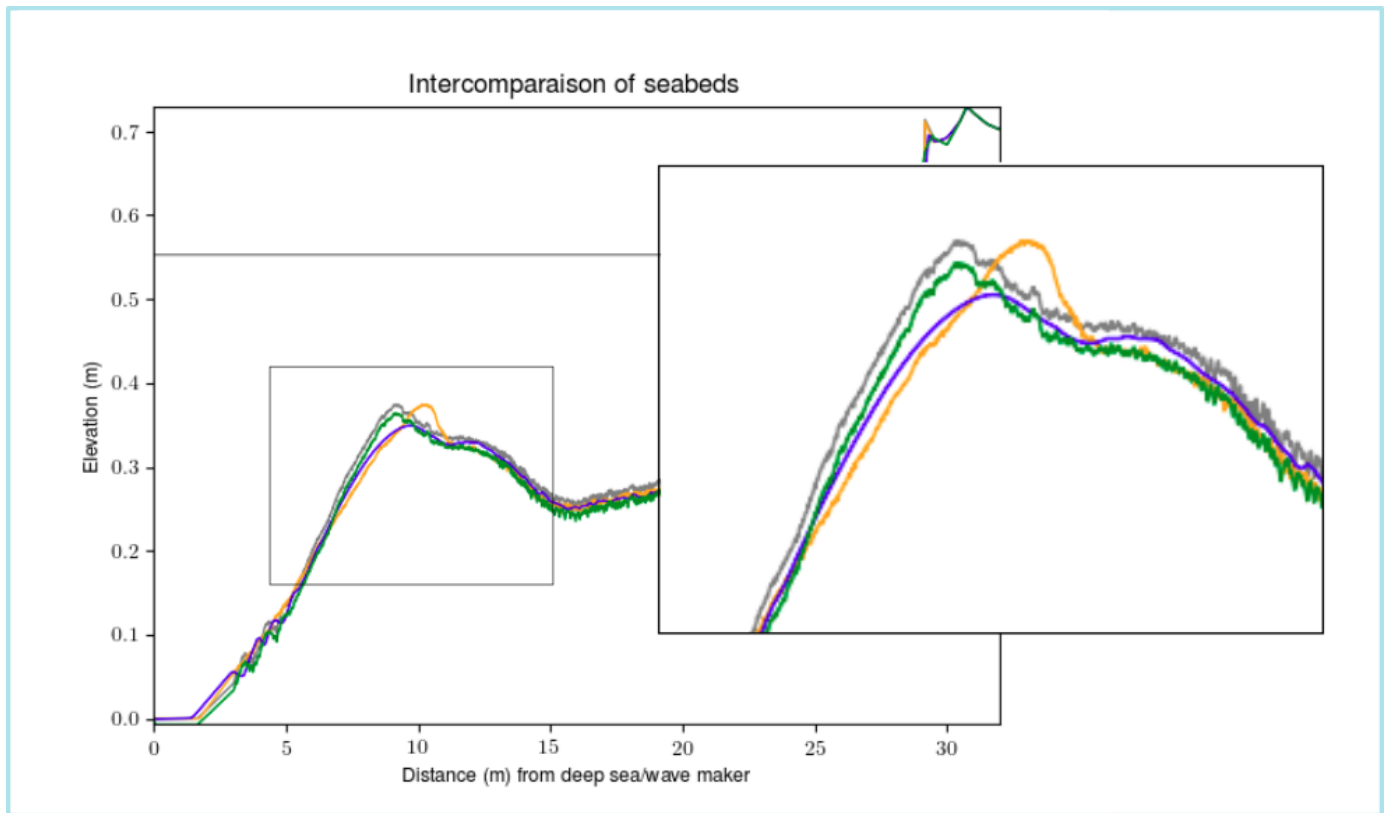
RESULTS (3)



RESULTS (3)



RESULTS (3)



- The general form of the seabed is conserved
- Discrepancies occur at the sandbar
- The results are comparable to another well-known morphodynamic model.

◀ □ ▶

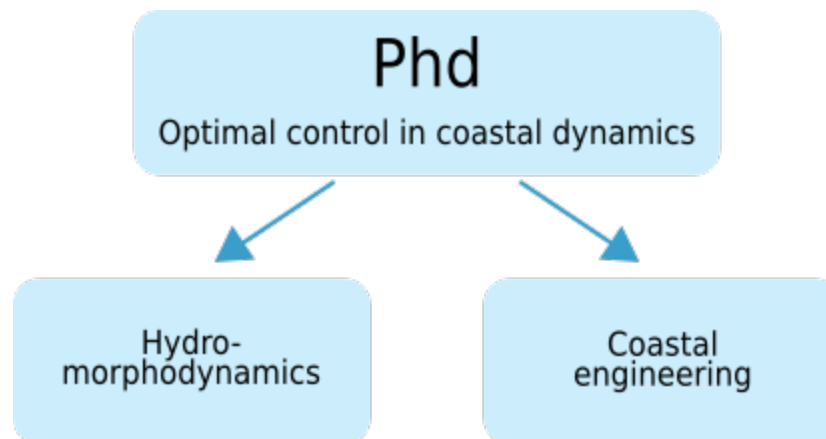
CONCLUSION

We have designed a theory describing morphodynamics based on **optimal control**, with promising results.

The next steps include :

- ▶ Vary the choice of **cost function** to reveal different physical processes,
- ▶ Extend the model to **3D**,
- ▶ Incorporate **additional constraints**, if needed.

COASTAL ENGINEERING








Coastal Engineering

LA TURBALLE



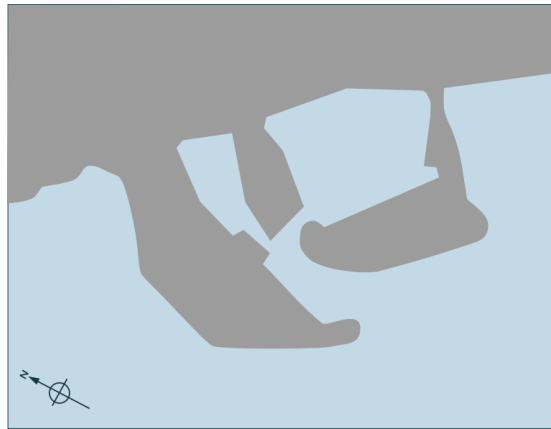
La Turballe is a port situated in Northwest France and offers an array of activities :

-  fishing
-  marina
-  naval repair center
-  touristic boat trips to nearby ports and islands
-  future wind turbine maintenance center (2021)



LA TURBALLE : OBJECTIVES

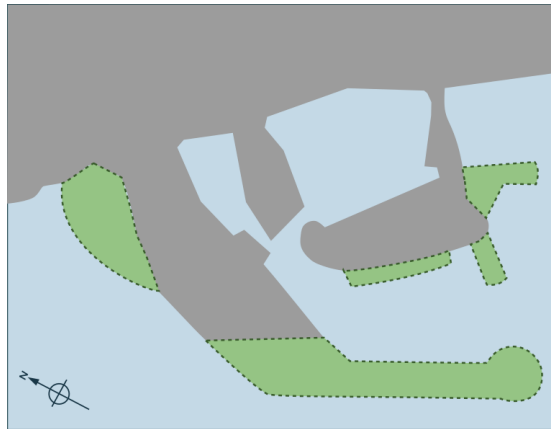
Project : Extend the port in order to accommodate the ever increasing harbor activity.



Actual configuration of La Turballe

LA TURBALLE : OBJECTIVES

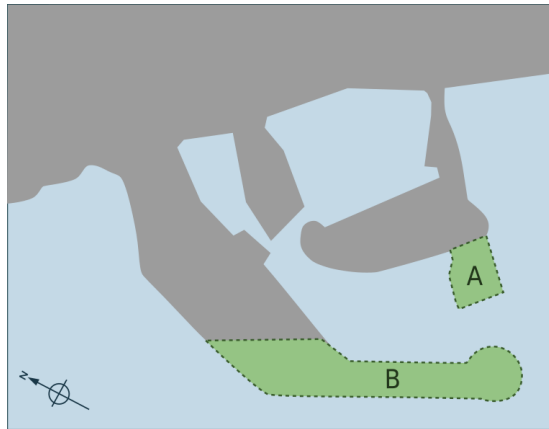
Project : Extend the port in order to accommodate the ever increasing harbor activity.



Many different structures varying in size, shape and position can be added to the port.

LA TURBALLE : OBJECTIVES

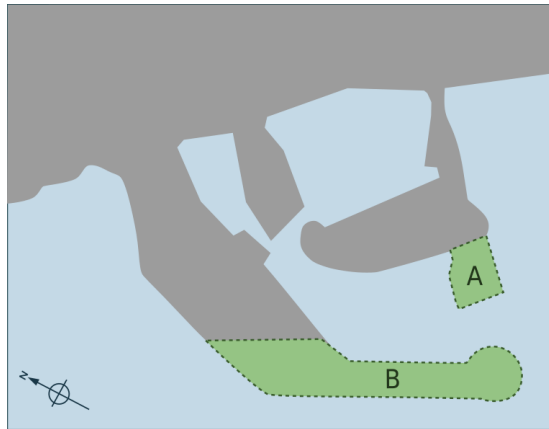
Project : Extend the port in order to accommodate the ever increasing harbor activity.



For illustrative purposes, let us consider adding only two solid emerged structures.

LA TURBALLE : OBJECTIVES

Project : Extend the port in order to accommodate the ever increasing harbor activity.

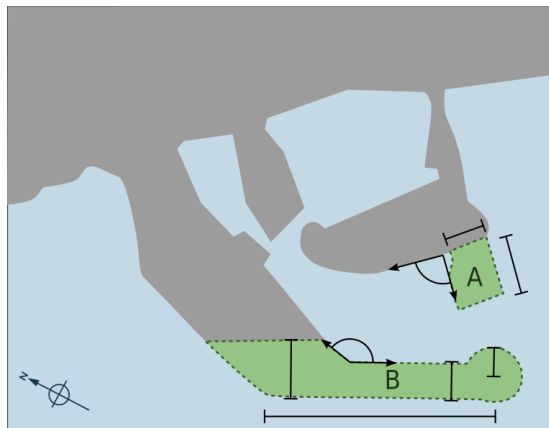


For illustrative purposes, let us consider adding only two solid emerged structures.

Our task : Find the size/shape of the defense structures which *minimizes* wave agitation in the port.

PARAMETERS

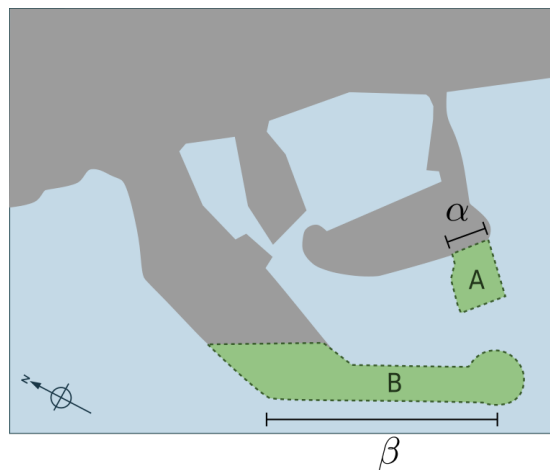
Numerous parameters can be used to define the two structures.



PARAMETERS

Numerous parameters can be used to define the two structures.

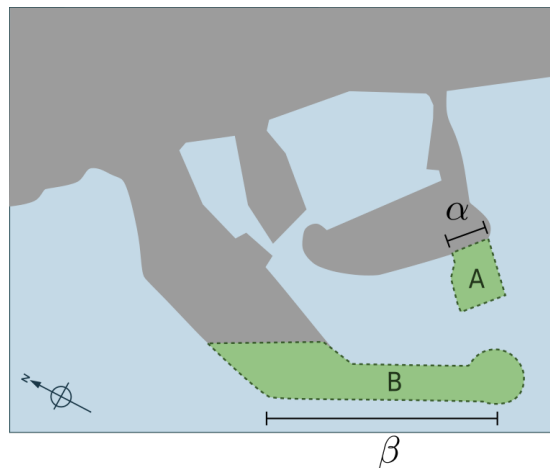
For illustrative purposes, we only vary the width of structure A and the length of structure B.



PARAMETERS

Numerous parameters can be used to define the two structures.

For illustrative purposes, we only vary the width of structure A and the length of structure B.

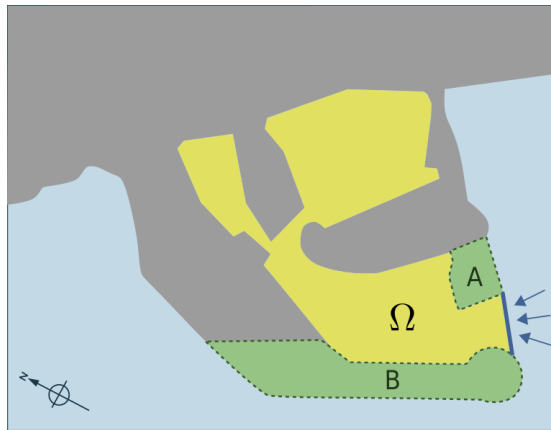


The shape and size of the structures are restricted by physical and economic **constraints** :

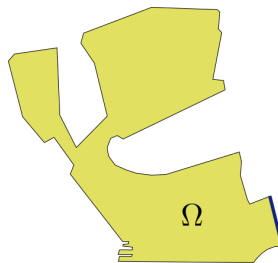
- ▶ α must be between 50m and 250m.
- ▶ β must be between 350m and 650m.
- ▶ the distance between A and B must be greater than 50m.

HYDRODYNAMIC MODEL

We need a hydrodynamic model, in order to determine the agitation of the water in the port.



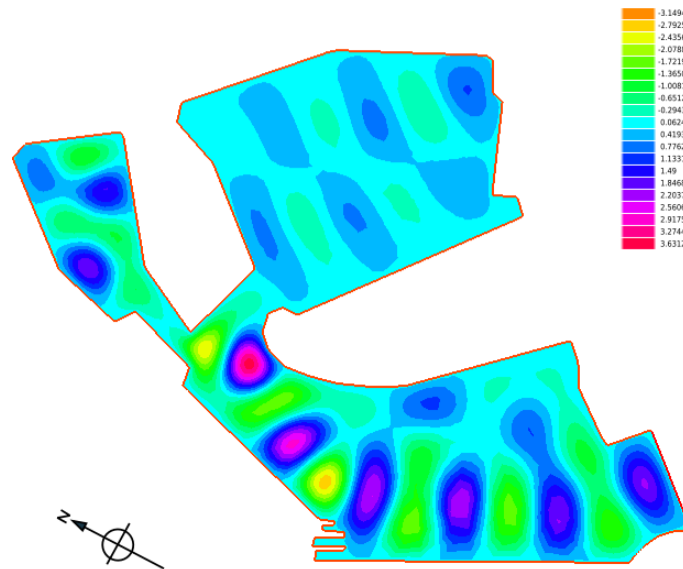
We study wave agitation on the following domain :



HYDRODYNAMIC MODEL (2)

We developed a model based on the Helmholtz equation taking into account :

- ▶ multi-directional incoming waves
- ▶ multi-frequency incoming waves



MINIMIZATION PROBLEM

Find the parameters α and β such that the agitation of the water J is minimal while subjected to the previous constraints :

$$\underset{\alpha, \beta}{\text{minimize}} J(\alpha, \beta) \quad \text{subject to} \quad \begin{cases} 50 \leq \alpha \leq 250 \\ 350 \leq \beta \leq 650 \\ \text{dist}(A, B) \leq 50 \end{cases}$$

where J is the global agitation of the water given by :

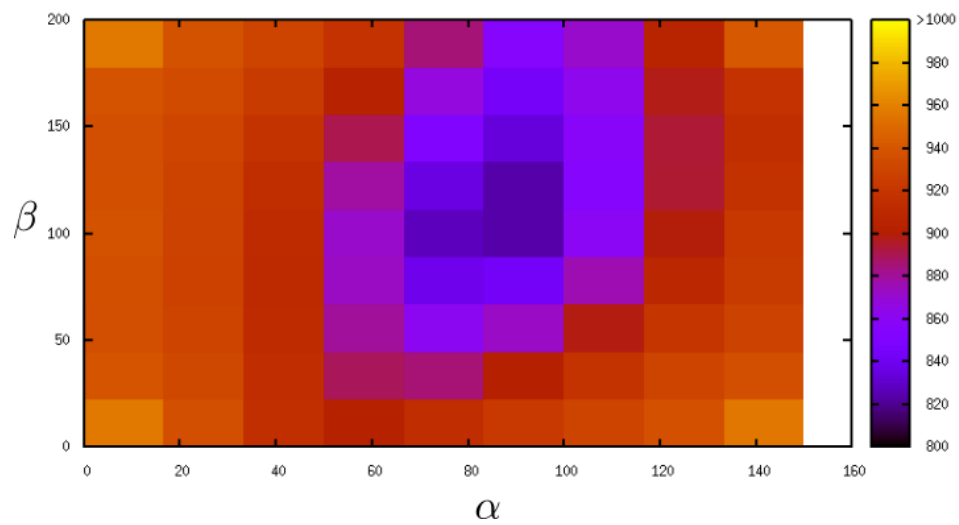
$$J(\alpha, \beta) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (a(\alpha, \beta, x) - a_{\text{ref}})^2 \psi(x) dx$$

where

- ▶ a is the amplitude of the waves, determined by the hydrodynamic model
- ▶ a_{ref} is the target amplitude of the waves
- ▶ ψ is the support of J

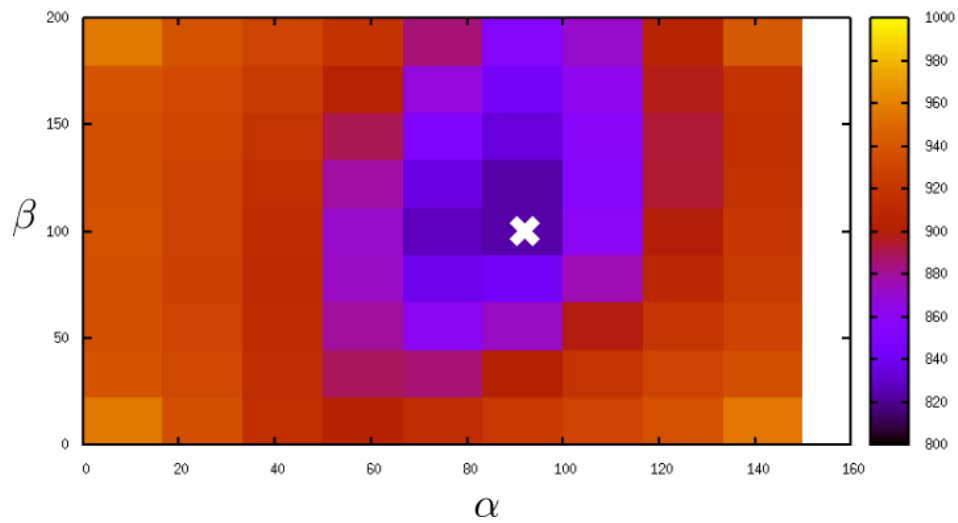
RESULTS : GRAPH OF J

Graph of the cost function J in relation to α and β



RESULTS : GRAPH OF J

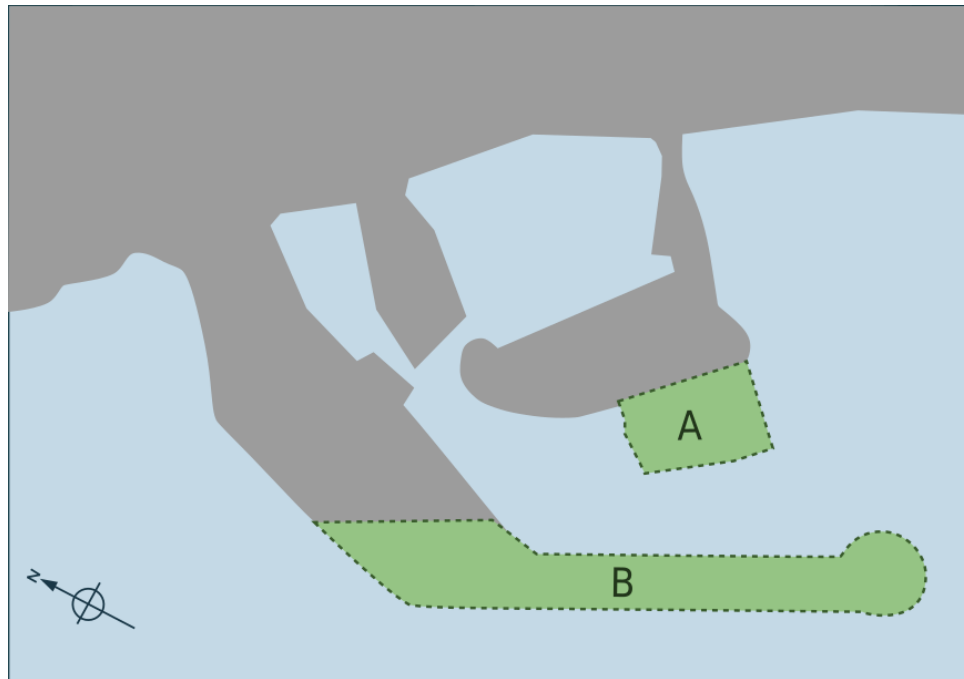
Graph of the cost function J in relation to α and β



We observe a global minimum of J (cross), which is reached when $\alpha = 90$ and $\beta = 120$.

RESULTS : PORT CONFIGURATION

The port configuration corresponding to $\alpha = 90$ and $\beta = 120$ is :



CONCLUSION

- ▶ Optimal control was use in the design of the new configuration of La Turballe port.
- ▶ We expanded the port's surface while minimizing wave agitation.
- ▶ Traditional engineering (BRLi) obtained similar solutions.

Thank you for your attention.

4.6 2019: Journée des doctorants - Geosciences Montpellier



Optimization theory applied to coastal dynamics

24/05/2019

M. Cook^{1,3,4}, F. Bouchette^{1,3}, B. Mohammadi^{1,2,3}, N. Fraysse⁴

¹ GEOSCIENCES-M, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, megan.cook@umontpellier.fr, frederic.bouchette@umontpellier.fr

² IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France, bijan.mohammadi@umontpellier.fr

³ GLADYS, Univ Montpellier, CNRS, Le Grau du Roi, France

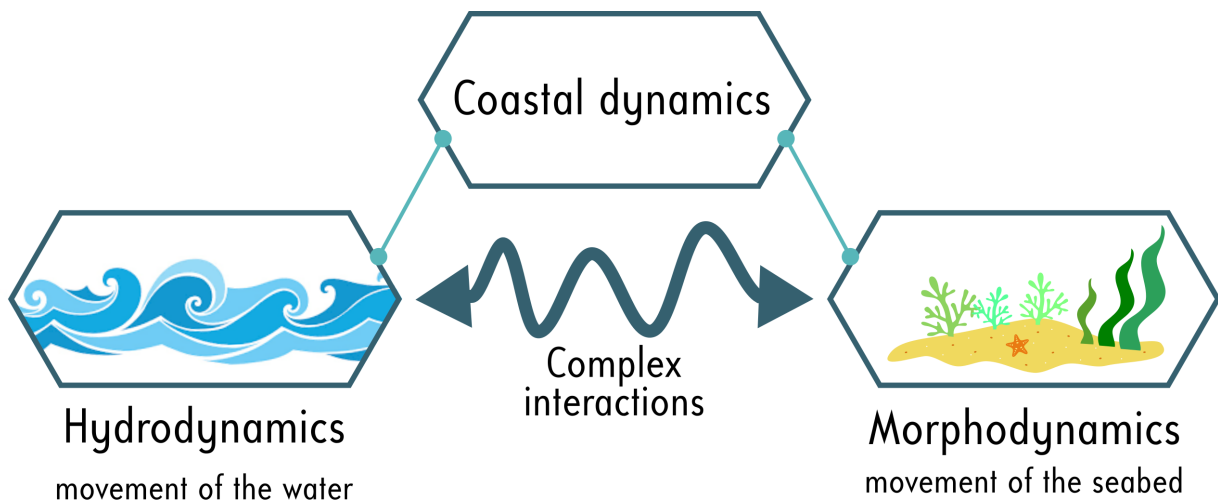
⁴ BRL Ingénierie, Nîmes, France, nicolas.fraysse@brl.fr



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER



SETTINGS



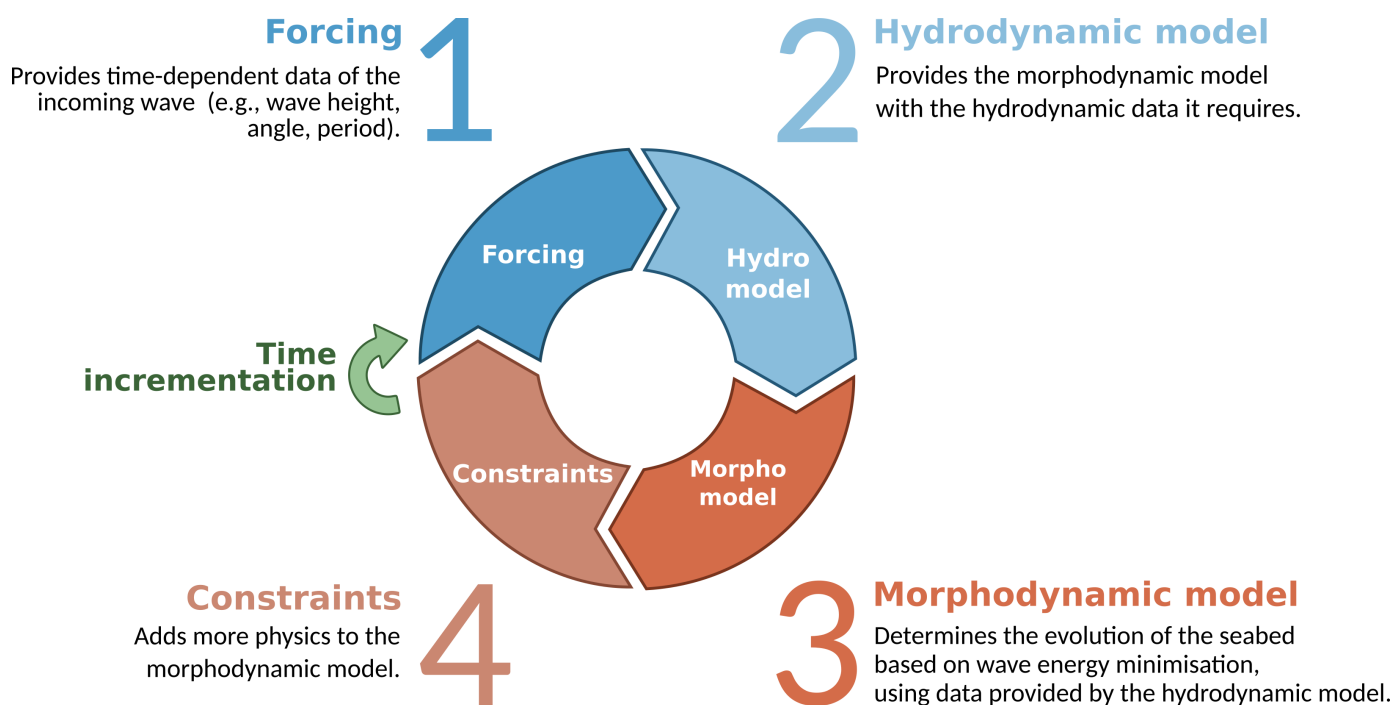
Assumption

The seabed evolves in order to minimize a wave-related quantity.

Objective

Identify the driving force behind morphodynamics.

WORKFLOW



MORPHODYNAMIC MODEL BASED ON WAVE ENERGY MINIMIZATION

The seabed evolves in order to minimize...

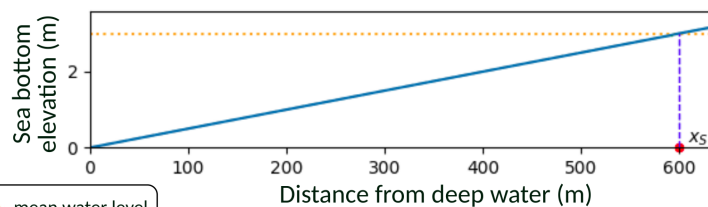
$$J(\psi) = \frac{1}{8} \int_0^{x_B} \rho_w g H(\psi, x)^2 dx \quad [J.m^{-1}]$$

Our choice of J

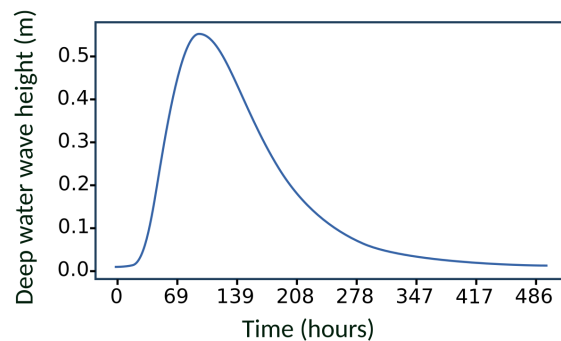
Potential energy of the waves.

FIRST RESULTS

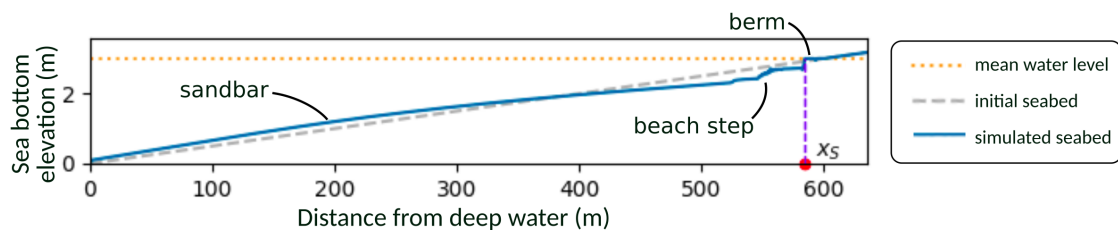
We start with a linear seabed.



We apply the optimizer onto the seabed, over the course of a simple storm.

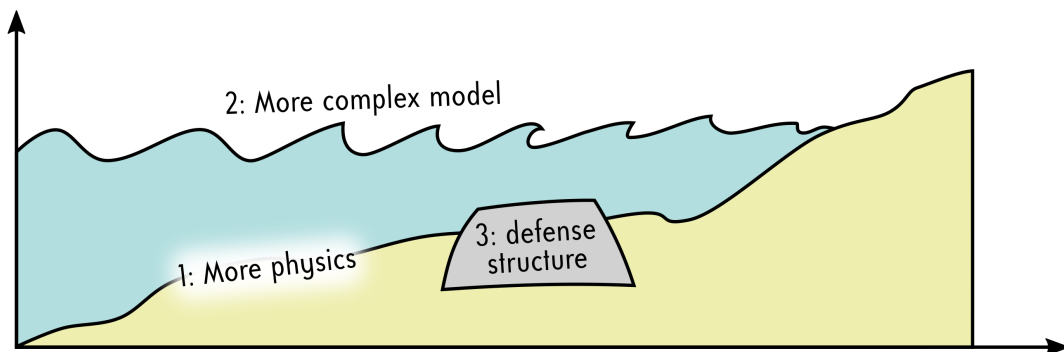


We observe the following results.



WHAT'S NEXT ?

1. Analyse the natural mechanisms behind coastal dynamics by searching for the driving force J .
2. Complexify the model, using a more advanced hydrodynamic model.
3. Introduce defense structures and optimize their shape at the same time as the morphodynamic optimization.



Thank you for your attention !



References

- [1] R Dupont, F Bouchette, and B Mohammadi. Hydromorphodynamic modelling based on Hadamard Sensitive Analysis. 2023.
- [2] Ronan Dupont, Megan Cook, Bijan Mohammadi, and Sammuel Meule. Sandy beach dynamics by constrained wave energy minimization. 2023.
- [3] Ronan Dupont, Frederic Bouchette, Bijan Mohammadi, and Damien Sous. OptiMorph : un modèle de morphodynamique du littoral par principe de minimisation. Analyse de sensibilité en 1D et application multi-1D. In *XVIIèmes Journées, Chatou*, pages 327–336. Editions Paralia, 2022. ISBN 978-2-35921-022-4. doi: 10.5150/jngcgc.2022.034. URL http://www.paralia.fr/jngcgc/17_34_dupont.pdf.
- [4] Ronan Dupont. A MULTI-1D SANDY BEACH DYNAMICS MODEL BY MINIMIZATION. 2022.
- [5] Megan Cook, Frédéric Bouchette, Bijan Mohammadi, Léa Sprunck, and Nicolas Fraysse. Optimal Port Design Minimizing Standing Waves with A Posteriori Long Term Shoreline Sustainability Analysis. *China Ocean Engineering*, 35(6):802–813, December 2021. ISSN 0890-5487, 2191-8945. doi: 10.1007/s13344-021-0071-7. URL <https://link.springer.com/10.1007/s13344-021-0071-7>.
- [6] Megan Cook, Frédéric Bouchette, Bijan Mohammadi, and Nicolas Fraysse. Application of Opti-Morph: Optimized beach protection by submerged geotextile tubes. 2021.
- [7] Megan Cook, Frédéric Bouchette, Bijan Mohammadi, and Nicolas Fraysse. Opti-Morph User Guide. 2021.